УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ ЛИПЕЦКОЙ ОБЛАСТИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБЛАСТНОЕ БЮДЖЕТНОЕ

ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ

«ЛИПЕЦКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ТЕХНИКУМ»

****

|  |
| --- |
| **Методические указания по выполнению практических ЗАНЯТИЙ** |
| по учебной дисциплине |
| **ОУД.04 « Математика»** |

по специальности СПО:

**15.02.10 Мехатроника и мобильная робототехника (по отраслям)**

**Липецк-2020**

Методические указания по выполнению практических занятий по учебной дисциплине ОУД.04 «Математика» для специальности СПО 15.02.10 Мехатроника и мобильная робототехника (по отраслям)

**Организация-разработчик:** ГОБПОУ «ЛПТ»

**Разработчики:** Клещина Наталья Вячеславовна, Заварзина Вера Геннадьевна преподаватели ГОБПОУ «Липецкий политехнический техникум»

**Рассмотрено** на заседании цикловой комиссии естественно-математического цикла ГОБПОУ «Липецкий политехнический техникум»

Председатель ЦК\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ И.И. Овчинникова

**Содержание**

|  |  |
| --- | --- |
| Введение | 7 |
| Общие требования для студентов при выполнении  практических занятий | 20 |
| Система оценивания практических занятий | 20 |
| * Практическое занятие №1 «Множества и операции над ними»; | 21 |
| * Практическое занятие №2 «Комплексные числа и действия с ними»; | 26 |
| * Практическое занятие №3 «Свойства корня n-ой степени. Выполнение расчетов с радикалами»; | 29 |
| * Практическое занятие №4 «Решение иррациональных уравнений»; | 32 |
| * Практическое занятие №5 «Решение показательных уравнений и неравенств»; | 35 |
| * Практическое занятие №6 «Свойства логарифмов»; | 38 |
| * Практическое занятие №7 «Решение логарифмических уравнений и неравенств, систем»; | 40 |
| * Практическое занятие № 8 «Основные тригонометрические тождества»; | 44 |
| * Практическое занятие №9 «Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства»; | 47 |
| * Практическое занятие №10 «Решение тригонометрических уравнений, неравенств и систем»; | 50 |
| * Практическое занятие №11 «Производные основных элементарных функций»; | 53 |
| * Практическое занятие №12 «Производные сложной и обратной функции»; | 56 |
| * Практическое занятие №13 «Исследование функции с помощью производной»; | 59 |
| * Практическое занятие №14 «Неопределенный интеграл и первообразная»; | 63 |
| * Практическое занятие №15 «Вычисление площадей плоских фигур и объемов тел вращения с помощью интеграла»; | 65 |
| * Практическое занятие №16 «Текстовые задачи»; | 68 |
| * Практическое занятие №17 «Преобразование графиков степенной и показательной функции»; | 74 |
| * Практическое занятие №18 «Преобразование графиков тригонометрической и логарифмической функции»; | 77 |
| * Практическое занятие №19 «Решение комбинаторных задач»; | 79 |
| * Практическое занятие №20 «Вычисление вероятностей. Прикладные задачи»; | 82 |
| * Практическое занятие №21 «Закон распределения и числовые характеристики дискретной случайной величины»; | 86 |
| * Практическое занятие №22 «Теория граф»; | 89 |
| * Практическое занятие №23 «Исследования математических объектов с использованием прикладных программам»; | 94 |
| * Практическое занятие №24 «Основные приемы решения уравнений, неравенств и систем»; | 96 |
| * Практическое занятие №25 «Уравнения и неравенства с параметрами»; | 98 |
| * Практическое занятие №26 «Уравнения и неравенства, содержащих переменную под знаком модуля». | 101 |
| * Практическое занятие №27 «Перпендикуляр и наклонная к плоскости»; | 102 |
| * Практическое занятие №28 «Взаимное расположение прямых и плоскостей»; | 106 |
| * Практическое занятие №29 «Многогранники. Сечения многогранников»; | 112 |
| * Практическое занятие №30 «Вычисление площадей и объемов многогранников»; | 116 |
| * Практическое занятие №31 «Тела вращения. Сечения»; | 118 |
| * Практическое занятие №32 «Вычисление площадей и объемов фигур в пространстве»; | 122 |
| * Практическое занятие №33 «Действия над векторами, заданными координатами»; | 124 |
| * Практическое занятие №34 «Векторное уравнение прямой и плоскости». | 127 |
| Литература | 128 |

**Введение**

Методические указания по выполнению практических занятий разработаны согласно рабочей программы ОУД.04 Математика и требованиям к результатам обучения Федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования (далее – ФГОС СОО).

Практические занятия направлены на овладение обучающимися следующими результатами обучения:

***личностные:***

* российскую гражданскую идентичность, патриотизм, уважение к своему народу, чувства ответственности перед Родиной, гордости за свой край, свою Родину, прошлое и настоящее многонационального народа России, уважение государственных символов (герб, флаг, гимн);
* гражданскую позицию как активного и ответственного члена российского общества, осознающего свои конституционные права и обязанности, уважающего закон и правопорядок, обладающего чувством собственного достоинства, осознанно принимающего традиционные национальные и общечеловеческие гуманистические и демократические ценности;
* готовность к служению Отечеству, его защите;
* сформированность мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и общественной практики, основанного на диалоге культур, а также различных форм общественного сознания, осознание своего места в поликультурном мире;
* сформированность основ саморазвития и самовоспитания в соответствии с общечеловеческими ценностями и идеалами гражданского общества; готовность и способность к самостоятельной, творческой и ответственной деятельности;
* толерантное сознание и поведение в поликультурном мире, готовность и способность вести диалог с другими людьми, достигать в нем взаимопонимания, находить общие цели и сотрудничать для их достижения, способность противостоять идеологии экстремизма, национализма, ксенофобии, дискриминации по социальным, религиозным, расовым, национальным признакам и другим негативным социальным явлениям;
* навыки сотрудничества со сверстниками, детьми младшего возраста, взрослыми в образовательной, общественно полезной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности;
* нравственное сознание и поведение на основе усвоения общечеловеческих ценностей;
* готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;
* эстетическое отношение к миру, включая эстетику быта, научного и технического творчества, спорта, общественных отношений;
* принятие и реализацию ценностей здорового и безопасного образа жизни, потребности в физическом самосовершенствовании, занятиях спортивно-оздоровительной деятельностью, неприятие вредных привычек: курения, употребления алкоголя, наркотиков;
* бережное, ответственное и компетентное отношение к физическому и психологическому здоровью, как собственному, так и других людей, умение оказывать первую помощь;
* осознанный выбор будущей профессии и возможностей реализации собственных жизненных планов; отношение к профессиональной деятельности как возможности участия в решении личных, общественных, государственных, общенациональных проблем;
* сформированность экологического мышления, понимания влияния социально-экономических процессов на состояние природной и социальной среды; приобретение опыта эколого-направленной деятельности;
* ответственное отношение к созданию семьи на основе осознанного принятия ценностей семейной жизни.

***метапредметные*:**

* умение самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы деятельности; самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать деятельность; использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей и реализации планов деятельности; выбирать успешные стратегии в различных ситуациях;
* умение продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности, учитывать позиции других участников деятельности, эффективно разрешать конфликты;
* владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;
* готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, владение навыками получения необходимой информации из словарей разных типов, умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников;
* умение использовать средства информационных и коммуникационных технологий (далее - ИКТ) в решении когнитивных, коммуникативных и организационных задач с соблюдением требований эргономики, техники безопасности, гигиены, ресурсосбережения, правовых и этических норм, норм информационной безопасности;
* умение определять назначение и функции различных социальных институтов;
* умение самостоятельно оценивать и принимать решения, определяющие стратегию поведения, с учетом гражданских и нравственных ценностей;
* владение языковыми средствами - умение ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства;
* владение навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов и оснований, границ своего знания и незнания, новых познавательных задач и средств их достижения.

***предметные:***

* сформированность представлений о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира;
* сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;
* владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;
* владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств;
* сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа;
* владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;
* сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, о статистических закономерностях в реальном мире, об основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин;
* владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач;
* сформированность представлений о необходимости доказательств при обосновании математических утверждений и роли аксиоматики в проведении дедуктивных рассуждений;
* сформированность понятийного аппарата по основным разделам курса математики; знаний основных теорем, формул и умения их применять; умения доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач;
* сформированность умений моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат;
* сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей;
* владение умениями составления вероятностных моделей по условию задачи и вычисления вероятности наступления событий, в том числе с применением формул комбинаторики и основных теорем теории вероятностей; исследования случайных величин по их распределению.

**В результате изучения учебной дисциплины «Математика» на уровне среднего общего образования студент научится (1):**

* свободно оперировать понятиями: конечное множество, элемент множества, подмножество, пересечение, объединение и разность множеств, числовые множества на координатной прямой, отрезок, интервал, полуинтервал, промежуток с выколотой точкой, графическое представление множеств на координатной плоскости;
* задавать множества перечислением и характеристическим свойством;
* оперировать понятиями: утверждение, отрицание утверждения, истинные и ложные утверждения, причина, следствие, частный случай общего утверждения, контрпример;
* проверять принадлежность элемента множеству;
* находить пересечение и объединение множеств, в том числе представленных графически на числовой прямой и на координатной плоскости;
* проводить доказательные рассуждения для обоснования истинности утверждений;
* свободно оперировать понятиями: натуральное число, множество натуральных чисел, целое число, множество целых чисел, обыкновенная дробь, десятичная дробь, смешанное число, рациональное число, множество рациональных чисел, иррациональное число, корень степени n, действительное число, множество действительных чисел, геометрическая интерпретация натуральных, целых, рациональных, действительных чисел;
* понимать и объяснять разницу между позиционной и непозиционной системами записи чисел;
* переводить числа из одной системы записи (системы счисления) в другую;
* доказывать и использовать признаки делимости суммы и произведения при выполнении вычислений и решении задач;
* выполнять округление рациональных и иррациональных чисел с заданной точностью;
* сравнивать действительные числа разными способами;
* упорядочивать числа, записанные в виде обыкновенной и десятичной дроби, числа, записанные с использованием арифметического квадратного корня, корней степени больше 2;
* находить НОД и НОК разными способами и использовать их при решении задач;
* выполнять вычисления и преобразования выражений, содержащих действительные числа, в том числе корни натуральных степеней;
* выполнять стандартные тождественные преобразования тригонометрических, логарифмических, степенных, иррациональных выражений;
* свободно оперировать понятиями: уравнение, неравенство, равносильные уравнения и неравенства, уравнение, являющееся следствием другого уравнения, уравнения, равносильные на множестве, равносильные преобразования уравнений;
* решать разные виды уравнений и неравенств и их систем, в том числе некоторые уравнения 3-й и 4-й степеней, дробно-рациональные и иррациональные;
* овладеть основными типами показательных, логарифмических, иррациональных, степенных уравнений и неравенств и стандартными методами их решений и применять их при решении задач;
* применять теорему Безу к решению уравнений;
* применять теорему Виета для решения некоторых уравнений степени выше второй;
* понимать смысл теорем о равносильных и неравносильных преобразованиях уравнений и уметь их доказывать;
* владеть методами решения уравнений, неравенств и их систем, уметь выбирать метод решения и обосновывать свой выбор;
* использовать метод интервалов для решения неравенств, в том числе дробно-рациональных и включающих в себя иррациональные выражения;
* решать алгебраические уравнения и неравенства и их системы с параметрами алгебраическим и графическим методами;
* владеть разными методами доказательства неравенств;
* решать уравнения в целых числах;
* изображать множества на плоскости, задаваемые уравнениями, неравенствами и их системами;
* свободно использовать тождественные преобразования при решении уравнений и систем уравнений;
* владеть понятиями: зависимость величин, функция, аргумент и значение функции, область определения и множество значений функции, график зависимости, график функции, нули функции, промежутки знакопостоянства, возрастание на числовом промежутке, убывание на числовом промежутке, наибольшее и наименьшее значение функции на числовом промежутке, периодическая функция, период, четная и нечетная функции; уметь применять эти понятия при решении задач;
* владеть понятием степенная функция; строить ее график и уметь применять свойства степенной функции при решении задач;
* владеть понятиями показательная функция, экспонента; строить их графики и уметь применять свойства показательной функции при решении задач;
* владеть понятием логарифмическая функция; строить ее график и уметь применять свойства логарифмической функции при решении задач;
* владеть понятиями тригонометрические функции; строить их графики и уметь применять свойства тригонометрических функций при решении задач;
* владеть понятием обратная функция; применять это понятие при решении задач;
* применять при решении задач свойства функций: четность, периодичность, ограниченность;
* применять при решении задач преобразования графиков функций;
* владеть понятиями числовая последовательность, арифметическая и геометрическая прогрессия;
* применять при решении задач свойства и признаки арифметической и геометрической прогрессий;
* владеть понятием бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и уметь применять его при решении задач;
* применять для решения задач теорию пределов;
* владеть понятиями бесконечно большие и бесконечно малые числовые последовательности и уметь сравнивать бесконечно большие и бесконечно малые последовательности;
* владеть понятиями: производная функции в точке, производная функции;
* вычислять производные элементарных функций и их комбинаций;
* исследовать функции на монотонность и экстремумы;
* строить графики и применять к решению задач, в том числе с параметром;
* владеть понятием касательная к графику функции и уметь применять его при решении задач;
* владеть понятиями первообразная функция, определенный интеграл;
* применять теорему Ньютона–Лейбница и ее следствия для решения задач;
* оперировать основными описательными характеристиками числового набора, понятием генеральная совокупность и выборкой из нее;
* оперировать понятиями: частота и вероятность события, сумма и произведение вероятностей, вычислять вероятности событий на основе подсчета числа исходов;
* владеть основными понятиями комбинаторики и уметь их применять при решении задач;
* иметь представление об основах теории вероятностей;
* иметь представление о дискретных и непрерывных случайных величинах и распределениях, о независимости случайных величин;
* иметь представление о математическом ожидании и дисперсии случайных величин;
* иметь представление о совместных распределениях случайных величин;
* понимать суть закона больших чисел и выборочного метода измерения вероятностей;
* иметь представление о нормальном распределении и примерах нормально распределенных случайных величин;
* иметь представление о корреляции случайных величин;
* решать разные задачи повышенной трудности;
* анализировать условие задачи, выбирать оптимальный метод решения задачи, рассматривая различные методы;
* строить модель решения задачи, проводить доказательные рассуждения при решении задачи;
* решать задачи, требующие перебора вариантов, проверки условий, выбора оптимального результата;
* анализировать и интерпретировать полученные решения в контексте условия задачи, выбирать решения, не противоречащие контексту;
* переводить при решении задачи информацию из одной формы записи в другую, используя при необходимости схемы, таблицы, графики, диаграммы;
* владеть геометрическими понятиями при решении задач и проведении математических рассуждений;
* самостоятельно формулировать определения геометрических фигур, выдвигать гипотезы о новых свойствах и признаках геометрических фигур и обосновывать или опровергать их, обобщать или конкретизировать результаты на новых классах фигур, проводить в несложных случаях классификацию фигур по различным основаниям;
* исследовать чертежи, включая комбинации фигур, извлекать, интерпретировать и преобразовывать информацию, представленную на чертежах;
* решать задачи геометрического содержания, в том числе в ситуациях, когда алгоритм решения не следует явно из условия, выполнять необходимые для решения задачи дополнительные построения, исследовать возможность применения теорем и формул для решения задач;
* уметь формулировать и доказывать геометрические утверждения;
* владеть понятиями стереометрии: призма, параллелепипед, пирамида, тетраэдр;
* иметь представления об аксиомах стереометрии и следствиях из них и уметь применять их при решении задач;
* уметь строить сечения многогранников с использованием различных методов, в том числе и метода следов;
* иметь представление о скрещивающихся прямых в пространстве и уметь находить угол и расстояние между ними;
* применять теоремы о параллельности прямых и плоскостей в пространстве при решении задач;
* уметь применять параллельное проектирование для изображения фигур;
* уметь применять перпендикулярности прямой и плоскости при решении задач;
* владеть понятиями ортогональное проектирование, наклонные и их проекции, уметь применять теорему о трех перпендикулярах при решении задач;
* владеть понятиями расстояние между фигурами в пространстве, общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых и уметь применять их при решении задач;
* владеть понятием угол между прямой и плоскостью и уметь применять его при решении задач;
* владеть понятиями двугранный угол, угол между плоскостями, перпендикулярные плоскости и уметь применять их при решении задач;
* владеть понятиями призма, параллелепипед и применять свойства параллелепипеда при решении задач;
* владеть понятием прямоугольный параллелепипед и применять его при решении задач;
* владеть понятиями пирамида, виды пирамид, элементы правильной пирамиды и уметь применять их при решении задач;
* иметь представление о теореме Эйлера,правильных многогранниках;
* владеть понятием площади поверхностей многогранников и уметь применять его при решении задач;
* владеть понятиями тела вращения (цилиндр, конус, шар и сфера), их сечения и уметь применять их при решении задач;
* владеть понятиями касательные прямые и плоскости и уметь применять изпри решении задач;
* иметь представления о вписанных и описанных сферах и уметь применять их при решении задач;
* владеть понятиями объем, объемы многогранников, тел вращения и применять их при решении задач;
* иметь представление о развертке цилиндра и конуса, площади поверхности цилиндра и конуса, уметь применять их при решении задач;
* иметь представление о площади сферы и уметь применять его при решении задач;
* уметь решать задачи на комбинации многогранников и тел вращения;
* иметь представление о подобии в пространстве и уметь решать задачи на отношение объемов и площадей поверхностей подобных фигур;
* владеть понятиями векторы и их координаты;
* уметь выполнять операции над векторами;
* использовать скалярное произведение векторов при решении задач;
* применять уравнение плоскости, формулу расстояния между точками, уравнение сферы при решении задач;
* применять векторы и метод координат в пространстве при решении задач;
* иметь представление о вкладе выдающихся математиков в развитие науки;
* понимать роль математики в развитии России;
* использовать основные методы доказательства, проводить доказательство и выполнять опровержение;
* применять основные методы решения математических задач;
* на основе математических закономерностей в природе характеризовать красоту и совершенство окружающего мира и произведений искусства;
* применять простейшие программные средства и электронно-коммуникационные системы при решении математических задач;
* пользоваться прикладными программами и программами символьных вычислений для исследования математических объектов.

**В результате изучения учебной дисциплины «Математика» на уровне среднего общего образования студент получит возможность научиться:**

* достижение результатов (1);
* оперировать понятием определения, основными видами определений, основными видами теорем;
* понимать суть косвенного доказательства;
* оперировать понятиями счетного и несчетного множества;
* применять метод математической индукции для проведения рассуждений и доказательств и при решении задач.
* в повседневной жизни и при изучении других предметов: использовать теоретико-множественный язык и язык логики для описания реальных процессов и явлений, при решении задач других учебных предметов;
* свободно оперировать числовыми множествами при решении задач;
* понимать причины и основные идеи расширения числовых множеств;
* владеть основными понятиями теории делимости при решении стандартных задач
* иметь базовые представления о множестве комплексных чисел;
* свободно выполнять тождественные преобразования тригонометрических, логарифмических, степенных выражений;
* владеть формулой бинома Ньютона;
* применять при решении задач теорему о линейном представлении НОД;
* применять при решении задач Китайскую теорему об остатках;
* применять при решении задач Малую теорему Ферма;
* уметь выполнять запись числа в позиционной системе счисления;
* применять при решении задач теоретико-числовые функции: число и сумма делителей, функцию Эйлера;
* применять при решении задач цепные дроби;
* применять при решении задач многочлены с действительными и целыми коэффициентами;
* владеть понятиями приводимый и неприводимый многочлен и применять их при решении задач;
* применять при решении задач Основную теорему алгебры;
* применять при решении задач простейшие функции комплексной переменной как геометрические преобразования;
* свободно определять тип и выбирать метод решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств, иррациональных уравнений и неравенств, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем;
* свободно решать системы линейных уравнений;
* решать основные типы уравнений и неравенств с параметрами;
* применять при решении задач неравенства Коши — Буняковского, Бернулли;
* иметь представление о неравенствах между средними степенными
* владеть понятием асимптоты и уметь его применять при решении задач;
* применять методы решения простейших дифференциальных уравнений первого и второго порядков;
* свободно владеть стандартным аппаратом математического анализа для вычисления производных функции одной переменной;
* свободно применять аппарат математического анализа для исследования функций и построения графиков, в том числе исследования на выпуклость;
* оперировать понятием первообразной функции для решения задач;
* овладеть основными сведениями об интеграле Ньютона–Лейбница и его простейших применениях;
* оперировать в стандартных ситуациях производными высших порядков;
* уметь применять при решении задач свойства непрерывных функций;
* уметь применять при решении задач теоремы Вейерштрасса;
* уметь выполнять приближенные вычисления (методы решения уравнений, вычисления определенного интеграла);
* уметь применять приложение производной и определенного интеграла к решению задач естествознания;
* владеть понятиями вторая производная, выпуклость графика функции и уметь исследовать функцию на выпуклость;
* иметь представление о центральной предельной теореме;
* иметь представление о выборочном коэффициенте корреляции и линейной регрессии;
* иметь представление о статистических гипотезах и проверке статистической гипотезы, о статистике критерия и ее уровне значимости;
* иметь представление о связи эмпирических и теоретических распределений;
* иметь представление о кодировании, двоичной записи, двоичном дереве;
* владеть основными понятиями теории графов (граф, вершина, ребро, степень вершины, путь в графе) и уметь применять их при решении задач;
* иметь представление о деревьях и уметь применять при решении задач;
* владеть понятием связность и уметь применять компоненты связности при решении задач;
* уметь осуществлять пути по ребрам, обходы ребер и вершин графа;
* иметь представление об эйлеровом и гамильтоновом пути, иметь представление о трудности задачи нахождения гамильтонова пути;
* владеть понятиями конечные и счетные множества и уметь их применять при решении задач;
* уметь применять метод математической индукции;
* уметь применять принцип Дирихле при решении задач;
* иметь представление об аксиоматическом методе;
* владеть понятием геометрические места точек в пространстве и уметь применять их для решения задач;
* уметь применять для решения задач свойства плоских и двугранных углов, трехгранного угла, теоремы косинусов и синусов для трехгранного угла;
* владеть понятием перпендикулярное сечение призмы и уметь применять его при решении задач;
* иметь представление о двойственности правильных многогранников;
* владеть понятиями центральное и параллельное проектирование и применять их при построении сечений многогранников методом проекций;
* иметь представление о развертке многогранника и кратчайшем пути на поверхности многогранника;
* иметь представление о конических сечениях;
* иметь представление о касающихся сферах и комбинации тел вращения и уметь применять их при решении задач;
* применять при решении задач формулу расстояния от точки до плоскости;
* владеть разными способами задания прямой уравнениями и уметь применять при решении задач;
* применять при решении задач и доказательстве теорем векторный метод и метод координат;
* иметь представление об аксиомах объема, применять формулы объемов прямоугольного параллелепипеда, призмы и пирамиды, тетраэдра при решении задач;
* применять теоремы об отношениях объемов при решении задач;
* применять интеграл для вычисления объемов и поверхностей тел вращения, вычисления площади сферического пояса и объема шарового слоя;
* иметь представление о движениях в пространстве: параллельном переносе, симметрии относительно плоскости, центральной симметрии, повороте относительно прямой, винтовой симметрии, уметь применять их при решении задач;
* иметь представление о площади ортогональной проекции;
* иметь представление о трехгранном и многогранном угле и применять свойства плоских углов многогранного угла при решении задач;
* иметь представления о преобразовании подобия, гомотетии и уметь применять их при решении задач;
* уметь решать задачи на плоскости методами стереометрии;
* уметь применять формулы объемов при решении задач;
* находить объем параллелепипеда и тетраэдра, заданных координатами своих вершин;
* задавать прямую в пространстве;
* находить расстояние от точки до плоскости в системе координат;
* находить расстояние между скрещивающимися прямыми, заданными в системе координат;
* применять математические знания к исследованию окружающего мира (моделирование физических процессов, задачи экономики).

Методические указания по выполнению практических занятий содержат теоретические основы, которыми студенты должны владеть перед проведением работ; рекомендации по самостоятельному выполнению заданий работ.

Практические занятия следует проводить по мере прохождения студентами теоретического материала в следующей последовательности:

- вводная беседа, кратко напоминаются теоретические вопросы темы, разъясняется сущность, цель, методика выполнения работы;

- самостоятельное выполнение заданий работы;

- обработка результатов проделанной работы, оформление отчета;

- защита практического занятия в письменной форме по методике проведения и результатам проделанной работы.

Обязательная аудиторная нагрузка по практическим занятиям приведена в таблице:

|  |  |
| --- | --- |
| Название практического занятия | Коли-чество часов |
| Практическое занятие №1  Множества и операции над ними | 2 |
| Практическое занятие №2  Комплексные числа и действия с ними | 2 |
| Практическое занятие №3  Свойства корня n-ой степени. Выполнение расчетов с радикалами | 2 |
| Практическое занятие №4  Решение иррациональных уравнений | 2 |
| Практическое занятие №5  Решение показательных уравнений и неравенств | 2 |
| Практическое занятие №6  Свойства логарифмов | 2 |
| Практическое занятие №7  Решение логарифмических уравнений, неравенств и систем | 2 |
| Практическое занятие №8  Основные тригонометрические тождества | 2 |
| Практическое занятие №9  Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства | 2 |
| Практическое занятие №10  Решение тригонометрических уравнений, неравенств и систем | 2 |
| Практическое занятие №11  Производные основных элементарных функций | 2 |
| Практическое занятие №12  Производные сложной и обратной функции | 2 |
| Практическое занятие №13  Исследование функции с помощью производной | 2 |
| Практическое занятие №14  Неопределенный интеграл и первообразная | 2 |
| Практическое занятие №15  Вычисление площадей плоских фигур и объемов тел вращения с помощью интеграла | 2 |
| Практическое занятие №16  Текстовые задачи | 2 |
| Практическое занятие №17  Преобразование графиков степенной и показательной функции | 2 |
| Практическое занятие №18  Преобразование графиков тригонометрической и логарифмической функции | 2 |
| Практическое занятие №19  Решение комбинаторных задач | 2 |
| Практическое занятие №20  Вычисление вероятностей. Прикладные задачи. | 2 |
| Практическое занятие №21  Закон распределения и числовые характеристики дискретной случайной величины | 2 |
| Практическое занятие №22  Теория граф | 2 |
| Практическое занятие №23  Исследования математических объектов с использованием прикладных программам | 2 |
| Практическое занятие №24  Основные приемы решения уравнений, неравенств и систем | 2 |
| Практическое занятие №25  Уравнения и неравенства с параметрами | 2 |
| Практическое занятие №26  Уравнения и неравенства, содержащих переменную под знаком модуля | 2 |
| Практическое занятие №27  Перпендикуляр и наклонная к плоскости | 2 |
| Практическое занятие №28  Взаимное расположение прямых и плоскостей | 2 |
| Практическое занятие №29  Многогранники. Сечения многогранников | 2 |
| Практическое занятие №30  Вычисление площадей и объемов многогранников | 2 |
| Практическое занятие №31  Тела вращения. Сечения | 2 |
| Практическое занятие №32  Вычисление площадей и объемов фигур в пространстве | 2 |
| Практическое занятие №33  Действия над векторами, заданными координатами | 2 |
| Практическое занятие №34  Векторное уравнение прямой и плоскости | 2 |

Нагрузка на внеаудиторную самостоятельную работу студентов (оформление отчета - написание выводов, подготовка к защите работы) – *50*% от аудиторной нагрузки.

**Общие требования для студентов при выполнении**

**практических занятий**

1. Перед выполнением практического занятия необходимо повторить теоретический материал, используя рекомендованную литературу, конспект лекций и теоретическую часть работы.
2. Студенты обязаны иметь при себе линейку, карандаш*,* тетрадь для выполнения практического занятия.
3. Отчеты по практическим занятиям оформляются аккуратно и должны включать в себя следующие пункты:
   * название работы и ее цель;
   * описание этапов выполнения работы (решение примеров, уравнений, неравенств, систем, текстовых задач, построение графиков, геометрические построения).
   * вывод.
4. Если отчет по работе не сдан до выполнения следующей работы по неуважительной причине, оценка за работу снижается.

**Система оценивания практических занятий**

При оценивании выполнения практического занятия учитываются следующие показатели:

- качество выполнения задания (выполнение работы в соответствии с заданием, правильность результатов работы);

- качество оформления отчета по работе (оформление отчета в соответствии с требованиями методических рекомендаций, правильность и четкость формулировки ответов по результатам работы).

Каждый показатель оценивается по 5-ти бальной шкале, за работу выставляется средний балл по всем показателям.

Отметкой «5» ставится в следующих случаях:

• работа выполнена полностью;

• в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;

• в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, которая не является следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится в следующих случаях:

• работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);

• допущены одна ошибка или есть два – три недочёта в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работ не являлись специальным объектом проверки).

Отметка «3» ставится, если:

• допущено более одной ошибки или более двух – трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но учащийся обладает обязательными умениями по проверяемой теме.

Отметка «2» ставится, если:

• допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не обладает обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Отметка «1» ставится в случае: полного незнания изученного материала, отсутствия элементарных умений и навыков.

**Практическое занятие №1**

**«Множества и операции над ними»**

**Цель**: закрепить практические навыки задания множеств, выполнения операций над множествами.

**Оборудование**: тетрадь для выполнения практического занятия, ручка, карандаш.

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1. Повторите теоретические положения по теме. 2. Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д. 3. Выполните задание, согласно своего варианта. |

**Теоретическая часть**

Рассмотрим некоторые операции над множествами.

1 Пересечение множеств

Пусть даны два множества: А={a; b; c; d} иB={c; d; e}.образуем новое множество Р, состоящее из всех элементов, принадлежащих одновременно и множеству А, и множеству В, т.е. Р={c;d}. Тогда говорят, что множество Р является пересечением множеств А и В.

Определение 1.

Пересечением множеств А и В называется множество, состоящее их всех тех и только тех элементов, которые принадлежат множествам А и В одновременно.

Символически пересечение множеств А и В обозначается так: А∩В, где символ ∩ - знак пересечения множеств. Используя характеристическое свойство, определение 1.4 можно записать следующим образом:

Р=А∩В= {x ⎪x∈A и x∈B}={x ⎪ x∈A ∧ x∈B}. (1)

Таким образом, (1) есть характеристическое свойство пересечения двух множеств.

Союз “и” иногда заменяют фигурной скобкой, и тогда (1) будет иметь вид:

 (2)

Для обозначения одновременной принадлежности множеству А и множеству В используется также знак ∧ (конъюнкция, или логическое “и”):

x∈A∩B ⇒ x∈A ∧ x∈B (2а)

Читаются выражения (2) и (2а) одинаково: если х принадлежит пересечению множеств А и В, то х принадлежит как множеству А, так и множеству В.

Если мы имеем ситуацию, когда х не принадлежит пересечению множеств А и В, то это означает, что х не принадлежит или множеству А, или множеству В.

Символически это может быть записано так:

 (3)

где квадратная скобка заменяет союз “или”.

В символической записи союз “или” может быть заменен также знаком ∨ (дизъюнкция, логическое “или”):

х∉А∩В ⇒ х∉А ∨ х∉В. (3а)

Читаются выражения (3) и (3а) одинаково: если х не принадлежит пересечению множеств А и В, то х не принадлежит или множеству А, или множеству В.

Графическая иллюстрация вариантов пересечения двух множеств приведена на рис. 7÷10 (пересечение заштриховано).

А

Р

В

U

А

Р=∅

В

U

А

U

Р=B

U

Р=A=B

рис. 1 рис. 2 рис. 3 рис. 4

2.Объединение множеств

Множества А и В входят в их объединение только один раз. Это вполне соответствует толкованию множества, принятому в математике: ни один элемент не может содержаться в множестве несколько раз.

Определение 2.

Объединением двух множеств А и В называется такое множество С, которое состоит из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств А или В.

Символически объединение двух множеств А и В обозначается так:

А ∪ В, где ∪ - символ объединения множеств. Определение 1.5 можно записать с помощью характеристического свойства:

С= А ∪ В={x⎪ x∈A или x∈B}. (4)

Союз “или” иногда заменяют квадратной скобкой

 (5)

а также знаком дизъюнкции

х ∈А ∪ В ⇒ х∈А ∨ х∈В. (5а)

Читаются эти знаки одинаково: если элемент х принадлежит объединению двух множеств А и В, то он принадлежит множеству А или множеству В.

Если же элемент х не принадлежит объединению множеств А и В, то он не принадлежит ни множеству А, ни множеству В. Символически это может быть записано так:

 (6)

или

x ∉A∪B ⇒ x∉A ∧ x∉B. (6а)

Графически варианты объединения двух множеств показаны на рис. 11÷14 (объединение заштриховано).

U

С=A=B

А

U

B

А

В

U

А

В

U

рис. 5 рис. 6 рис. 7 рис. 8

Отметим некоторые очевидные свойства операции объединения двух множеств:

А∪А=А, А∪∅=А, А∪U=U. (7)

**3. Разность множеств**

Разностью двух множеств А и В называется множество, состоящее из всех тех и только

тех элементов, которые принадлежат множеству А и не принадлежат множеству В.

Символически разность двух множеств обозначается так:

А В, где символ является знаком разности для множеств. С помощью характеристического свойства запишем определение 1.6 следующим образом:

C=A B={x ⎪ x∈A и x∉B} (8)

Или 

 (9)

а также x∈AB ⇒ x∈A ∧ x∉B. (9а)

Пример 1.

Если K1={1; 3; 5; 7; 9}, K2={5; 7; 1}, то K3=K1K2={3; 9}, K4=K2K1=∅.

Графическое представление вариантов разности двух множеств А и В показано на рис. 15÷18, где множество А В заштриховано.

U

A\B=Ø

A=B

А

В

U

А

В

U

А

U

B

рис. 9 рис. 10 рис. 11 рис. 12

**4 Дополнение к множеству**

Определение 3

Пусть В ⊂ А. Множество всех элементов множества А, не принадлежащих множеству В, называют дополнением к множеству В и обозначают  или .

Если ясно, о каком множестве идёт речь, то индекс А опускается и пишут  или .

Определение 4

Пусть А – некоторое множество, являющееся частью универсального (основного) множества U. Дополнением множества А называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов их множества U, которые не принадлежат А. Его обозначают  или .

Это определение может быть записано в виде:

 = {x ⎪ x∉A}. (10)

Графически дополнения (соответственно определениям 1.7 и 1.8) изображены на рис. 19 и 20 соответственно, на которых дополнения заштрихованы.

**Ход занятия**

1.Запишите название, номер практического занятия и ее цель.

2.Укажите номер задания.

3.Выполните задания.

**1 вариант**

1. Пусть А – множество корней уравнения

. Перечислите элементы множеств:

а) А

2. Перечислите элементы каждого из множеств:

а) *А* = {*x*:*x*  ***N*** , -2  ≤ *x*  ≤  5};

    б) *В* = {*х*: *x*  ***Z*** , |*x* |  <  3};

    в) *С* = {*х*:*x*  ***N*** , 2*х*2+ 5*х –*3 = 0}.

3.Даны множества: А=. Найдите А

4.Даны два множества: А – множество стран и В – множество материков. Задайте соответствие между этими множествами с помощью стрелок. А=, В=.

**2 вариант**

1. Пусть А – множество корней уравнения

. Перечислите элементы множеств:

а) А

2. Перечислите элементы каждого из множеств:

а)  *А* = {*х*: *x*  ***Z***, |*x* | = 4};

    б) *В* = {*х* : *x*  ***N*** , –2  <  *х*  ≤  5};

    в) *С* = {*х* :  *x*  ***Q*** ,*x*2+ 3*х*+ 4 = 0}.

3.Даны множества: А=. Найдите А

4.Даны два множества: А – множество месяцев года и В – множество времён года. Задайте соответствие между этими множествами с помощью стрелок.

**3 вариант**

1. Пусть А – множество корней уравнения

. Перечислите элементы множеств:

а) А

2. Перечислите элементы каждого из множеств:

а) *А* = {*х:  x*  ***Z***, –2  ≤ *x* ≤  3};

    б) *В* = {*х*: *x*  ***N*** , (5*х*+ 6)(*х –*4) = 0};

    в) *С* = {*х* : *x*  ***N*** , |*x*|  = 7}.

3.Даны множества: А=. Найдите А

4.Даны два множества: А – множество стран и В – множество материков. Задайте соответствие между этими множествами с помощью стрелок. А=, В=.

**4 вариант**

1. Пусть А – множество корней уравнения

. Перечислите элементы множеств:

а) А

2. Перечислите элементы каждого из множеств:

а) *А* = {*х* :  *х*  ***N***,  *х*  ≤  4};

    б) *В* = {*х* :  *х*  ***Z***, (*х*+ 1)(–*х –*3) = 0};

    в) *С* = {*х*:  *х*  ***N***, | *х* | = 5}.

3.Даны множества: А=. Найдите А

4. Даны два множества: А – множество месяцев года и В – множество времён года. Задайте соответствие между этими множествами с помощью стрелок.

Критерии оценивания: №1 - 6 баллов, №2 - 3 балла, №3 - 1 балл, №4 - 1 балл.

Итого 11 баллов:11 баллов – оценка «5», 8 баллов – оценка «4», 5 баллов – оценка «3», 4 балла и менее – оценка «2».

**Практическое занятие №2**

**«Комплексные числа и действия с ними»**

**Цель**: сформировать умения и навыки выполнять арифметические действия с комплексными числами.

**Оборудование**: тетрадь для выполнения практического занятия, ручка, калькулятор..

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1.Повторите теоретические положения по теме.  2.Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д.  3.Выполните задание, согласно своего варианта. |

**Теоретическая часть**

Комплексное число – это выражение вида (1)

,

где x, y – вещественные числа, а  – мнимая единица. Первое из вещественных чисел, x, называется вещественной (действительной) частью комплексного числа (используется обозначение ); второе, y, - мнимой частью (). Выражение (1) называют алгебраической формой записи комплексного числа.

Числом, сопряженным к , называют число вида . Используя формулу разности квадратов, получаем, что . Можно доказать, что корнями квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом являются два сопряженных комплексных числа.

Пример 1. Решить уравнение .

Решение. Дискриминант данного уравнения:  меньше нуля, но теперь мы можем воспользоваться мнимой единицей:

, т.е. ; .

Справедливы следующие правила арифметических действий над комплексными числами  и :

1)  (осуществляется сложение или вычитание алгебраических двучленов и приведение подобных);

2)  (осуществляется перемножение алгебраических двучленов и приведение подобных с учетом того, что );

3)  (эта операция возможна только в случае, когда ).

Пример 2. Вычислить и указать вещественную и мнимую части полученного комплексного числа.

Решение. Действуя в соответствии с правилами получаем:

;

поэтому , .

Тригонометрическая форма комплексного числа. Каждому комплексному числу вида (1) можно поставить в соответствие точку M(x;y) на декартовой плоскости (при этом на оси OX располагаются вещественные числа , а на оси OY – чисто мнимые числа ).

Модулем комплексного числа назовем длину отрезка  (или расстояние от начала координат до точки M), т.е. . Аргументом комплексного числа () назовем угол, который вектор  образует с положительным направлением оси OX. Главное значение аргумента, которое, как правило, используется при осуществлении действий с комплексными числами, удовлетворяет условию . При этом выражение вида

 (2)

называется тригонометрической формой записи комплексного числа.

Преобразуем (1)



и, сравнивая с (1.2), получаем, что аргумент z можно найти, решив систему

 или  (3)

Пример 3. Вычислить: a) ; b) .

Решение. В задании a), чтобы воспользоваться формулой Муавра, необходимо представить комплексное число в тригонометрической форме. Имеем: ;  и , т.е.  (так как соответствующая точка лежит во второй четверти). Следовательно,  и . Учитывая что  и используя свойства тригонометрических функций, получаем:

.

В задании b) тригонометрическая форма заданного числа имеет вид  (|z|=1), поэтому

, k=0,1,2.

Выписываем три искомых корня:

;

;

.

**Ход работы**

1.Запишите название, номер практического занятия и его цель.

3.Укажите номер задания.

4.Выполните задания: каждый верно выполненный пример оценивается по 1 баллу. Итого: 11 баллов.

Критерии оценивания: 11-10 баллов – оценка «5», 9-8 баллов – оценка «4», 7-6 баллов – оценка «3», 5 баллов и менее – оценка «2».

Задание 1. Вычислить, выписать вещественную и мнимую части полученных комплексных чисел.

1)  2)  3) 

4) 

Задание 2. Запишите предложенные комплексные числа в тригонометрической форме:

1) ; 2) ; 3) ; 4) 

Задание 3. Найти все корни уравнений:

1) ; 2) ; 4) ;

**Практическое занятие №3**

**«Свойства корня n-ой степени. Выполнение расчетов с радикалами»**

***Цель :*** сформировать умения и навыки по преобразованию алгебраических,

рациональных, иррациональных, степенных выражений.

**Оборудование**: тетрадь для выполнения практического занятия, раздаточный материал «Свойства корней n-й степени», ручка.

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1.Повторите теоретические положения по теме.  2.Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д.  3.Выполните задание, согласно своего варианта. |

**Теоретический материал**

Корень n – степени: , n - показатель корня, а – подкоренное выражение

Если n – нечетное число, то выражение имеет смысл при а

Если n – четное число, то выражение имеет смысл при

Арифметический корень:

Корень нечетной степени из отрицательного числа:

СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

=,a – основание степени, n – показатель степени

Свойства:

1. При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются, а основание остается неизменным.
2. При делении степеней с одинаковыми основаниями показатели вычитаются, а основание остается неизменным.
3. При возведении степени в степень показатели перемножаются.
4. При возведении в степень произведения двух чисел, каждое число возводят в эту степень, а результаты перемножают.
5. Если в степень возводят частное двух чисел, то в эту степень возводят числитель и знаменатель, а результат делят друг на друга.
6. Если

СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

1. По определению:

Пример 1. Упростите выражение http://www.e-biblio.ru/xbook/new/xbook311/files/Eqn_primer_01-01.gif.

Решение

Применим свойства степеней (умножение степеней с одинаковым основанием и деление степеней с одинаковым основанием): http://www.e-biblio.ru/xbook/new/xbook311/files/Eqn_primer_01-02.gif.

Ответ: 9m7 .

Пример 2.Сократить дробь: http://free.megacampus.ru/xbookM0005/files/Form_07_011.gif

Решение. Так область определения дроби http://free.megacampus.ru/xbookM0005/files/Form_07_012.gif все числа, кроме х ≠ 1 и х ≠ -2.Вместе с тем http://free.megacampus.ru/xbookM0005/files/Form_07_013.gif.Сократив дробь, получим http://free.megacampus.ru/xbookM0005/files/Form_07_014.gif

.Область определения полученной дроби: х ≠ -2, т.е. шире, чем область определения первоначальной дроби. Поэтому дроби http://free.megacampus.ru/xbookM0005/files/Form_07_015.gif и http://free.megacampus.ru/xbookM0005/files/Form_07_016.gif равны при х ≠ 1 и х ≠ -2.

Пример 3.Сократить дробь: http://free.megacampus.ru/xbookM0005/files/Form_07_024.gif

Пример 4.Упростить: http://free.megacampus.ru/xbookM0005/files/Form_07_025.gif

Пример 5.Упростить: http://free.megacampus.ru/xbookM0005/files/Form_07_026.gif

Пример 6. Упростить: http://free.megacampus.ru/xbookM0005/files/Form_07_027.gif

Пример 7. Упростить: http://free.megacampus.ru/xbookM0005/files/Form_07_028.gif

**Ход занятия**

1.Запишите название, номер практического занятия и ее цель.

2.Укажите номер задания.

3.Выполните задания.

|  |
| --- |
| 1. ctepenA161c |
| 2. ctepenA145c |
| 3. ctepenA133c |
| 4. ctepenA120c |
| 5. ctepenA150c |
| 6. ctepenA122c |
| 7. ctepenA166c |
| 8. Упростить:  ; |
| 9. Замените арифметические корни степенями с дробным показателем  , , |
| 10. Найдите значение выражения: |
| *11.* https://videouroki.net/videouroki/conspekty/algebra11/4-prieobrazovaniie-vyrazhienii-sodierzhashchikh-radikaly.files/image017.jpg |
| *12.* https://videouroki.net/videouroki/conspekty/algebra11/4-prieobrazovaniie-vyrazhienii-sodierzhashchikh-radikaly.files/image018.jpg |

Критерии оценивания:

№1- №7 -1 балл, №8 - №10 -2 балла, №11 - №12 – 3 балла.

Итого 19 баллов:19 баллов – оценка «5», 15 баллов – оценка «4», 9 баллов – оценка «3», 8 баллов и менее – оценка «2».

**Практическое занятие №4**

**«Решение иррациональных уравнений»**

***Цель:*** сформировать умения и навыки решения иррациональных уравнений.

**Оборудование**: тетрадь для выполнения практического занятия, раздаточный материал «Методы решения иррациональных уравнений», ручка.

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1.Повторите теоретические положения по теме.  2.Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д.  3.Выполните задание, согласно своего варианта. |

**Теоретический материал**

Иррациональным называется уравнение, в котором неизвестное (переменная) содержится под знаком корня или под знаком операции возведения в рациональную (дробную) степень.

        Для решения иррациональных уравнений обычно используются следующие приемы:

1) «уединение» корня в одной из частей уравнения и возведение в соответствующую степень;

2) введение новой переменной;

3) сведение к системе уравнений;

4) применение свойств функций, входящих в уравнение.

 Следует помнить, что при решении иррациональных уравнений необходима проверка всех найденных корней путем их подстановки в исходное уравнение или нахождение ОДЗ и следующий анализ корней (при решении методом приведения к равносильной смешанной системе уравнений и неравенств необходимость в этом отпадает).Простейшим иррациональным уравнением является уравнение вида:

                                                   =g(x),                                  (\*)

при решении, которого важную роль играет четность или нечетность n.

         Если n - нечетное, то уравнение (\*) равносильно уравнению

f(x) =(g(x))n .

         Если n - четное, то, так как корень считается арифметическим,  необходимо учитывать ОДЗ (область допустимых значений): f(x. Уравнение (\*) в этом случае равносильно системе:

 Пример 1. Решить уравнение 

Решение. Так как в данном примере n=3 - нечетное, то после возведения обеих частей уравнения в третью степень получим равносильное данному уравнение:

.

Ответ: .

    Иногда встречаются уравнения вида , которые решаются следующим образом:

n - нечетное

n - четное  или

 Пример 2. Решить уравнение .

Решение. Запишем данное уравнение в виде:  . Возводя обе части в квадрат и учитывая, что x+1 ,  получим уравнение 2х+6=х+1, решение которого есть

х=-5 – не удовлетворяет выписанному условию. Значит, данное уравнение не имеет решений.

Ответ: нет решений

Иногда иррациональное уравнение содержит несколько радикалов. В этом случае для избавления от радикалов уравнение приходится возводить в соответствующую степень несколько раз. При этом предварительно уединяют один из радикалов так, чтобы обе части уравнения стали неотрицательными. Особое внимание следует обратить на правильное нахождение ОДЗ.

Введение новой переменной в ряде случаев позволяет перейти от иррационального уравнения к рациональному уравнению.

Пример 5. Решить уравнение

Решение. Возведение данного уравнения в квадрат привело бы к уравнению четвертой степени, что нерационально. Поэтому запишем уравнение в виде

и введем «новую» переменную:

Получим  .

Вернемся к «старым» переменным  .

Второе из полученных уравнений решений не имеет,

а решения первого есть числа  .

Ответ: .

**Ход занятия**

1.Запишите название, номер практического занятия и ее цель.

2.Укажите вариант, номер задания.

3.Выполните задания

Вариант 1

1. Возведи обе части в квадрат:

а) 

б) 

в) 

2. Выполни замену:



3. Разложи на множители:



4. Реши любым способом:



Вариант 2

1. Возведи обе части в квадрат:

а) 

б) 

в) 

2. Выполни замену:



3. Разложи на множители:



4. Реши любым способом:



Критерии оценивания:

№1 - 3 балла, №2 -1 балл, №3 – 2 балла, №4 – 3 балла.

Итого 9 баллов:9 баллов – оценка «5», 6 баллов – оценка «4», 5 баллов – оценка «3», 4 балла и менее – оценка «2».

**Практическое занятие №5**

**«Решение показательных уравнений и неравенств»**

***Цель :***сформировать умения и навыки основных приемов решения показательных уравнений и неравенств.

**Оборудование**: тетрадь для выполнения практического занятия, раздаточный материал «Методы решения показательных уравнений и неравенств», ручка.

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1.Повторите теоретические положения по теме.  2.Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д.  3.Выполните задание, согласно своего варианта. |

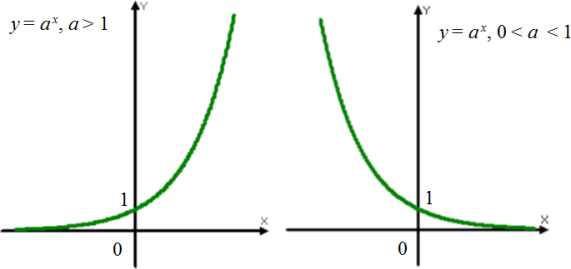
**Теоретический материал**

Функцию вида *y* = *ax*, где *a* > 0 и *a* ≠ 1, называют *показательной функцией*.

Основные *свойства показательной функции* *y* = *ax*:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Свойство | *a* > 1 | 0 < *a* < 1 |
| Область определения | *D*(*f*) = (-∞; +∞) | *D*(*f*) = (-∞; +∞) |
| Область значений | *E*(*f*) = (0; +∞) | *E*(*f*) = (0; +∞) |
| Монотонность | Возрастает | Убывает |
| Непрерывность | Непрерывная | Непрерывная |

График показательной функции

[](http://yourtutor.info/wp-content/uploads/2012/02/Exponential-function.png)

Решение показательных уравнений. *Показательными* называются уравнения, в которых неизвестная переменная находится только в показателях каких-либо степеней. Для решения *показательных уравнений* требуется знать и уметь использовать следующую несложную теорему: Показательное уравнение af(x) = ag(x) (где a > 0, a ≠ 1) равносильно уравнению f(x) = g(x).

Пример 1. Решите уравнение:[2^{2x+1}-5\cdot 2^x-88=0.](http://yourtutor.info/wp-content/uploads/2012/02/cace76599531b5e581ee8731e76708cb.png)

Решение: используем приведенные выше формулы и подстановку:

[~t=2^x.](http://yourtutor.info/wp-content/uploads/2012/02/e070a042fee5a83390a5e7d78fc16735.png)

Уравнение тогда принимает вид:

[~2t^2-5t-88 = 0.](http://yourtutor.info/wp-content/uploads/2012/02/95d28ff32318653442290058082e700d.png)

Дискриминант полученного квадратного уравнения положителен:

\[ D = b^2-4ac = 5^2-4\cdot 2\cdot (-88) = 729 = 27^2>0. \]

Это означает, что данное уравнение имеет два корня. Находим их:

\[ \left[\begin{array}{l} 2^x = 8, \\ 2^x = -5,5. \\ \end{array}\right. \]  \[ \left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-5)+\sqrt{729}}{2\cdot 2}} = 8, \\ t_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-5)-\sqrt{729}}{2\cdot 2}} = -5,5. \\ \end{array}\right. \]

Переходя к обратной подстановке, получаем:

Второе уравнение корней не имеет, поскольку показательная функция строго положительна на всей области определения. Решаем второе:

\[ 2^x = 8\Leftrightarrow 2^x=2^3. \]

С учетом сказанного в теореме 1 переходим к эквивалентному уравнению: *x* = 3. Это и будет являться ответом к заданию.

[3^{x-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{3-x}=\sqrt{\frac{1}{9^{4-x}}}+207.](http://yourtutor.info/wp-content/uploads/2012/02/786b5c147622bc2633c5898b3586d3f4.png)Ответ: *x* = 3.

Пример 2. Решите уравнение:

Решение: ограничений на область допустимых значений у уравнения нет, так как подкоренное выражение имеет смысл при любом значении *x* (показательная функция *y* = 94*-x* положительна и не равна нулю).

Решаем уравнение путем равносильных преобразований с использованием правил умножения и деления степеней:

[3^{x-1}-3^{x-3}=\sqrt{3^{2x-8}}+207\Leftrightarrow](http://yourtutor.info/wp-content/uploads/2012/02/a0d90734970c3036f1363634b8133d3e.png)

[\Leftrightarrow 3^{x-1}-3^{x-3}-3^{x-4}=207\Leftrightarrow](http://yourtutor.info/wp-content/uploads/2012/02/01f2b32b1f88fd21ad3535c31c60b14c.png)

[3^{x}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{27}-\frac{1}{81}\right)=207\Leftrightarrow](http://yourtutor.info/wp-content/uploads/2012/02/c0e42e0cd426b35c772fc0c8401fcac4.png)

[\Leftrightarrow 3^x\cdot\frac{23}{81}=207\Leftrightarrow 3^x=3^6\Leftrightarrow x=6.](http://yourtutor.info/wp-content/uploads/2012/02/84a3ecdc39efcfe96decd2b13ec6bf4a.png)

Последний переход был осуществлен в соответствии с теоремой 1.

Ответ: *x*= 6*.*

**Ход занятия**

1.Запишите название, номер практического занятия и ее цель.

2.Укажите вариант, номер задания.

3.Выполните задания.

**Вариант 1.**

1.Постройте в одной координатной плоскости графики функций 2.Решите уравнение: а) ; б) ; в) .

3.Решите неравенство: а) ; б) .

**Вариант 2.**

1.Постройте в одной координатной плоскости графики функций .

2.Решите уравнение: а) ; б) ; в) .

3.Решите неравенство: а) ; б) .

Критерии оценивания:

№1 -3 балла, №2 - 3 балла, №3 – 4 балла.

Итого 10 баллов:10 баллов – оценка «5», 8 баллов – оценка «4», 5 баллов – оценка «3», 4 балла и менее – оценка «2».

**Практическое занятие №6**

**«Свойства логарифмов»**

***Цель:*** сформировать умения и навыки нахождения значений логарифма по произвольному основанию.

**Оборудование**: тетрадь для выполнения практической работы, раздаточный материал «Свойства логарифмов», ручка.

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1.Повторите теоретические положения по теме.  2.Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д.  3.Выполните задание, согласно своего варианта. |

**Теоретический материал**

Определение. Логарифмом числа b  по основанию a называют такую степень, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b.

      Другими словами, логарифм числа b по основанию a – это такое число x, которое *является решением уравнения ax* *= b*

      Доказательство того, что решение уравнения существует и единственно, выходит за рамки школьной программы.

      Для логарифма числа b по основанию a используется обозначение:

log*ab*

      Таким образом, для всех действительных чисел  a и b, удовлетворяющих условиям a > 0; a ≠ 1; b > 0справедливо равенство

alogab= b,

которое часто называют основным логарифмическим тождеством.

      Замечание. Обратим особое внимание на то, что при решении уравнения *ax* *=b* мы ищем *показатель степени,*а при решении уравнения

xa= b.

мы ищем *основание степени*, которое вычисляется по формуле

begin mathsize 12px style x equals b to the power of 1 over a end exponent end style

и в случае, когда a – натуральное число, является *корнем натуральной степени из числа* b.

*Примеры.*

1. log2 - log54 = log = log3= -3log3 = -3;

2. log2 + log8 = log(2= log16 = log4 = 2log4 = 2.

3. log8 + 3log = log8 + log= log = log = log9= log= log3 =6log3 = 6.

4. log5 - log35 + log56 =log +log56 =log = log8 = log2=3log2 =3.

**Ход занятия**

1.Запишите название, номер практического занятия и ее цель.

2.Укажите вариант, номер задания.

3.Выполните задания.

|  |  |
| --- | --- |
| **Вариант 1**  1. Вычислите:  1) ; 2) ;  3) ; 4) ; 5) ;  6) .  2. Выразите данный логарифм через натуральный и вычислите на микрокалькуляторе с точностью до 0,01  1) ; 2) .  3. Выразите  через логарифм по основанию 2.  4. Найти значение выражения:  1) ;  2) | **Вариант 2**  1. Вычислите:  1) ; 2) ;  3) ; 4) ; 5) ;  6) .  2. Выразите данный логарифм через десятичный и вычислите на микрокалькуляторе с точностью до 0,01  1) ; 2) .  3. Выразите  через логарифм по основанию 3.  4. Найти значение выражения:  1) ;  2) |
| **Вариант 3**  1. Вычислите:  1) ; 2) ;  3) ; 4) ; 5) ;  6) .  2. Выразите данный логарифм через натуральный и вычислите на микрокалькуляторе с точностью до 0,01  1) ; 2) .  3. Выразите  через логарифм по основанию 2.  4. Найти значение выражения:  1) ;  2) | **Вариант 4**  1. Вычислите:  1) ; 2) ;  3) ; 4) ; 5) ;  6) .  2. Выразите данный логарифм через десятичный и вычислите на микрокалькуляторе с точностью до 0,01  1) ; 2) .  3. Выразите  через логарифм по основанию 3.  4. Найти значение выражения:  1) ;  2) |

Критерии оценивания:

№1 - 6 баллов, №2 -2 балла, №3 – 2 балла, №4 -4 балла.

Итого 14 баллов:14 баллов – оценка «5», 10 баллов – оценка «4», 8 баллов – оценка «3», 7 баллов и менее – оценка «2».

**Практическое занятие №7**

**«Решение логарифмических уравнений и неравенств, систем»**

***Цель:*** сформировать умения и навыки при решении логарифмических уравнений и неравенств, систем.

**Оборудование**: тетрадь для выполнения практической работы, раздаточный материал «Методы решение логарифмических уравнений и неравенств, систем», ручка.

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1.Повторите теоретические положения по теме.  2.Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д.  3.Выполните задание, согласно своего варианта. |

**Теоретический материал**

Уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифма или (и) в его основании, называется логарифмическим уравнением.

Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида

|  |  |
| --- | --- |
| log*a* *x* = *b*. | (1) |

Утверждение 1. Если *a* > 0, *a* ≠ 1, уравнение (1) при любом действительном *b* имеет единственное решение *x* = *ab*.

Пример 1. Решить уравнения:

a) log2 *x* = 3,       b) log3 *x* = -1,       c) http://www.math.md/school/praktikum/logr/log0x.gif

Решение.  
a) *x* = 23 или *x* = 8;     b) *x* = 3-1 или *x* = 1/3;     c) http://www.math.md/school/praktikum/logr/log1x.gif или *x* = 1.

Уравнение log*a* *f*(*x*) = log*a* *g*(*x*)     (*a* > 0, *a* ≠ 1) равносильно одной из систем (очевидно, выбирается та система, неравенство которой решается проще)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| http://www.math.md/school/praktikum/logr/t0x.gif | *f*(*x*) = *g*(*x*), |  | http://www.math.md/school/praktikum/logr/t0x.gif | *f*(*x*) = *g*(*x*), |
| *f*(*x*) > 0, | *g*(*x*) > 0. |

Уравнение log*h*(*x*) *f*(*x*) = log*h*(*x*) *g*(*x*) равносильно одной из систем

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| http://www.math.md/school/praktikum/logr/t0x.gif | *f*(*x*) = *g*(*x*), |  | http://www.math.md/school/praktikum/logr/t0x.gif | *f*(*x*) = *g*(*x*), |
| *h*(*x*) > 0, | *h*(*x*) > 0, |
| *h*(*x*) ≠ 1, | *h*(*x*) ≠ 1, |
| *f*(*x*) > 0, | *g*(*x*) > 0. |

Нужно подчеркнуть, что в процессе решения логарифмических уравнений часто используются преобразования, которые изменяют область допустимых значений (*ОДЗ*) исходного уравнения. Следовательно, могут появиться "чужие" решения или могут быть потеряны решения. Например, уравнения

*f*(*x*) = *g*(*x*)   и   log*a* *f*(*x*) = log*a* *g*(*x*)

или

log*a* [*f*(*x*)·*g*(*x*)] = *b*   и   log*a* *f*(*x*) + log*a* *g*(*x*) = *b*

вообще говоря, неравносильны (*ОДЗ* уравнений справа уже).

Следовательно, при решении логарифмических уравнений полезно использовать равносильные преобразования. В противном случае, проверка полученных решений является составной частью решения. Более того, необходимо учитывать и преобразования, которые могут привести к потере корней.

Приведем основные способы решения логарифмических уравнений.

I. Использование определения логарифма

Пример 2. Решить уравнения

|  |  |
| --- | --- |
| a) log2(5 + 3log2(*x* - 3)) = 3, | c) log(*x*- 2)9 = 2, |
| b) http://www.math.md/school/praktikum/logr/log14x.gif | d) log2*x*+ 1(2*x*2 - 8*x* + 15) = 2. |
|  |  |

Решение. a) Логарифмом положительного числа *b* по основанию *a* (*a* > 0, *a* ≠ 1) называется степень, в которую нужно возвести число *a*, чтобы получить *b*. Таким образом, log*ab* = *c*  *b* = *ac* и, следовательно,

5 + 3log2(*x* - 3) = 23

или

3log2(*x* - 3) = 8 - 5,       log2(*x* - 3) = 1.

Опять используя определение, получим

*x* - 3 = 21,     *x* = 5.

Проверка полученного корня является неотъемлемой частью решения этого уравнения:

log2(5 + 3log2(5 - 3)) = log2(5 + 3log22) = log2(5 + 3) = log28 = 3.

Получим истинное равенство 3 = 3 и, следовательно, *x* = 5 есть решение исходного уравнения.

b) Аналогично примеру [a)](http://www.math.md/school/praktikum/logr/logr.html#a)), получим уравнение

http://www.math.md/school/praktikum/logr/logr0x.gif

откуда следует линейное уравнение *x* - 3 = 3(*x* + 3) с решением *x* = -6. Сделаем проверку и убедимся, что *x* = -6 является корнем исходного уравнения.

c) Аналогично примеру [a)](http://www.math.md/school/praktikum/logr/logr.html#a)), получим уравнение

(*x* - 2)2 = 9.

Возведя в квадрат, получим квадратное уравнение *x*2 - 4*x* - 5 = 0 с решениями *x*1 = -1 и*x*2 = 5. После проверки остается лишь *x* = 5.

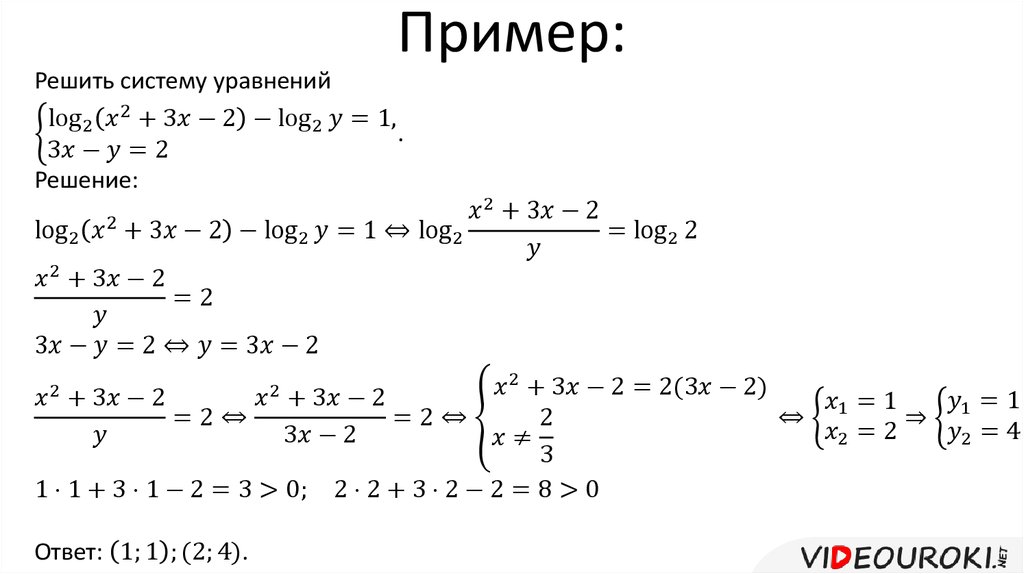
d) Используя определение логарифма, получим уравнение

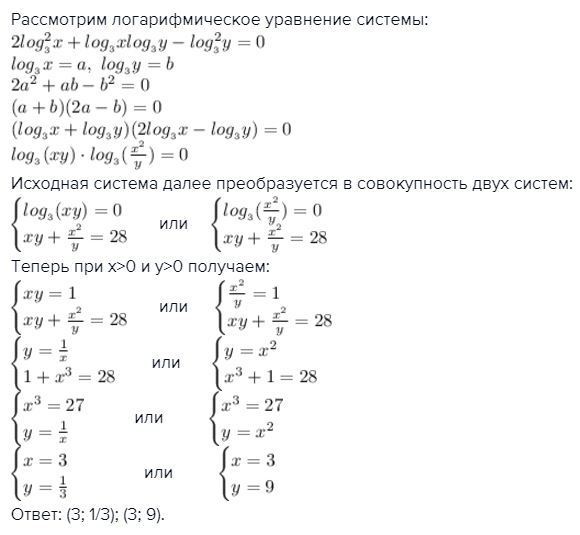
(2*x*2 - 8*x* + 15) = (2*x* + 1)2

или, после элементарных преобразований,

*x*2 + 6*x*-7 = 0,

откуда *x*1 = -7 и *x*2 = 1. После проверки остается *x* = 1.





**Ход занятия**

1.Запишите название, номер практического занятия и ее цель.

2.Укажите вариант, номер задания.

3.Выполните задания.

**Вариант 1**

1.Решите уравнения и неравенства:

1) ;

2) ;

3) ;

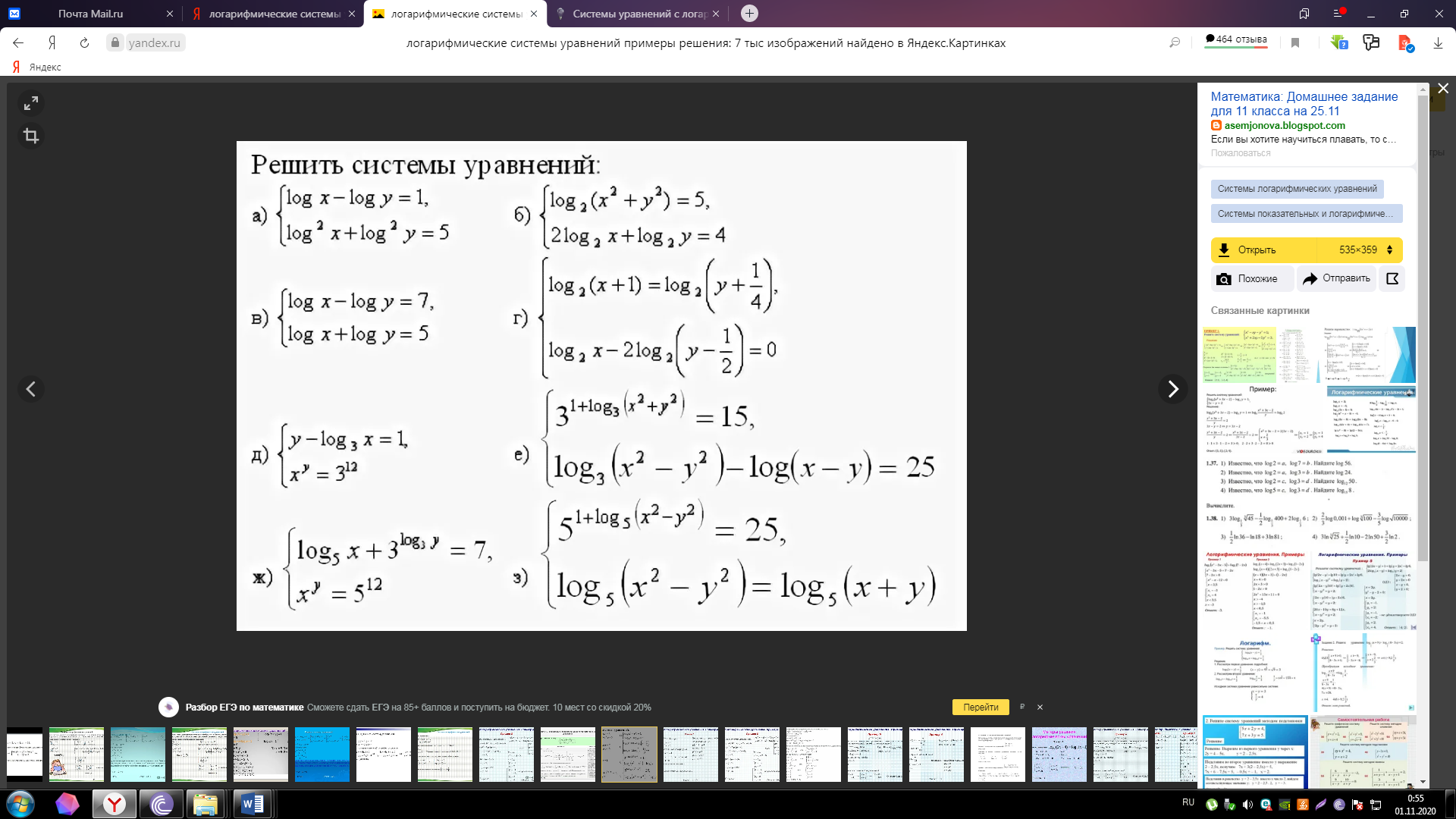
4) ;

5) ;

6) ;

7) ;

8)

9) 

2. Решить графически уравнение:

1) ;

2);

**Вариант 2**

1.Решите уравнения и неравенства:

1) ;

2) ;

3) ;

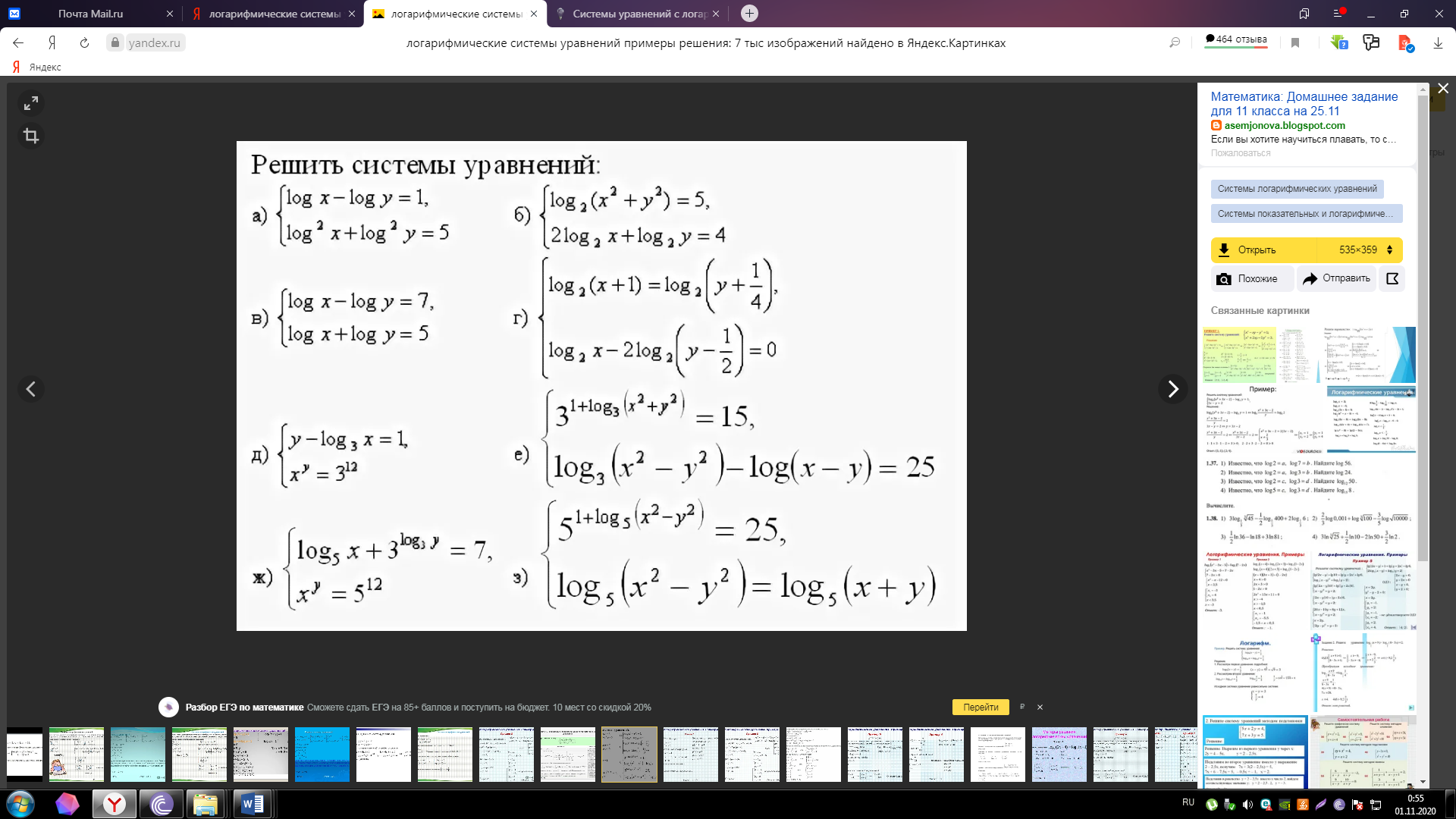
4) ;

5) ;

6) ;

7) .

8)

9) 

2. Решить графически уравнение:

1) ;

2) .

Критерии оценивания:

№1 – 9 баллов, №2 - 4 балла.

Итого 13 баллов:13 баллов – оценка «5», 9 баллов – оценка «4», 7 баллов – оценка «3», 6 баллов и менее – оценка «2»

**Практическое занятие №8**

**«Основные тригонометрические тождества»**

***Цель:*** отработать навыки нахождения тригонометрических функции числового и углового аргумента, решения тригонометрических тождеств.

**Оборудование**: тетрадь для выполнения практического занятия, ручка.

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1.Повторите теоретические положения по теме.  2.Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д.  3.Выполните задание, согласно своего варианта. |

**Теоретический материал**

Основные тригонометрические тождества

* sin² α + cos² α = 1
* tg α · ctg α = 1
* tg α = sin α ÷ cos α
* ctg α = cos α ÷ sin α
* 1 + tg² α = 1 ÷ cos² α
* 1 + ctg² α = 1 ÷ sin² α

Формулы сложения

* sin (α + β) = sin α · cos β + sin β · cos α
* sin (α - β) = sin α · cos β - sin β · cos α
* cos (α + β) = cos α · cos β - sin α · sin β
* cos (α - β) = cos α · cos β + sin α · sin β
* tg (α + β) = (tg α + tg β) ÷ (1 - tg α · tg β)
* tg (α - β) = (tg α - tg β) ÷ (1 + tg α · tg β)
* ctg (α + β) = (ctg α · ctg β + 1) ÷ (ctg β - ctg α)
* ctg (α - β) = (ctg α · ctg β - 1) ÷ (ctg β + ctg α)

Формулы двойного угла

* cos 2α = cos² α - sin² α
* cos 2α = 2cos² α - 1
* cos 2α = 1 - 2sin² α
* sin 2α = 2sin α · cos α
* tg 2α = (2tg α) ÷ (1 - tg² α)
* ctg 2α = (ctg² α - 1) ÷ (2ctg α)

Формулы тройного угла

* sin 3α = 3sin α - 4sin³ α
* cos 3α = 4cos³ α - 3cos α
* tg 3α = (3tg α - tg³ α) ÷ (1 - 3tg² α)
* ctg 3α = (3ctg α - ctg³ α) ÷ (1 - 3ctg² α)

Формулы понижения степени

* sin² α = (1 - cos 2α) ÷ 2
* sin³ α = (3sin α - sin 3α) ÷ 4
* cos² α = (1 + cos 2α) ÷ 2
* cos³ α = (3cos α + cos 3α) ÷ 4
* sin² α · cos² α = (1 - cos 4α) ÷ 8
* sin³ α · cos³ α = (3sin 2α - sin 6α) ÷ 32

**Ход занятия**

1.Запишите название, номер практического занятия и ее цель.

2.Укажите вариант, номер задания.

3.Выполните задания.

|  |  |
| --- | --- |
| **1 вариант** | **2 вариант** |
| 1.Допишите формулу | |
| Основное тригонометрическое тождество а*) 1* | Из основного тригонометрического тождества следует 1+ctg2α=... |
| 2.Упростите выражение: | |
| = … | =… |
| 3.Следствием из основного тригонометрического тождества является формула, выражающая | |
| через : . | *cos α* через : *cos α=…* |
| Тангенсом угла  называется отношение . | Котангенсом угла α называется  c. |
| Из определения tgα,ctgα следует:  . | Соотношение между *tgα* и *cosα*: |
| 4.Преобразуйте выражения: | |
| = … | … |
| 5.На координатной плоскости укажите знаки функции синус: | 5.На координатной плоскости укажите знаки функции косинус: |
| 6.Найдите значения выражений: | |
| … | … |
| 7.Выразите с помощью формул приведения: | |
|  |  |
| 8.Вычислите: | |
| … | … |
| =… | =… |
| 9.Упростите: | |
| … | … |
| … | … |
| 10.Преобразуйте в произведения: | |
| … | … |
| 11.Вычислите: | |
| а)  б)  в)  г) | а)  б)  в)  г) |
| 12. Вычислите значение функций cosα; tgα; ctgα, если: | |
|  |  |
| 13. Упростить выражение: | |
|  |  |
| 14. Докажите тождества: | |
|  |  |

Критерии оценивания:

№1 - №7 - 1 балл, №8 - №9 - 2 балла, №10 -1 балл, №11 - 4 балла, №12 - 2 балла, №13 - 3 балла, №14 -3 балла.

Итого 24 баллов:24 балла – оценка «5», 19 баллов – оценка «4», 15 баллов – оценка «3», 14 баллов и менее – оценка «2»

**Практическое занятие №9**

**«Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства»**

***Цель*:-**отработать навыки нахождения значения обратных тригонометрических функций при решении простейших уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции различными методами;

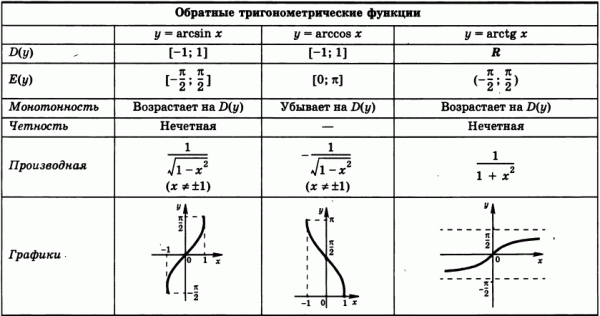
-отработать навыки решения простейшие тригонометрических уравнений и неравенств,

**Оборудование**: тетрадь для выполнения практического занятия, раздаточный материал «Таблица тригонометрических значений», ручка.

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1.Повторите теоретические положения по теме.  2.Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д.  3.Выполните задание, согласно своего варианта. |

**Теоретический материал**

Определение обратных тригонометрических функций



**Тригонометрическими уравнениями** называют уравнения, в которых переменная содержится под знаком тригонометрических функций. К их числу относятся простейшие тригонометрические уравнения, т. е. уравнения вида:

sin x = a, cos x = a, tg x = а, где а — действительное число.

1) если \a\ < 1, то решения уравнения cos x — а имеют вид

х = ±arccos a + 2πп;

2) если \a\ < 1, то решения уравнения sin x = а имеют вид

х = (-1)n arcsin a + πп, или, что то же самое,

х = arcsin a + 2πk, x = π – arcsin a + 2πк;

3) если \а\ > 1, то уравнения cos x = a, sin x = а не имеют решений;

4) решения уравнения tg x = а для любого значения а имеют вид

х = arctg a + πп;

5) частные случаи:

sin x = 0, х = πп; sin x = 1, х =  + 2πn;

sin x = -1, х = - + 2πn;

cos x = 0, х =  + πn;

cos x = 1, х = 2πn; cos x = - 1, х = π + 2πn.

Два тригонометрических выражения, соединенных между собой знаками «>» или «<», называются тригонометрическими нера­венствами. Тригонометрическое неравенство может быть тождест­венным (безусловным) и условным.

Тождественные неравенства доказываются, а условные — реша­ются. Тригонометрическое неравенство называется тождественным, или безусловным, если оно справедливо при всех допустимых зна­чениях неизвестных, входящих в неравенство.

Например:

1)  при всех xR, кроме ;

2) при всех xR;

3) 

Тригонометрическое неравенство называется условным, если оно справедливо не при всех значениях неизвестных, входящих в неравенство.

Например:

1)  , что выполняется только на отрезках 

2) , что выполняется только на отрезках

**Ход занятия**

1.Запишите название, номер практического занятия и ее цель.

3.Укажите вариант, номер задания.

4.Выполните задания.

**Вариант 1.**

1. Упростите выражение: а) arccos б)-arcsin;

2. Решите уравнение:

а) arcsinx=

б) arcsinx = arcctgx; в) arccos(x+1) = arcctgx;

3.Решите уравнения:

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 

4.Решите неравенство:

1.

2.

3.

4.

5.

**Вариант 2.**

1. Упростите выражение:

а) arcsinб)arcsin.

2. Решите уравнение:

а) arcsinx=-

б) arcsinx = arccosx; в) arcsin(x+1) = arctgx;

3.Решите уравнения:

1

2

3

4

5

4.Решите неравенство:

1.

2.

3.

4.

5. 

Критерии оценивания:

№1 – 2 балла,№2 -3 балла, №3 -5 баллов, №4 -5 баллов.

Итого 15 баллов:15 баллов – оценка «5», 10 баллов – оценка «4», 7 баллов – оценка «3», 6 баллов и менее – оценка «2».

**Практическое занятие №10**

**«Решение тригонометрических уравнений, неравенств и систем»**

***Цель:*** отработать навыки различать виды тригонометрических уравнений, неравенств и систем, обобщить знания о методах решения тригонометрических уравнений*,* неравенств и систем.

**Оборудование**: тетрадь для выполнения практического занятия, раздаточный материал «Таблица тригонометрических значений», ручка.

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1.Повторите теоретические положения по теме.  2.Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д.  3.Выполните задание, согласно своего варианта. |

**Теоретический материал**

Синусом угла называется ордината точки угла на тригонометрическом круге, соответствующей числу угла . Обозначают ;

Косинусом угла называется абсцисса точки на тригонометрическом круге, соответствующей числу . Обозначают .

Тангенсом угла называется отношение ординаты точки к ее абсциссе. Обозначают .

Котангенсом угла называется отношение абсциссы точки к ее ординате. Обозначают .

Уравнение называется тригонометрическим, если неизвестная величина входит в него как аргумент тригонометрической функции. Решить тригонометрическое уравнение - это значит найти все его корни. Простейшими тригонометрическими уравнениями называются уравнения sin x = m, cos x = m, , , где m – данное число.

Формулы корней простейших тригонометрических уравнений:

|  |  |
| --- | --- |
| Уравнение | Общее решение (корни) |
| cos x = m |  |
| sin x = m |  |
| tg x = m |  |
| ctg x = m |  |

Однородным тригонометрическим уравнением первой степени называется уравнение вида:

Для его решения обе части уравнения делим на . При по членном делении получим уравнение вида:

(\*)

Преобразовывая уравнение (\*) получаем простейшее уравнение:

, где .

Однородным тригонометрическим уравнением второй степени называется уравнение вида:

Для его решения обе части уравнения делим на . При по членном делении получим уравнение:

(\*\*)

Уравнение (\*\*) сводится к квадратному с помощью подстановки .

При решении тригонометрических уравнений используют основные формулы тригонометрии.

Задача 1. Решите простейшие тригонометрическое уравнение: .

Решение: Согласно формуле (1) находим:

Задача 2. Решите простейшие тригонометрическое уравнение:

Решение: Функция синус нечетна. Поэтому . По формуле (2)

Так как , имеем:

Задача 3. Решите уравнение: 2 sin x+ 3 cos x = 0.

Решение:

2 sin x+ 3 cos x = 0 | : cos x ≠ 0

2 tg x + 3 =0

tg x = -1,5

х= arctg (-1,5) + πk, k Z или х = - arctg 1,5 + πk, k  Z

Ответ: - arctg 1,5 + πk, k  Z.

Задача 4. Решите уравнение: 2 sin2 х - 3 sinх cos х - 5 cos2х =0

Решение: 2 sin2 х - 3 sinх cos х - 5 cos2х =0

2 sin2 х - 3 sinх cos х - 5 cos2х =0 | : cos2х ≠ 0

2 tg 2x - 3 tg x - 5 = 0

замена tg x = t

2 t2 – 3 t – 5 =0

t1 = -1; t2  = 2,5

Решением уравнения tg х = -1 являются числа вида х = -π/2 + πk , k  Z.

Решением уравнение tg х = 2,5 являются числа вида х = arctg 2,5+ πn, n  Z.

Ответ: -π/2 + πk , arctg 2,5+ πn, n, k  Z.

Задача 4. Решить уравнение sin x + cos x = 1

Решение: sin x + cos x = 1



Ответ: 

**Ход занятия**

1.Запишите название, номер практического занятия и ее цель.

2.Укажите вариант, номер задания.

3.Выполните задания.

|  |  |
| --- | --- |
| **1 вариант** | **2 вариант** |
| 1. Решить уравнение, сделав подстановку: | |
| 1) ;  2) ; | 1) ;  2) ; |
| 2. Решить уравнение методом разложения на множители: | |
| 1) ;  2) ; | 1) ;  2) . |
| 3. Решите уравнение, упростив левую часть: | |
| 1) ;  2) ; | 1) ;  2) ; |
| 4. Решите неравенство: | |
| https://pandia.ru/text/79/015/images/image011_17.gif | https://pandia.ru/text/79/015/images/image018_9.gif |
| 5.Решите систему уравнений | |
| Ð¡Ð¸ÑÑÐµÐ¼Ð° ÑÑÐ°Ð²Ð½ÐµÐ½Ð¸Ð¹. Ð§Ð°ÑÑÑ Ð¡! | http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image1712.jpg |

Критерии оценивания:

№1 -№3 -2 балла, №4- 1 балл, №5-1 балл.

Итого 8 баллов:8 баллов – оценка «5», 6 баллов – оценка «4», 4 балла – оценка «3», 3 балла и менее – оценка «2».

**Практическое занятие №11**

**«Производные основных элементарных функций»**

***Цель :*** формирование практических навыков нахождения производных

элементарных функций

**Оборудование:**тетрадь для выполнения практического занятия, раздаточный материал «Таблица формул производных элементарных функций», ручка.

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1.Повторите теоретические положения по теме.  2.Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д.  3.Выполните задание, согласно своего варианта. |

**Теоретический материал**

Производной функции  называется конечный предел отношения приращения функции  к приращению независимой переменной  при стремлении последнего к нулю: Обозначения производной в точке х0:

 и другие.

Если функция в точке х0 (или на промежутке Х) имеет конечную производную, то функция называется дифференцируемой в этой точке (или на промежутке Х).

Процесс отыскания производной называется дифференцированием.

Правила дифференцирования

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № пп | U = u(x), V=V(x) —  дифференцируемые функции | № пп | U = u(x), V=V(x) —  дифференцируемые функции |
| I |  | VI | Производная сложной функции |
| II |  | VII | Функция задана параметричес-кими уравнениями |
| III |  |
| IV |  | VIII | Если  и  — взаимно обратные функции,  то |
| V |  |

Пример 1.

Найдите производную функции  .

Решение.

Пример 2.

Найдите производную функции .

Решение. Преобразуем каждое слагаемое к виду , получим

.

.

Пример 3. Найдите первую и вторую производные функции .

Решение.

,

. Пример 4. Найдите производную функции .

Решение.

Пример 5. Найдите производную функции .

Решение.



**Ход занятия**

1.Запишите название, номер практического занятия и ее цель.

2.Укажите номер задания.

3.Выполните задания.

1.Найдите производные следующих функций:

1)  2) 

3)  4) 

5)  6)  7) 

8)  9)  10) 

11)  12) 13)  14)

2.Найдите вторую производную:

1)  2)  3) 

Критерии оценивания:

Задание 1. №1 - №14 - 1 балл, Задание 2. №1 - №3 - 2 балла.

Итого 20 баллов: 20 баллов – оценка «5», 14 баллов – оценка «4», 10 баллов – оценка «3», 9 баллов и менее – оценка «2».

**Практическое занятие №12**

**«Производные сложной и обратной функции»**

***Цель* : -**обобщить и систематизировать умения нахождения производных

сложной и обратнойфункций;

-применить полученные знания к составлению уравнения касательной

к графику функции и решению прикладных задач.

**Оборудование**: тетрадь для выполнения практического занятия, раздаточный материал «Таблица формул производных обратных функций», ручка.

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1.Повторите теоретические положения по теме.  2.Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д.  3.Выполните задание, согласно своего варианта. |

**Теоретический материал**

1.Повторите теоретический материал 42-43,стр.369-374

Примеры и последовательность выполнения заданий.

*Пример 1 Найти производную функции*  http://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/derivative/primeri_577.png

По свойству *дифференцирования сложной функции* вначале находим производную натурального логарифма и домножаем на производную под логарифмической функции:

http://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/derivative/primeri_578.png

Производная суммы равна сумме производных и константу можно выносить за знак производной, поэтому имеем:

http://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/derivative/primeri_579.png

http://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/derivative/primeri_580.png

http://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/derivative/primeri_581.png

http://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/derivative/primeri_582.png

Знаменатель дроби можно свернуть по *формуле квадрат разности*, а в числителе двойку вынесем как общий множитель за скобки:

http://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/derivative/primeri_583.png

сокращаем:

http://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/derivative/primeri_584.png *Ответ.* http://www.webmath.ru/primeri_reshenii/images/derivative/primeri_584.png

*Пример 2*

*Написать уравнение касательной к графику функции y=f(x) в точке с абсциссой x0 :*

*а) f(x)=x2+x+1, x0=1*

*Решение:*

*а) f(x0)=12+1+1=3*

*f ’(x)=2x+1*

*f ’(x0)=21+1=3*

*Т.к. y=f(x0)+ f ’(x0)(x-x0) уравнение касательной,то получим:*

*y=3+3(x-1), y=3+3x-3, y=3x*

*Ответ: y=3*

*Пример 3. Материальная точка движется прямолинейно по закону {1/3}t^3-3t^2-5t+3, где  x(t)— расстояние от точки отсчета в метрах,  t— время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 2 м/с?*

*Решение.*

Найдем производную функции  {1/3}t^3-3t^2-5t+3:

{x}prime(t)= t^2-6t-5

По условию, скорость точки равна 2 м/с, значит, значение производной в момент времени t_0 равно 2.

Получаем уравнение:

{x}prime(t_0)= {t_0}^2-6{t_0}-5=2

Решим его:

{t_0}^2-6{t_0}-5=2 , {t_0}^2-6{t_0}-5-2=0 ,{t_0}^2-6{t_0}-7=0

t_1=7, t_2=-1 – не подходит по смыслу задачи: время не может быть отрицательным.

*Ответ: 7*

**Ход занятия**

1.Запишите название, номер практического занятия и ее цель.

2.Укажите вариант, номер задания.

3.Выполните задания.

**Вариант 1**

Задание 1. Найдите производную функции

1. http://festival.1september.ru/articles/519269/Image1216.gif
2. http://festival.1september.ru/articles/519269/Image1218.gif
3. http://festival.1september.ru/articles/519269/Image1220.gif

4) y=arccos(1−2x)

5) y=arctan(1/x)

Задание 2. Найдите значение производной функции

а) y=sin (4x-) в точке x0=

б) y=ln (2-x) в точке x0=-1

в) y=e2x-1 в точке x0=

г) y= в точке x0=2

Задание 3. Написать уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой x0:

а) y=x2-2x , x0=3

б) y=sin x , x0=

Задание 4.

1) Тело движется по прямой так, что расстояние S до него от некоторой точки А этой прямой изменяется по закону

S = 0,5t2 + 3t+ 4(м), где t — время движения в секундах. Найдите скорость тела через 2 с после начала движения.

2) Материальная точка движется прямолинейно по закону x(t)= x3+2x2-3x+7, где  x(t) — расстояние от точки отсчета в метрах,  t— время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 4 м/с?

**Вариант 2.**

Задание 1. Найдите производную функции

1) http://festival.1september.ru/articles/519269/Image1222.gif

2) http://festival.1september.ru/articles/519269/Image1224.gif

3) http://festival.1september.ru/articles/519269/Image1226.gif

4) y=arcsin(5−8x)

5) y=arctan(9/x)

Задание 2. Найдите значение производной функции

а) y=cos(4x-) в точке x0=

б) y=ln(3-x) в точке x0=-2

в) y=e3x-1 в точке x0=

г) y= в точке x0=2

Задание 3. Написать уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой x0:

а) y=x3+3x , x0=3 б) y=cos x , x0=

Задание 4.

1) Тело движется по прямой так, что расстояние S до него от некоторой точки А этой прямой изменяется по закону

S = 0,5t2 - 5t+ 1(м), где t — время движения в секундах. Найдите скорость тела через 4 с после начала движения.

2) Материальная точка движется прямолинейно по закону x(t)=2x3-3x2-10x+1, где  x(t) — расстояние от точки отсчета в метрах,  t— время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 2 м/с?

Критерии оценивания:

Задание 1.№1 - №3- по 2 балла, Задание 2. №1 - №4- по 1 баллу, Задание 3. №1-№2 по1 баллу, Задание 4. №1-№2 по 2 балла.

Итого 16 баллов:16 баллов – оценка «5», 10 баллов – оценка «4», 8 баллов – оценка «3», 7 баллов и менее – оценка «2».

**Практическое занятие №13**

**«Исследование функций с помощью производной»**

***Цель:*-**обобщить знания о применение математического моделирования как способа активизации аналитического мышления при исследовании функции с помощьюпроизводной;

**-**закрепить умения использования схемы исследования функции для решения задач оптимизации.

**Оборудование**: тетрадь для выполнения практического занятия, раздаточный материал «Схема исследования функции», ручка.

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1.Повторите теоретические положения по теме.  2.Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д.  3.Выполните задание, согласно своего варианта. |

**Теоретический материал**

1.Возрастание и убывание функции

Функция называется *возрастающей* в промежутке , если для любыхи, принадлежащих этому промежутку и таких, что , имеет место неравенство .

Функция называется *убывающей* в промежутке , если для любыхи, принадлежащих этому промежутку и таких, что , имеет место неравенство .

Как возрастающие , так и убывающие функции называются монотонными, а промежутки, в которых функция возрастает или убывает, - *промежутками монотонности*.

Возрастание и убывание функции характеризуется знаком ее производной:

если в некотором промежутке , то функция возрастает в этом промежутке;

если в некотором промежутке , то функция убывает в этом промежутке.

2.Исследование функции на экстремум с помощью первой производной

Точка из области определения функции называется *точкой минимума* этой функции, если существует такая – окрестность

точки , что для всех из этой окрестности выполняется неравенство

Точка из области определения функции называется *точкой максимума* этой функции, если существует такая – окрестность

точки , что для всех из этой окрестности выполняется неравенство

Точки минимума и максимума функции называются *точками экстремума* данной функции, а значения функции в этих точках – *минимумом* и *максимумом* (или *экстремумами*) функции.

Точками экстремумами могут служить только *критические точки*, т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная обращается в нуль или терпит разрыв.

Если при переходе через критическую точку производная меняет знак, то функция имеет в точке экстремум: минимум в том случае, когда производная меняет знак с минуса на плюс, и максимум – когда с плюса на минус. Если же при переходе через критическую точку производная не меняет знака, то функция в точке не имеет экстремума.

3.Правило нахождения экстремумов функции с помощью первой производной

1.Найти производную .

2.Найти критические точки функции , т.е. точки в которых обращается в нуль или терпит разрыв.

3.Исследовать знак производной в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции . При этом критическая точка есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором , от промежутка, в котором , и точка максимума – в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой , знак производной не меняется, то в точке функция экстремума не имеет.

4.Вычислить значения функции в точках экстремума.  
4.Наименьшее и наибольшее значения функции

Для нахождения наименьшего и наибольшего значений функции, непрерывной в некотором промежутке, необходимо:

1. Найти критические точки, принадлежащие заданному промежутку, и вычислить значения функции в этих точках;
2. Найти значения функции на концах промежутка;
3. Сравнить полученные значения; тогда наименьшее и наибольшее из них являются соответственно наименьшим и наибольшим значениями функции в рассматриваемом промежутке.

Построение графиков функций

*Общая схема построения графиков функций*

1. Найти область определения функции.
2. Выяснить, не является ли функция четной, нечетной или периодической.
3. Найти точки пересечения графика с осями координат (если это не вызывает затруднений).
4. Найти асимптоты графика функции.
5. Найти промежутки монотонности функции и ее экстремумы.
6. Найти промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба.
7. Построить график, используя полученные результаты исследования.

Пример .Построить график функции .

1. Функция определена на всей числовой прямой, т.е. .
2. Данная функция не является ни четной, ни нечетной; кроме того, она не является периодической.
3. Найдем точку пересечения графика с осью : полагая , получим . Точки пересечения графика с осью в данном случае найти затруднительно.
4. Очевидно, что график функции не имеет асимптот.
5. Найдем производную: . Далее, имеем .

Точки и делят область определения функции на три промежутка: , , . В промежутках и , то есть функция возрастает, а в промежутке , то есть функция убывает. При переходе через точку производная меняет знак с плюса на минус, а при переходе через точку - с минуса на плюс. Значит, .

1. Найдем вторую производную: . Точка делит область определения функции на два промежутка и . В первом из них , а во втором

, то есть в промежутке кривая выпукла вверх, а в промежутке выпукла вниз. Таким образом, получим точку перегиба (2;-1).

1. Используя полученные данные, строим искомый график.

**Ход занятия**

1.Запишите название, номер практического занятия и ее цель.

2.Укажите вариант, номер задания.

3.Выполните задания.

**Вариант 1.**

1. Найдите промежутки монотонности функции .
2. Найдите наименьшее и наибольшее значение функции:

на отрезке .

1. Найдите промежутки выпуклости и точки перегиба кривых:
2. ; б) .
3. Дан закон прямолинейного движения точки

(t - в секундах, s - в метрах). Найдите максимальную скорость движения этой точки.

1. Исследуйте функцию и постройте ее график:

.

**Вариант 2.**

1. Найдите промежутки монотонности функции .
2. Найдите наименьшее и наибольшее значение функции

на отрезке .

1. Найдите промежутки выпуклости и точки перегиба кривых:
2. ; б) .
3. Дан закон прямолинейного движения точки (t - в секундах, s - в метрах). Найдите максимальную скорость движения этой точки.
4. Исследуйте функцию и постройте ее график:

.

Критерии оценивания:

№1 – 1 балл, №2 - 2 балла, №3 – 2 балла, №4 - 2 балла, №5 - 4 балла.

Итого 11 баллов:11 баллов – оценка «5», 8 баллов – оценка «4», 6 баллов – оценка «3», 5 баллов и менее – оценка «2»

**Практическое занятие №14**

**«Неопределенный интеграл и первообразная»**

***Цель:***сформировать умение вычислять неопределенные и определенные интегралы, используя различные методы интегрирования.

**Оборудование**: тетрадь для выполнения практической работы, раздаточный материал «Таблица первообразных», «Таблица основных интегралов и их свойств», ручка.

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1.Повторите теоретические положения по теме.  2.Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д.  3.Выполните задание, согласно своего варианта. |

**Теоретический материал**

Функция , определенная на интервале , называется *первообразной* для функции , определенной на том же интервале , если 

Если  — первообразная для функции , то любая другая первообразная для функции  отличается от  на некоторое постоянное слагаемое, т. е.  где .

*Неопределенным интегралом* от функции  называется совокупность всех первообразных для этой функции. Обозначается неопределенный интеграл:  где 

Операция нахождений первообразной для данной функции называется *интегрированием*. Интегрирование является обратной операцией к дифференцированию:



Для проверки правильности выполненного интегрирования необходимо продифференцировать результат интегрирования и сравнить полученную функцию с подынтегральной.

*Пример 1.* Пользуясь таблицей основных интегралов и свойствами неопределенного интеграла, найти интегралы (результат интегрирования проверить дифференцированием):



*Решение.*



*Определенный интеграл, его вычисление и свойства*

*Определенный интеграл*от функции, непрерывной на отрезке , вычисляется по формуле:

где — первообразная для функции , т. е.



Формула называется *формулой Ньютона — Лейбница.*

При вычислении определенного интеграла для нахождения первообразной используют те же методы, что и для нахождения неопределенного интеграла, т. е. замену переменной, интегрирование по частям и т. д. Однако есть ряд особенностей. При замене переменной по формуле (1) необходимо в соответствии с заменой менять пределы интегрирования:



где  — обратная к  функция.

Формула интегрирования по частям (3) приобретает вид:



*Пример.* Вычислить определенный интеграл 

*Решение.*



**Ход занятия**

1.Запишите название, номер практического занятия и ее цель.

2.Укажите номер задания.

3.Выполните задания.

Задание 1. Вычислить интегралы.

1)  2) 

Задание 2. Проинтегрировать подходящей заменой переменного.

1)  2)  3) 

Задание 3. Проинтегрировать по частям.

1)  2)  3) 

Задание 4. Вычислить определенный интеграл.

1)  2)  3)  4) 

Критерии оценивания: №1 - 2 балла, №2 - 6 баллов, №3 – 6 баллов, №4 – 4 балла.

Итого 18 баллов:18 баллов – оценка «5», 12 баллов – оценка «4», 9 баллов – оценка «3», 8 баллов и менее – оценка «2».

**Практическое занятие №15**

**«Вычисление площадей плоских фигур и объемов тел вращения с помощью интеграла»**

***Цель:***сформировать умение применять определенный интеграл для вычисления площадей, длин и объемов фигур.

**Оборудование**: тетрадь для выполнения практической работы, раздаточный материал «Таблица первообразных», «Таблица основных интегралов и их свойств», ручка.

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1.Повторите теоретические положения по теме.  2.Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д.  3.Выполните задание, согласно своего варианта. |

**Теоретический материал**

Площади плоских фигур

1. Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

Если плоская фигура (рис. 1) ограничена линиями  , где  для всех , и прямыми , , то ее площадь вычисляется по формуле:



Пример.Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:



Решение**.** Построим схематический рисунок (рис. 2). Для построения параболы возьмем несколько точек:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 1 | –1 | 2 | –2 | 3 | –3 | 4 | -4 |
| y | –2 | –1 | –1 | 2 | 2 | 7 | 7 | 14 | 14 |

Для построения прямой достаточно двух точек, например  и .

Найдем координаты точек  и  пересечения параболы  и прямой .

Для этого решим систему уравнений



Тогда  Итак, 

Площадь полученной фигуры найдем по формуле (8), в которой

 поскольку  для всех . Получим:



2. Вычисление площадей фигур, ограниченных линиями, заданными параметрически

Если функции  и  имеют непрерывные производные первого порядка для всех , то площадь плоской фигуры, ограниченной линией  прямыми *x* = *a*, *x* = *b*, где *a* = *x*(*t*0),

*b* = *x*(*t*1), и осью *OX*, вычисляется по формуле:



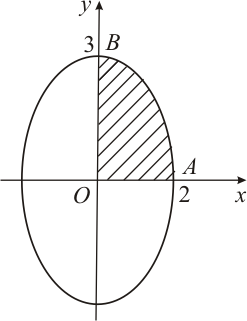
*Пример.* Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически:



*Решение.* Для построения фигуры составим таблицу значений координат (*x*, *y*) точек кривой, соответствующих различным значениям параметра 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| t | 0 |  |  |  |  |
| x | 2 | 0 | –2 | 0 | 2 |
| y | 0 | 3 | 0 | –3 | 0 |

|  |
| --- |
|  |
|  |

Нанесем точки (*x*, *y*) на координатную плоскость *XOY* и соединим плавной линией. Когда параметр изменяется от  до , соответствующая точка  описывает эллипс (известно, что  — параметрические формулы, задающие эллипс с полуосями *a* и *b*). Учитывая симметрию фигуры относительно координатных осей *OX* и *OY*, найдем её площадь *S*, умножив на 4 площадь криволинейной трапеции *AOB*. Согласно формуле (9) получим:



Вычисление объемов тел вращения

Если тело образовано вращением вокруг оси *OX* криволинейной трапеции, ограниченной кривой , осью *OX* и прямыми ,  (рис. 5), то его объем вычисляется по формуле:



*Пример.* Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями: 

*Решение.* Построим криволинейную трапецию, вращением которой получается тело вращения (рис. 6).

Чтобы получить объем тела вращения из объема  тела, полученного вращением фигуры *ОАВС*, вычтем объем  тела, полученного вращением фигуры *ОАВ*. Тогда искомый объем . По формуле (12) найдем  и :  (ед. объема);

 (ед. объема);

(ед. объема).

**Ход занятия**

1.Запишите название, номер практического занятия и ее цель.

2.Укажите номер задания.

3.Выполните задания.

Задание 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1) 

2) 

Задание 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически.

1) 

2) 

Задание 3. Найти длину дуги кривой.

1) 

2) 

Задание 4. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями.

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

6) 

Критерии оценивания:

№1 - 2 балла, №2 – 4 балла, №3 – 4 балла, №4 – 6 баллов.

Итого 16 баллов:16 баллов – оценка «5», 12 баллов – оценка «4», 8 баллов – оценка «3», 7 баллов и менее – оценка «2».

**Практическое занятие №16**

**«Текстовые задачи»**

***Цель:*** сформировать умения и навыки решать текстовые задачи

**Оборудование**тетрадь для выполнения практической работы, ручка

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1.Повторите теоретические положения по теме.  2.Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д.  3.Выполните задание, согласно своего варианта. |

**Теоретический материал**

*Пример 1*. На путь между двумя деревнями пе­шеход затратил на 4 ч 30 мин больше, чем мо­тоциклист. Скорость мотоциклиста 40 км/ч, скорость пешехода составляет 1/10 скорости мотоцик­листа. Найдите расстояние между деревнями.

*Решение.* Во-первых, найдем скорость пе­шехода. Она равна 4 км/ч.

Пусть мотоциклист может проехать расстояние между деревнями за *х ч,* тогда пешеход может пройти это расстояние за *(х* + 4,5) ч. Таким об­разом, пешеход пройдет 4(х + 4,5) км, мотоцик­лист проедет 40х км.

Так как по условию задачи эти величины рав­ны, получим уравнение

4(х + 4,5) = 40х, откуда х = 0,5.

Следовательно, расстояние между деревнями равно 0,5 \* 40 = 20 (км).

Ответ: 20.

В следующих задачах *запланированные* параме­тры движения (расстояние, время и скорость) со­поставляются с *реальными.*

Для решения подобных задач необходимо вы­разить через переменную расстояние, время и скорость на каждом из запланированных и реаль­ных участков пути с момента отклонения от пла­на. После этого нужно найти в условии задачи еще не использованный факт и с его помощью составить уравнение.

*Пример 2*. Велосипедист должен был проехать весь путь с определенной скоростью за 2 ч. Но он ехал со скоростью, превышающей намеченную

на 3 км/ч, и поэтому на весь путь затратил 5/3 ч. Найдите длину пути.

*Решение*. При решении этой задачи полез­но рассматривать как бы два участка пути — за­планированный и реальный. Они, естественно, равны по длине, но отличаются временем и ско­ростью их прохождения.

По плану: затраченное время 2 ч, скорость обозначим *х* км/ч, расстояние равно 2х км.

В реальности: скорость (х + 3) км/ч, время 5/3 ч, значит, расстояние равно 5/3(х + 3) км.

Поскольку в реальности пройдено именно то расстояние, которое и было запланировано, по­лучаем уравнение 2х=5/3(х+3),откуда х = 15.

Итак, велосипедист должен был за 2 ч со ско­ростью 15 км/ч проехать расстояние 2 • 15 = 30 км Ответ 30.

Пример 3.Автобус прошел 5/6 пути со скоростью 50 км/ч, а затем задержался на 3 мин. Что­бы прибыть в конечный путь вовремя, оставшу­юся часть пути он шел со скоростью 60 км/ч. Найдите путь, пройденный автобусом.

*Решение*. Отклонение от плана началось с момента остановки. Обозначим за *х* ч — время, за которое автобус должен был пройти оставшуюся 1/6 часть пути. Тогда запланированное расстояние равно 50х км.

В реальности 1/20 ч автобус стоял, а оставшуюся часть пути прошел за (*х-1/20)*ч, то есть реально пройденный путь равен 60*(х-1/20)*км.

По условию задачи запланированное расстояние совпадает с реально пройденным, следовательно, получаем уравнение 60(х-1/20) = 50х, откуда х = 0,3. Таким образом, 1/6 часть пути равна 50 • 0,3 = 15 (км), а весь путь равен 15 • 6 = 90 (км). О т в е т: 90**.**

Рассмотрим задачи, описывающие движение двух участников. В задачах на *совместное движе­ние* участники не всегда одновременно начинают движение и не всегда одновременно его заканчи­вают. Поэтому очень важно выделить участок или участки пути, на которых движение происходит действительно совместно. Кроме этого, в задачах имеются, как правило, такие участки пути, на ко­торых передвигается один участник, в то время как другой еще не начал или уже закончил дви­жение.

В некоторых задачах полезно найти *скорость сближения* (или *удаления)* участников — величи­ну, показывающую, на сколько уменьшается (или увеличивается) расстояние между участниками движения в единицу времени.

*Замечания.*

Скорость сближения или удаления равна *сум­ме скоростей* участников при их движении *в про­тивоположных направлениях* (навстречу друг дру­гу или друг от друга).

При движении участников *в одном направлении* (один убегает, другой его догоняет) скорость сбли­жения или удаления равна *модулю разности их скоростей.*

Пример 4.Из Смоленска в Москву вышел по­езд со скоростью 70 км/ч. Спустя 1 ч 40 мин из Москвы в Смоленск отправился поезд, скорость которого равна 60 км/ч. Через сколько часов по­сле выхода поезда из Смоленска произойдет встреча, если расстояние между городами равно 420 км?

*Решение*. Совместное движение началось в момент выхода из Москвы первого поезда. К этому времени второй поезд прошел 70 •5/3=350/3(км) и расстояние между поездами сократилось до

420-350/3=910/3 (км).

Закончилось совместное движение их встречей.

Итак, на расстоянии 910/3 (км) поезда сбли­жались со скоростью 70 + 60 = 130 (км/ч) и потратили на это

910/3:130=7/3 (ч)

Тогда поезд из Смоленска шел до встречи **5/3**+ **7/3**= 12/3=**4** (ч).

О т в е т: 4.

В ряде задач на движение учитываются ско­рость ветра при движении самолетов, скорость течения при движении по реке. В задачах такого типа рассматриваются две основные скорости - *собственная скорость* самолета, корабля, лодки, создаваемая двигателем или усилием людей при работе на веслах, т.е. скорость движения при от­сутствии ветра или в стоячей воде, и *скорость ветра или течения.* Как правило, если собствен­ная скорость и скорость ветра (или течения) не даны, то именно их обозначают переменными. Две другие скорости — *скорость по* ветру или те­чению и *скорость против* ветра или течения — можно выразить через основные скорости (через их сумму или разность). Далее решаем задачу, как любую другую задачу на движение.

Пример5.Самолет пролетит по направлению ветра за 5,5 ч такое же расстояние, какое в об­ратном направлении за 6 ч при условии, что ни скорость, ни направление ветра не меняются. Найдите расстояние, которое пролетит самолет туда и обратно, если собственная скорость само­лета равна 690 км/ч.

*Решение*. В данной задаче основные скоро­сти — собственная скорость самолета, равная 690 км/ч, и скорость ветра, которая не дана. Обозначим ее за х км/ч.

Тогда при движении по направлению ветра са­молет со скоростью (690 + х) км/ч за 5,5 ч про­летит 5,5(690 + *х)* км, а при движении против направления ветра самолет со скоростью (690 -*х)* км/ч за 6 ч пролетит 6(690 - *х)* км.

Учитывая, что по условию задачи самолет туда и обратно пролетает одно и то же расстояние, со­ставим уравнение

5,5 • (690 + х) *=* 6 • (690 - *х).*

Решая уравнение, находим, что скорость ветра равна 30 км/ч. Далее вычислим расстояние: 6 • (690 - 30) = 3960 (км).

Туда и обратно самолет пролетит 3960 • 2 == 7920 (км).

Ответ: 7920

Пример 6.Из города выехал грузовик со скоростью 60 км/ч. Через 2 часа вдогонку выехал мотоциклист. В некоторый момент времени расстояние между ними было 80 км. Если бы скорость мотоциклиста была в 5/4 раза больше, чем в действительности, то это расстояние оказалось бы в три р**а**за меньше. Найти скорость мотоциклиста.

*Решение*: Пусть скорость мотоциклиста v км/ч, а t – время до момента, когда расстояние

между ними впервые стало равно 80 км. Тогда за время t ч грузовик прошел расстояние

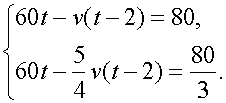
60t км, а мотоциклист за время t - 2 проехал v(t - 2) км. Откуда получаем уравнение



Аналогично из второго условия вытекает второе уравнение



Таким образом, получаем систему уравнений



Вычитая теперь из первого уравнения второе и умножая затем обе части полученного уравнения на 4, приходим к соотношению



Теперь из первого уравнения следует t = 44/9, следовательно,

v = 960/13 =км/ч.

Ответ: км/ч.

Пример 7***.*** Два самолета вылетели одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу и встретились на расстоянии 100 км от середины AB. Если бы первый самолет вылетел на 20 минут позже второго, то они встретились бы на четверти пути от A, а если бы второй самолет вылетел на 20 минут позже первого, то они встретились бы на полпути. Определить скорости самолетов.

*Решение:*

Пусть скорости первого и второго самолетов равны соответственно V1 и V2 км/ч, а расстояние между A и В – S км.

Для составления системы уравнений составим таблицу:

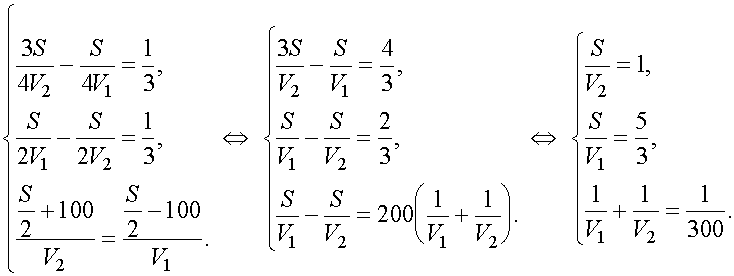
|  |  |
| --- | --- |
| Условия задачи | Уравнения |
| Если бы первый самолет вылетел на 20 минут позже второго, то они встретились бы на четверти пути от А. |  |
| Если бы второй самолет вылетел на 20 минут позже первого, то они встретились бы на полпути. |  |

Заметим, что как видно из второго уравнения V2 > V1 т.е. первое условие задачи

позволяет заключить:

|  |  |
| --- | --- |
| Самолеты встретились на расстоянии 100 км от середины АВ. |  |

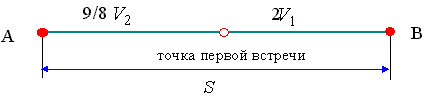
Таким образом, приходим к системе уравнений



Откуда S = 800 км,км/ч,  км/ч.

Пример 8.Грузовой и легковой автомобили выехали одновременно навстречу друг другу соответственно из пунктов А и В. После встречи грузовой автомобиль прибывает в В через два часа, а легковой в А через 9/8 часа. Каждый едет с постоянной скоростью без остановки и, приехав в конечный пункт, тут же поворачивает обратно, и на обратном пути встречаются в 60 км от В. Найти время затраченное каждым автомобилем на поездку туда и обратно.

*Решение:* Пусть скорость грузового автомобиля V1 км/ч, скорость легкового автомобиля V2 км/ч, а расстояние от А до В равно S км.

Тогда имеем:

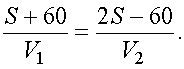
*первая встреча грузовика и легкового автомобиля*

Следовательно, получаем первые два уравнения:

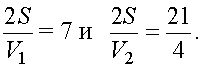
|  |  |
| --- | --- |
| Условия задачи | Уравнения |
| После встречи грузовой автомобиль прибывает в B через 2 ч, легковой автомобиль в А через 9/8 ч. |  |

Для получения второго уравнения рассмотрим второе условие:

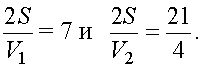
*вторая встреча грузовика и легкового автомобиля*

Приехав в конечный пункт, они тут же поворачивают обратно, и на обратном пути встречаются в 60 км.

Итак, приходим к системе уравнений: 

По условию задачи нам необходимо найти величины: 

Однако удается определить и остальные переменные 

Ответ: 

**Ход занятия**

1.Запишите название, номер практического занятия и ее цель.

2.Укажите вариант, номер задания.

3.Выполните задания.

**Вариант 1**

Задание 1. Почтальон проехал на мотоцикле от почты до села со скоростью 30 км/ч. Назад он возвращался пешком со скоростью, составляю­щей 1/5 скорости его движения на мотоцикле,

поэтому на обратный путь он затратил на 1 ч 12 мин больше, чем от почты до села. Найдите расстояние от почты до села.

Задание 2. Расстояние между деревней и по­селком мотоциклист проезжает на 0,4 ч быстрее велосипедиста. Скорость мотоциклиста 18 км/ч, а скорость велосипедиста составляет 8/9 скорости

мотоциклиста. Найдите расстояние между дерев­ней и поселком.

Задание 3. Велосипедист каждую минуту про­езжает на 800 м меньше, чем мотоциклист, поэтому на путь в 30 км он затратил времени на 2 ч больше, чем мотоциклист. Сколько километров в час проезжал мотоциклист?

Задание 4. Путь от А до В пешеход проходит за 2 ч. Если он увеличит скорость на 2 км/ч, то уже за 1,8 ч он пройдет на 3 км больше, чем расстояние от А до В. Найдите расстояние от А до В.

Задание 5. Расстояние между двумя пунктами поезд проходит по расписанию с намеченной ско­ростью за 6 ч. Через 5 ч после отправления он был задержан в пути на 12 мин. Поэтому, чтобы прибыть на станцию назначения вовремя, поезд увеличил скорость на 15 км/ч. Найдите перво­начальную скорость поезда.

**Вариант 2**

Задание 1. Расстояние между двумя пункта­ми автомобиль должен был проехать за 4 ч. Первые 2 ч он ехал с намеченной скоростью, а затем снизил ее на 10 км/ч, поэтому в конеч­ный пункт приехал на 20 мин позже, чем пред­полагал. Найдите первоначальную скорость ав­томобиля.

Задание 2. Расстояние между двумя пунктами автомобиль должен был пройти за 3 ч. Первые 2 ч он ехал с намеченной скоростью, а затем увеличил ее на 10 км/ч, поэтому в конечный пункт приехал на 12 мин раньше, чем предпо­лагал. Найдите расстояние между этими пунк­тами.

Задание 3. Из Москвы в Киев вышел поезд со скоростью 80 км/ч. Спустя 24 мин из Киева в Москву отправился поезд со скоростью 70 км/ч. Через сколько часов после выхода из Москвы про­изойдет встреча, если расстояние между города­ми равно 872 км?

Задание 4. Из города А в город В выехал грузовик со скоростью 45 км/ч. После того как грузовик проехал 15км, из города А выехал со скоростью 60 км/ч автомобиль, который при­ехал в город В на 1/6 ч раньше грузовика. Найдите расстояние между городами.

Задание 5.Расстояние между городами А и В равно 50 км. Из города А в город В выехал велосипедист, а через 1 ч 30 мин вслед за ним выехал мотоциклист. Обогнав велосипедиста, он прибыл в город В на 1 ч раньше его. Найдите скорость мотоциклиста, если известно, что она в 2,5 раза больше скорости велосипедиста.

Критерии оценивания: Каждое задание оценивается в 1 балл.

Итого 5 баллов:5 баллов – оценка «5», 4 балла– оценка «4», 3 балла – оценка «3», 2 балла и менее – оценка «2».

**Практическое занятие №17**

**«Преобразование графиков степенной и показательной функции»**

***Цель:*** сформировать умения и навыки вычислять значения функции по значению аргумента, определять положение точки на графике по ее координатам и наоборот, строить графики степенной и показательной функции, выполнять преобразование графиков.

**Оборудование**: тетрадь для выполнения практической работы, раздаточный материал «Степенные функции и их свойства», «Показательная функция, свойства», ручка, карандаш, ластик, линейка.

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1.Повторите теоретические положения по теме.  2.Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д.  3.Выполните задание, согласно своего варианта. |

**Теоретический материал**

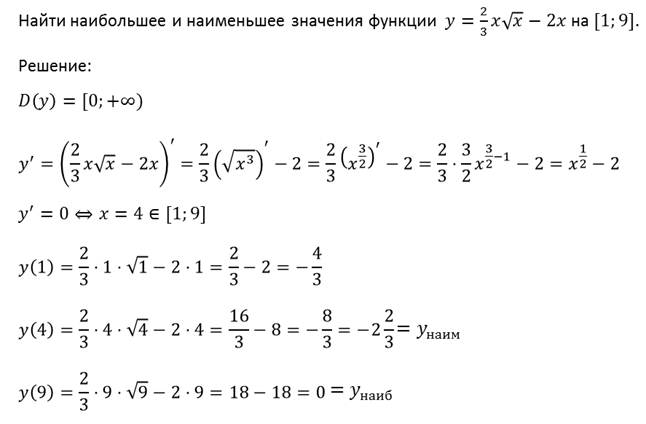
1.Прочитайте §9 стр.60-65. Учебник «Математика: Алгебра и начала математического анализа, геометрия», 11 класс.

2.Прочитайте §11 стр.90-98. Учебник «Математика: Алгебра и начала математического анализа, геометрия», 11 класс.

3.Рассмотрите предложенные примеры.

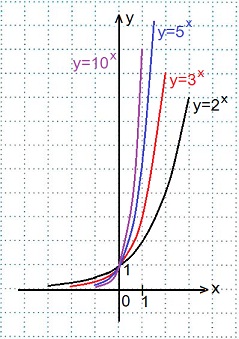
Пример1**.**





Пример 2:В одной координатной плоскости построить графики функций:

y=2x, y=3x, y=5x, y=10x. найти значения функций при х=0 и при х=±1.

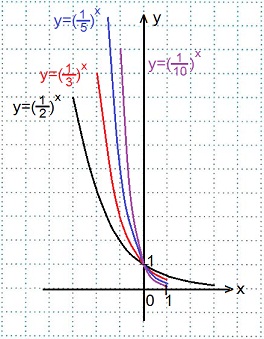
[](http://www.mathematics-repetition.com/wp-content/uploads/2012/06/pokaz-f2.jpg)Переменная х может принимать любое значение (D (y)=R), при этом значение у всегда будет больше нуля  (E (y)=R+).

Графики всех данных функций пересекают ось Оу в точке (0; 1), так как любое число в нулевой степени равно единице; с осью Ох графики не пересекаются, так как положительное число в любой степени не может быть равным нулю. Чем больше основание а (если a>1) показательной функции у=ах, тем ближе расположена кривая к оси Оу.

Все  данные функции являются возрастающими, так как большему значению аргумента соответствует и большее значение функции.

Пример: В одной координатной плоскости построить графики функций:

y=(1/2)x, y=(1/3)x, y=(1/5)x, y=(1/10)x вычислим их значения при х=0 и при х=±1.

[](http://www.mathematics-repetition.com/wp-content/uploads/2012/06/pokaz-f3.jpg)Переменная х может принимать любое значение: D (y)=R, при этом область значений функции: E (y)=R+. Графики всех данных функций пересекают ось Оу в точке (0; 1), так как любое число в нулевой степени равно единице; с осью Ох графики не пересекаются, так как положительное число в любой степени не может быть равным нулю.

Чем меньше основание а (при 0<a<1) показательной функции у=ах, тем ближе расположена кривая к оси Оу. Все  эти функции являются убывающими, так как большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

**Ход занятия**

1.Запишите название, номер практического занятия и ее цель.

2.Укажите вариант, номер задания.

3.Выполните задания.

**Вариант 1**.

1.Исследуйте функцию на монотонность и экстремумы:

*; б)*

2.Постройте график функции:

a)

b)

3.Найдите область определения функции:

4.Постройте и исследуйте график функции:

**Вариант 2.**

1.Исследуйте функцию на монотонность и экстремумы:

а); б)

2.Постройте график функции:

a)

b)

3.Найдите область определения функции:

4.Постройте и исследуйте график функции:

Критерии оценивания:

№1 - 2 балла, №2 – 2 балла, №3 – 1 балл, №4 – 1 балл.

Итого 6 баллов:6 баллов – оценка «5», 4 балла– оценка «4», 3 балла – оценка «3», 2 балла и менее – оценка «2».

**Практическое занятие №18**

**«Преобразование графиков тригонометрической и логарифмической функции»**

***Цель:*** сформировать умения и навыки строить графики логарифмической и тригонометрической функции, выполнять преобразование графиков и действия с ними.

**Оборудование**: тетрадь для выполнения практической работы, раздаточный материал «Логарифмическая функция, свойства», ручка, карандаш, ластик, линейка.

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1.Повторите теоретические положения по теме.  2.Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д.  3.Выполните задание, согласно своего варианта. |

**Теоретический материал**

1.Прочитайте §15 стр.116-118. Учебник «Математика: Алгебра и начала математического анализа, геометрия», 11 класс. Прочитайте §16 стр.132-136, стр.137-139, §20 стр.152-155. Учебник «Математика: Алгебра и начала математического анализа, геометрия», 10 класс.

2.Рассмотрите примеры §15 стр.120-121. Учебник «Математика: Алгебра и начала математического анализа, геометрия», 11 класс. Рассмотрите примеры §16 стр.139-140, §20 стр.155-156. Учебник «Математика: Алгебра и начала математического анализа, геометрия», 10 класс.

**Ход занятия**

1.Запишите название, номер практического занятия и ее цель.

2.Укажите вариант, номер задания.

3.Выполните задания.

**Вариант 1.**

1.Постройте и исследуйте график функции:

a)

b) *у = cos(х + π/3) + 4*

2.Выполните тест

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № задания | Текст задания | Варианты ответов |
| 1 | Найдите амплитуду функции  *y = 2\*sin 4(x - π /16) - 1* | А. 1 вниз ; Б. π /2;  В. π /16 вправо; Г. 2. |
| 2 | Найдите сдвиг функции  *y = 2\*sin 4(x - π /16) - 1* | А. 1 вниз ; Б. π /2;  В. π /16 вправо; Г. 2. |
| 3 | Найдите период функции  *y = 2\*sin 4(x - π /16) - 1* | А. 1 вниз ; Б. π /2;  В. π /16 вправо; Г. 2. |
| 4 | Найдите вертикальный сдвиг функции  *y = 2\*sin 4(x - π /16) - 1* | А. 1 вниз ; Б. π /2;  В. π /16 вправо; Г. 2. |
| 5 | Найдите сдвиг функции  *y = 2\*tg 1/2(x - π /4) + 1* | А. π /4 вправо; Б. 2 π;  В. 1 вверх; Г.π /8 вправо. |
| 6 | Найдите период функции  *y = 1/2cos(πх – π/4) – 1* | А. 1; Б. 1/2;  В. 2 *π*; Г. 1/4 . |

3. Решить графически уравнение:



**Вариант 2**.

1. Постройте и исследуйте график функции:

a)

b) *у = cos(х + π/4) + 1*

2.Выполните тест:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № задания | Текст задания | Варианты ответов |
| 1 | Найдите период функции  *y = 3\*cos (x + π /4)* | А. 0; Б. 3;  В. 2 π; Г. π /4 влево. |
| 2 | Найдите вертикальный сдвиг функции  *y = 3\*cos (x + π /4)* | А. 0; Б. 3;  В. 2 π; Г. π /4 влево. |
| 3 | Найдите сдвиг функции  *y = 3\*cos (x + π /4)* | А. 0; Б. 3;  В. 2 π; Г. π /4 влево. |
| 4 | Найдите амплитуду функции  *y = 3\*cos (x + π /4)* | А. 0; Б. 3;  В. 2 π; Г. π /4 влево. |
| 5 | Найдите вертикальный сдвиг функции  *y = 2\*tg 1/2(x - π /4) + 1* | А. π /4 вправо; Б. 2 π;  В. 1 вверх; Г. π/8 влево. |
| 6 | Найдите период функции  *y = 2\*tg 1/2(x - π /4) + 1* | А. π /4 вправо; Б. 2 π;  В. 1 вверх; Г. 1 вниз. |

3. Решить графически уравнение:



Критерии оценивания: №1 - 2 балла, №2 – 6 баллов, №3 – 1 балл.

Итого 9 баллов:9 баллов – оценка «5», 7 баллов – оценка «4», 6 баллов – оценка «3», 5 баллов и менее – оценка «2».

**Практическое занятие №19**

**«Решение комбинаторных задач»**

***Цель:*** закрепить знания и навыки в решении комбинаторных задач

**Оборудование**: Учебник «Математика: Алгебра и начала математического анализа, геометрия», 10 класс, тетрадь для выполнения практического занятия, раздаточный материал «Таблица формул размещения, сочетания, перестановок», ручка.

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1.Повторите теоретические положения по теме.  2.Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д.  3.Выполните задание, согласно своего варианта. |

**Теоретический материал**

Основные понятия комбинаторики

Определение. Произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно называют

*n-* *факториалом* и пишут

.

Перестановки.

Комбинация из n элементов, которые отличаются друг от друга только порядком элементов, называются перестановками.

Перестановки обозначаются символом *Рn*, где n- число элементов, входящих в каждую перестановку. (*Р* - первая буква французского слова *permutation*- перестановка).

Число перестановок можно вычислить по формуле



или с помощью факториала:



*0!=1 и 1!=1.*

Размещения.

Определение. Размещениями из *m* элементов в *n* в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами (хотя бы одним), либо порядком из расположения.

Размещения обозначаются символом , где *m*- число всех имеющихся элементов, *n*- число элементов в каждой комбинации.

При этом полагают, что *nm.*



Сочетания.

Определение. Сочетаниями называются все возможные комбинации из *m* элементов по *n*, которые отличаются друг от друга по крайней мере хотя бы одним элементом (здесь *m* и *n-*натуральные числа, причем *n  m*).



Число сочетаний из *m* элементов по *n* обозначаются  .

В общем случае число из *m* элементов по *n* равно числу размещений из *m* элементов по *n*, деленному на число перестановок из *n* элементов:



Правило суммы.  
Если элемент a можно  выбрать m способами, а элемент b – n способами, причем любой выбор элемента a отличен от любого выбора элемента  b, то выбор  “a или b”  можно

сделать  m + n  способами.  
Правило произведения.  
Если из некоторого множества А элемент  ai  можно выбрать КA способами, а элемент bj  из множества  В – КB  способами, то совокупность (ai ; bj ) можно образовать КA\* КB  способами. Правило верно и для совокупностей, состоящих из большего, чем два числа элементов.

Перестановки с повторением.  
Иногда требуется переставлять предметы, некоторые из которых неотличимы друг от друга. Рассмотрим такой вариант перестано­вок, который называется перестановками с повторениями.  
Пусть имеется *п1* предметов 1-го типа, *n2* предмета 2-го, *пк* пред­метов ref-2_1083666678-89-го типа и при этом *п1+ п2+...+ пк = п.* Количество разных перестановок предметов  
  
ref-2_1083734626-551

Размещения с повторениями.

Пусть даны элементы а1 ,а2 , . . . ,аn     (а)

*Размещением с повторениями из n элементов по k элементов* называется всякая упорядоченная последовательность из k элементов, членами которой являются данные элементы. В размещении с повторениями один и тот же элемент может находиться на нескольких различных местах.   
*Формула для числа размещений с повторениями.* Каждый элемент может быть выбран  n способами, поэтому :

ref-2_1083733584-230= ref-2_1083733814-181,где ref-2_1083733584-230 -обозначение размещений с повторениями .

Примеры типовых расчетов: выполняется всей группой вместе с преподавателем.

Пример 1. Сколькими способами можно расставлять на одной полке шесть различных книг?

Решение. Искомое число способов равно числу перестановок из 6 элементов, т.е.

.

Пример 2. Сколько вариантов распределения на практику в три ресторана различного профиля можно составить для пяти студентов?

Решение. Искомое число вариантов равно числу размещений из 5 элементов по 3 элемента, т.е.

.

Пример 3. Из группы в 25 человек нужно выделить четырех для работы официантами на банкете. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Так как порядок выбранных четырех человек не имеет значения, то это можно сделать  способами.

Находим по первой формуле

.

**Ход занятия**

1.Запишите название, номер практического занятия и ее цель.

2.Укажите вариант, номер задания.

3.Выполните задания.

**Вариант 1**

1.Вычислить  2.Упростить 

3.Вычислить  4.Вычислить ; 

5.Сколькими способами могут разместиться 5 человек вокруг круглого стола?

6.Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,8,9 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр?

7.Решить уравнение 

**Вариант 2**

1.Вычислить  2.Упростить 

3.Вычислить  4.Вычислить ; 

5.Сколькими способами можно расставить на полке 6 книг?

6.Сколько флажков 3 разных цветов можно составить из 5 флажков разного цвета?

7.Решить уравнение 

**Вариант 3**

1.Вычислить  2.Упростить 

3.Вычислить  4.Вычислить ; 

5. Сколькими способами можно выбрать 3х дежурных, если в классе 30 человек?

6.Решить уравнение 

**Вариант 4**

1.Вычислить  2.Упростить 

3.Вычислить  4.Вычислить ; 

5. Сколько вариантов распределения 3х путевок в санаторий различного профиля можно составить для 5 претендентов?

6.Решить уравнение 

Критерии оценивания:

№1 – №4 - 1 балл, №5- №6 - 2 балла.

Итого 8 баллов:8 баллов – оценка «5», 6 баллов – оценка «4», 4 балла – оценка «3», 3 балла и менее – оценка «2».

**Практическое занятие №20**

**«Вычисление вероятностей. Прикладные задачи»**

***Цель*:** сформировать умение решать задачи на нахождение вероятностей

**Оборудование**: тетрадь для выполнения практической работы, ручка.

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1.Повторите теоретические положения по теме.  2.Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д.  3.Выполните задание, согласно своего варианта. |

**Теоретический материал**

Вероятностью Р(А) события А в испытании с равновозможными элементарными исходами называют отношение числа исходов m, благоприятствующих событию А, к числуn всех исходов испытания.

Пример 1: В партии из 30 миксеров 2 бракованных. Найти вероятность купить исправный миксер.

Аксиомы вероятностей:

Каждому событию А поставлено в соответствие неотрицательное число Р(А), называемое вероятностью события А.

Если события А1, А2 … попарно несовместны, то Р(А1+А2+…)=Р(А1)+Р(А2)+…

Свойства вероятностей:

Вероятность невозможного события равна нулю Р=0.

Вероятность достоверного события равна единице Р=1.

Вероятность произвольного случайного события А заключается между 0 и 1: 0<Р(А)<1.

Пример 2: Из 34 экзаменационных билетов, пронумерованных с помощью чисел от 1 до 34, наудачу извлекается один. Какова вероятность, что номер вытянутого билета есть число, кратное трем.

Решение: Найдем количество чисел от 1 до 34, кратных трем. Это числа 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33. Всего таких чисел 11. Таким образом, искомая вероятность



События А и В называются совместными, если они могут одновременно произойти, и несовместными, если при осуществлении одного события не может произойти другое.

События А и В называются независимыми, если вероятность наступления одного события не зависит от того, произошло другое событие или нет.

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей слагаемых без вероятности произведения: Р(А+В)=Р(А)+Р(В)-Р(АВ)

Пример 3: Вероятность поражения одной мишени – 0,7, а другой – 0,8. Какова вероятность, что будет поражена хотя бы одна мишень, если по ним стреляют независимо друг от друга.

Решение: Т.к. события совместны, то



Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей слагаемых: Р(А+В)=Р(А)+Р(В). Р(А)+Р()=1

Условная вероятность – вероятность одного события, при условии, что другое событие уже произошло.

Вероятность произведения событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого: Р(АВ)=Р(А)∙Р(А/В) или Р(ВА)=Р(А)∙Р(В/А)

Вероятность произведения двух независимых событий А и В равна произведению вероятностей сомножителей: Р(АВ)=Р(А)∙Р(В).

Тогда вероятность того, что обе ручки красные:



**Ход занятия**

1.Запишите название, номер практического занятия и ее цель.

2.Укажите вариант, номер задания.

3.Выполните задания.

**Вариант 1**

1.Вероятность того, что день будет дождливым равна 0,46. Какова вероятность того, что дождя не будет?

2.Из слова КАЛЬКУЛЯТОР выбирается одна буква. Какова вероятность, что это буква Л?

3.Из карточек с буквами С,О,И,Т,К,А, наугад последовательно берут 5. Какова вероятность того, что получится слово «ТАКСИ»?

4.Колода в 36 карт делится пополам. Какова вероятность того, что все дамы будут в одной половине?

5.Какова вероятность того, что при подбрасывании игральной кости выпадет не более трёх очков?

6. В партии из 18 деталей находится 4 бракованных. Наугад выбирается 7 деталей. Найти вероятность того, что среди взятых деталей три окажутся стандартными.

7.В первой урне 4 красных и 6 чёрных шаров. Во второй 5 красных и 5 чёрных шаров. Из каждой урны не глядя берут по одному шару. Какова вероятность того, что они оба красные?

8.Какова вероятность того, что выбранное наугад число от 32 до 100 не содержит цифры 6?

**Вариант 2**

1. Вероятность всхожести семени 0,67. Какова вероятность того, что семя не взойдёт?

2. Из слова КОНСПЕКТ выбирается одна буква. Какова вероятность, что это буква К?

3. Наугад в ряд раскладываются карточки с буквами А, Г, Н, К, И. Какова вероятность того, что составится слово «КНИГА»?

4. 10 шаров распределены по 4 ящикам. Какова вероятность того, что в первом – 1 шар, во втором – два, в третьем – 3 шара, а в четвертом - четыре?

5. Бросают игральную кость один раз. Какова вероятность того, что выпадет число, не меньше двух?

6 .В ящике 12 стандартных и 4 бракованных детали. Не глядя берут 6. Найти вероятность того, что из взятых деталей три окажутся бракованными.

7. В первой урне 7 белых и 5 чёрных шаров. Во второй 3 белых и 5 чёрных шаров. Не глядя из каждой урны берут по одному шару. Какова вероятность того, что они оба чёрного цвета?

8. Какова вероятность того, что выбранное наугад число от 11 до 63 кратно 6 ?

**Вариант 3**

1. Вероятность безупречной работы двигателя равна 0,992. Какова вероятность его поломки?
2. Из слова СТУДЕНТ выбирается одна буква. Какова вероятность, что это буква Т?
3. На полку ставят 4-х томное издание. Какова вероятность того, что 1 том стоит первым, а четвертый- четвертым?
4. Колода в 36 карт делится пополам. Какова вероятность того, что три дамы будут в одной половине?

5 В сборочный цех завода поступают детали из 4-х цехов. Вероятность того, что деталь изготовлена первым цехом 0,12, вторым 0,3, третьим 0,4. Какова вероятность того, что деталь изготовлена в четвёртом цехе?

6. В первой урне 3 красных и 5 чёрных шаров. Во второй 5 красных и 2 чёрных шаров. Из каждой урны не глядя берут по одному шару. Какова вероятность того, что из первой урны взят красный шар, а из второй – чёрный ?

7. Карточки с буквами А,Д,И,Е,В,О,Р,Ь сложены в коробку. Какова вероятность того, что вынимая 5 последовательно одну за другой получится слово «ДВЕРЬ»?

8. Какова вероятность того, что выбранное наугад число от 1 до 88 не содержит цифры 7?

**Вариант 4**

* 1. Вероятность попадания в мишень при выстреле равна 0,872. Какова вероятность промаха?
  2. Из слова СТАТИСТИКА выбирается одна буква. Какова вероятность, что это буква Т?
  3. На полку ставят 5-ти томное издание. Какова вероятность того, что первый том стоит первым, а четвертый- четвертым?
  4. Колода в 36 карт делится пополам. Какова вероятность того, что три туза будут в одной половине?
  5. В сборочный цех завода поступают детали из 3-х цехов. Вероятность того, что деталь изготовлена первым цехом 0,12, третьим 0,4. Какова вероятность того, что деталь изготовлена во втором цехе?
  6. В первой урне 4 красных и 5 чёрных шаров. Во второй 6 красных и 2 чёрных шаров. Из каждой урны не глядя берут по одному шару. Какова вероятность того, что из первой урны взят красный шар, а из второй – чёрный ?
  7. Карточки с буквами Е,В,О,Р,Ь,Д сложены в коробку. Какова вероятность того, что вынимая 4 последовательно одну за другой получится слово «ДВОР»?
  8. Какова вероятность того, что выбранное наугад число от 1 до 100 содержит цифру 2?

Критерии оценивания:

№1 - 1 балл, №2 – 1 балл, №3 – 1 балл, №4 – 1 балл, №5 – 2 балла, №6 – 2 балла, №7 – 1 балл, №8 – 2 балла.

Итого 11 баллов:11 баллов – оценка «5», 8 баллов – оценка «4», 6 баллов – оценка «3», 5 баллов и менее – оценка «2».

**Практическое занятие №21**

**«Закон распределения и числовые характеристики дискретной случайной величины»**

***Цель*:** сформировать умения и навыки представление числовых данных при решении прикладных задач.

**Оборудование**: тетрадь для выполнения практической работы, ручка.

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1.Повторите теоретические положения по теме.  2.Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д.  3.Выполните задание, согласно своего варианта. |

**Теоретический материал**

1. Вероятность того, что событие А наступит ровно m раз при проведении n независимых испытаний, каждый из которых имеет ровно два исхода вычисляется по формуле Бернулли



*Пример 1*: Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,2. Найти вероятность, что из 6 приобретенных билетов 2 окажутся выигрышными.

*Решение:*



1. Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, равна



*Пример 2*: Прибор состоит из шести элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за определенное время равна 0,6. Для безотказной работы прибора необходимо, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность, что за данное время прибор будет работать безотказно?

*Решение*:



1. Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, наступит не менее m1 и не более m2 раз вычисляется по формуле



*Дискретная случайная величина и ее числовые характеристики*

Случайная величина Х – это числовая функция , определенная на пространстве элементарных событий. Случайные величины, имеющие счетные множества возможных значений, называются дискретными. Дискретная случайная величина определена, если известны все ее значения и соответствующие им вероятности. Соотношение между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями называют распределением вероятностей случайной величины. Для дискретной случайной величины это соответствие может быть записано в виде таблицы:



|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | x1 | x2 | … | xn |
| pi | p1 | p2 | … | pn |

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины Х называют сумму произведений всех ее возможных значений на соответствующие им вероятности



Дисперсией дискретной случайной величины Х называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания . Дисперсия дискретной случайной величины вычисляется по формулам:



Средним квадратичным отклонением дискретной случайной величины называют корень квадратный из дисперсии .



Если случайная величина Х имеет биномиальное распределение вероятностей, то



*Пример 1*: Случайная величина Х задана таблицей распределения вероятностей. Найти М(Х), D(Х), σ(Х).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| хi | 2 | 5 | 8 | 9 |
| рi | 0,1 | 0,4 | 0,3 | 0,2 |

*Решение:*



**Ход занятия**

1.Запишите название, номер практического занятия и ее цель.

2.Укажите номер задания.

3.Выполните задания.

1. Вероятность того, что расход электроэнергии на продолжении одних суток не превысит установленной нормы равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

2. Найти вероятность осуществления от одного до трех разговоров по телефону при наблюдении шести независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,6.

3. Прибор состоит из пяти элементов, включенных в цепь параллельно и работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за время Т равна 0,5. Для безаварийной работы прибора достаточно, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность того, что за время Т прибор будет работать безотказно?

4. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету =0,3. Какова вероятность того, что из семи приобретенных билетов три билета окажутся выигрышными?

5. Магазин получил 40 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0,04. Найти наиболее вероятное число нестандартных деталей в этой партии.

6. Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,8. Найдя вероятности возможного числа появления бракованных деталей среди 5 отобранных, найти наивероятнейшее число появления бракованных деталей из 5 отобранных, указав его вероятность.

7. Сколько раз необходимо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее выпадение тройки было равно 10?

8. Для данного участника игры вероятность набросить кольцо на колышек =0,3. Какова вероятность того, что при шести бросках 3 кольца окажутся на колышке?

9. На самолете имеются 4 одинаковых двигателя. Вероятность нормальной работы каждого двигателя в полете равна р. Найти вероятность того, что в полете могут возникнуть неполадки в одном двигателе.

10. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,4. Что вероятнее ожидать: отказ двух приборов при испытании четырех или отказ трех приборов при испытании шести, если приборы испытываются независимо друг от друга?

11. Вероятность того, что на некотором предприятии расход электроэнергии не превысит суточной нормы равна 0,8. Какова вероятность того, что в течение пяти рабочих дней из семи перерасхода электроэнергии не будет?

12. Найти числовые характеристики дискретных случайных величин:

1. Найти математическое ожидание случайной величины Х, зная закон ее распределения:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| хi | 3 | 5 | 2 |
| рi | 0,1 | 0,6 | 0,3 |

13. Найти дисперсию случайной величины Х, которая задана следующим законом распределения:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| хi | 1 | 2 | 5 |
| рi | 0,3 | 0,5 | 0,2 |

14.Найти дисперсию случайной величины Х, которая задана следующим законом распределения:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| хi | 2 | 3 | 5 |
| рi | 0,1 | 0,6 | 0,3 |

Критерии оценивания:

№1 - №4 – 1 балл, №5 – 2 балла, №6 – 2 балла, №7 – 1 балл, №8 – 2 балла, №9 – 2 балла, №10 -№11– 2 балла, №12-№14 – 3 балла .

Итого 26 баллов:26 баллов – оценка «5», 19 баллов – оценка «4», 13 баллов – оценка «3», 12 баллов и менее – оценка «2»

**Практическое занятие №22**

**«Теория граф»**

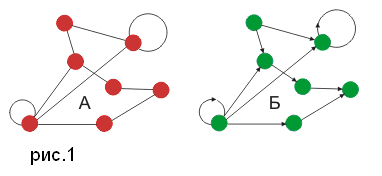
**Цель**: отработать на примерах основные понятия теории графов, научить строить графы по матрице смежности, по графу составлять матрицу смежности.

**Оборудование**: тетрадь для выполнения практической работы, ручка.

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1.Повторите теоретические положения по теме.  2.Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д.  3.Выполните задание, согласно своего варианта. |

**Теоретический материал**

Граф – система, которая интуитивно может быть рассмотрена как множество кружков и множество соединяющих их линий (рис. 1).



Кружки называются вершинами графа, линии со стрелками – дугами, без стрелок – ребрами. Граф, в котором направление линий не выделяется (все линии являются ребрами), называется неориентированным (рис. 1, А); граф, в котором направление линий принципиально (линии являются дугами) называется ориентированным (рис. 1, Б).

Опр. 1. Задано конечное множество *X*, состоящее из *n* элементов (*X =* {*1, 2,…, n*}), называемых вершинами графа, и подмножество V декартова произведения X ×X, то есть , называемое множеством дуг, тогда ориентированным графом G называется совокупность (X, V).

Опр. 2. Неориентированным графом называется совокупность множества X и множества неупорядоченных пар элементов, каждый из которых принадлежит множеству X.

Дугу между вершинами i и j, , будем обозначать (i, j). Число дуг графа будем обозначать m (V = ()).

Опр. 3. Подграфом называется часть графа, образованная подмножеством вершин вместе со всеми ребрами (дугами), соединяющими вершины из этого множества. Если из графа удалить часть ребер (дуг), то получим частичный граф.

Опр. 4. Две вершины называются смежными, если они соединены ребром (дугой). Смежные вершины называются граничными вершинами соответствующего ребра (дуги), а это ребро (дуга) – инцидентным соответствующим вершинам.

Опр.5. Путем называется последовательность дуг (в ориентированном графе), такая, что конец одной дуги является началом другой дуги.

Опр. 5.1. Простой путь – путь, в котором ни одна дуга не встречается дважды.

Опр. 5.2. Элементарный путь – путь, в котором ни одна вершина не встречается дважды.

Опр. 5.3. Контур – путь, у которого конечная вершина совпадает с начальной вершиной.

Опр. 5.4 Длиной пути (контура) называется число дуг пути (или сумма длин его дуг, если последние заданы).

Опр.6. Граф, для которого из (i, j) V следует (j, i)  V называется симметрическим.

Опр. 7. Если из (i, j) V следует, что (j, i) V, то соответствующий граф называется антисимметрическим.

Опр. 8.1. Цепью называется множество ребер (в неориентированном графе), которые можно расположить так, что конец (в этом расположении) одного ребра является началом другого.

Опр. 8.2. Цепь – последовательность смежных вершин.

Опр. 9. Замкнутая цепь называется циклом.

Опр. 10.1. Элементарная цепь (цикл, путь, контур), проходящая через все вершины графа называется гамильтоновой цепью (соответственно – циклом, путем, контуром).

Опр. 10.2. Простая цепь (цикл, путь, контур), содержащая все ребра (дуги) графа называется эйлеровой цепью (соответственно – циклом, путем, контуром).

Опр. 11. Если любые две вершины графа можно соединить цепью, то граф называется связным. Если граф не является связным, то его можно разбить на связные подграфы, называемые компонентами.

Опр. 12. Связностью графа называется минимальное число ребер, после удаления которых граф становится несвязным. Для ориентированных графов, если любые две вершины графа можно соединить путем, то граф называется сильно связным. Связный граф, в котором существует эйлеров цикл, называется эйлеровым графом.

Опр. 13. В неориентированном графе степенью вершины i называется число инцидентных ей ребер. Очевидно,. Граф, степени всех вершин которого равны n – 1, называется полным. Граф, все степени вершин которого равны, называется однородным.

Опр. 14. Вершина, для которой не существует инцидентных ей ребер (= 0) называется изолированной. Вершина, для которой существует только одно инцидентное ей ребро ( = 1) называется висячей.

Опр. 15. Определим матрицу смежности графа как квадратную матрицу n ×n, элемент  которой равен единице, если (i, j) V, и нулю, если (i, j) V, i, jX. Для неориентированного графа матрица смежности всегда симметрическая.

Опр. 16. Определим матрицу инциденций для ребер графа как прямоугольную матрицу n×m, элемент  которой равен единице, если вершина i инцидентна ребру j, и нулю в противном случае, i = 1, n, j = 1, m.

Опр. 17. Матрица инциденций для дуг графа – прямоугольная матрицу m xn, элемент rij которой равен плюс единице, если дуга исходит из вершины i, минус единице, если дуга  заходит в вершину i, и нулю в остальных случаях, i = 1, n, j = 1, m

Опр. 18. Деревом называется связный граф без простых циклов, имеющий не менее двух вершин. Для дерева m = n – 1, а число висячих вершин равно  Легко показать, что в дереве любые две вершины связаны единственной цепью.

Опр. 19. Прадеревом называется ориентированное дерево, у которого одна из вершин, называемая корнем, не имеет заходящих дуг, а степени захода остальных вершин равны единице.

Опр. 20. Плоским (планарным) называется граф, который можно изобразить на плоскости так, что различным вершинам соответствуют различные кружки и никакие два ребра не имеют общих точек, отличных от их границ (не пересекаются). Для плоского графа существует понятие грани – части плоскости, ограниченной ребрами и не содержащей внутри себя ни вершин, ни ребер.

Опр. 21. Степенью грани называется число ее граничных ребер (висячие ребра считаются дважды).

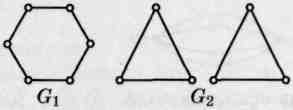
Любому связному плоскому графу G можно поставить в соответствие двойственный ему связный плоский граф G\*, определяемый следующим образом: каждой грани графа G соответствует вершина графа G\*, каждому ребру V графа G, являющемуся граничным для граней z1 и z2, соответствует ребро V\* графа G\*, соединяющее соответствующие граням z1 и z2 вершины.

Задача 1.Докажите, что в полном графе с n вершинами  рёбер.

Решение. Каждой вершине в полном графе с n вершинами принадлежит n-1 ребро, но в произведении  каждое ребро учтено дважды (так как одно ребро инцидентно двум вершинам). Следовательно, число рёбер в полном графе с n вершинами равно .

Задача 2.Может ли так случиться, что в одной компании из шести человек каждый знаком с двумя и только с двумя другими?

Решение Участников этой компании изобразим вершиной графа (см. рис.), а отношение знакомства между двумя участниками – ребром. Изобразим графы, которые могут соответствовать данной компании.



Про граф  говорят, что он связный, так как из каждой вершины по рёбрам можно попасть в любую другую. Делаем вывод, что в этом случае каждый через своих знакомых может познакомиться со всеми остальными.

Про граф  говорят, что он несвязный, так как состоит из двух простых циклов. Делаем вывод, что граф соответствует двум компаниям, участники одной из них могут быть не знакомы с участниками другой.

**Ход занятия**

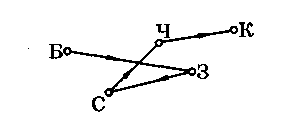
1.Запишите название, номер практического занятия и ее цель.

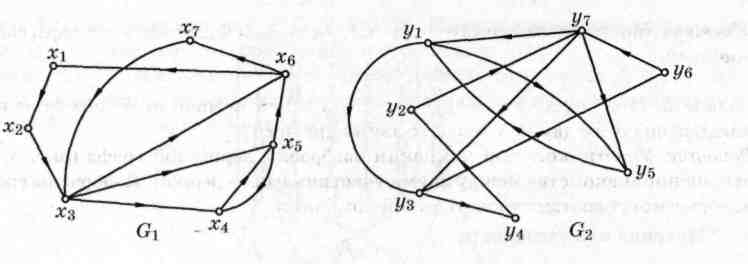
2.Укажите вариант, номер задания.

3.Выполните задания.

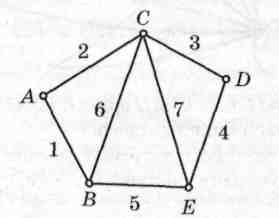
**Вариант 1.**

1. Из пункта А в пункт В выехали пять машин одной марки разного цвета: белая, чёрная, красная, синяя, зелёная. Чёрная едет впереди синей, зелёная – впереди белой, но позади синей, красная впереди чёрной. Какая машина едет первой и какая последней?



2.Пусть даны графы  и  изображённый на рисунке.

Установите, изоморфны ли данные графы.

3.Для неориентированного графа, изображённого на рисунке, постройте матрицу смежности и матрицу инцидентности.

4.Задан граф  где      

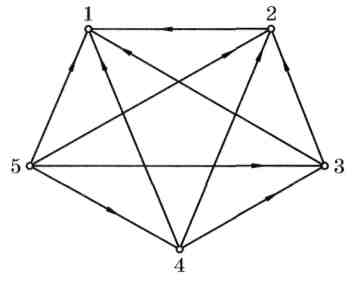
1. Задайте граф с помощью бинарного отношения, т. ею совокупности множества V и подмножества множества упорядоченных пар 

2. Изобразите орграф на рисунке.

3. Постройте матрицу смежности.

**Вариант 2**

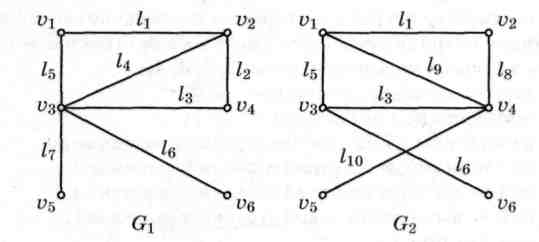
1.Дано множество  На этом множестве задано отношение f:  Постройте орграф данного отношения.



2.Дана матрица 

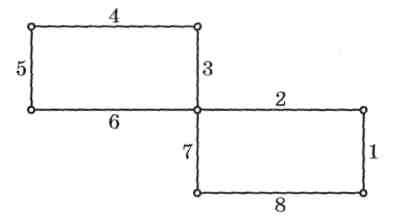
Постройте орграф, для которого данная матрица является матрицей смежности. Найдите матрицу инцидентности орграфа.

3.Пусть даны два графа , 



Изобразите геометрически объединение графов  пересечение графов  и сумму по модулю два 

4.Найдите эйлеров цикл в эйлеровом графе



Критерии оценивания:

№1 - 1 балл, №2 – 2 балла, №3 – 3 балла, №4 – 4 балла.

Итого 10 баллов:10 баллов – оценка «5», 8 баллов – оценка «4», 5 баллов – оценка «3», 4 балла и менее – оценка «2»

**Практическое занятие №23**

**«Использование математических объектов с использованием прикладных задач»**

**Цель**: отработать навыки использования математических функций для решения прикладных задач, построения графиков функций.

**Оборудование**: тетрадь для выполнения практического занятия, ручка, компьютерный класс.

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1.Повторите теоретические положения по теме.  2.Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д.  3.Выполните задание, согласно своего варианта. |

**Ход занятия**

1.Запишите название, номер практического занятия и ее цель.

2.Укажите номер задания.

4.Выполните задания.

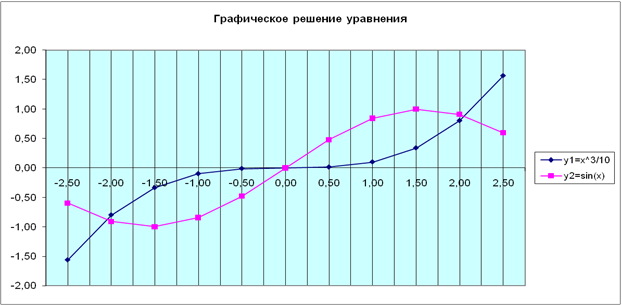
**Задание 1.**

С использованием компьютерной модели в электронных таблицах найти приближенное (графическое) решение уравнения **x3/10 = sin x.**

**Выполнение задания:**

1. Ввести формулы функций и заполнить таблицу значений функций на интервале от -2,5 до 2,5 с шагом 0,5.
2. Построить диаграмму. Для этого выделить *таблицу значений функции* и воспользоваться кнопкой *Мастер диаграмм*. Выбрать *график*. Установить *линии сетки* для оси х – *промежуточные*, для оси y – *снять*. Внести *Заголовок* диаграммы *Таблица значений функции*.
3. Определить по графику приближенно корни уравнения.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Таблица значений функции** | | | | | | | | | | | |
| х | -2,50 | -2,00 | -1,50 | -1,00 | -0,50 | 0,00 | 0,50 | 1,00 | 1,50 | 2,00 | 2,50 |
| y1=x^3/10 | -1,56 | -0,80 | -0,34 | -0,10 | -0,01 | 0,00 | 0,01 | 0,10 | 0,34 | 0,80 | 1,56 |
| y2=sin(x) | -0,60 | -0,91 | -1,00 | -0,84 | -0,48 | 0,00 | 0,48 | 0,84 | 1,00 | 0,91 | 0,60 |

****

**Задание 2.**

С использованием компьютерной модели в электронных таблицах найти приближенное значение корней уравнения **x3/10 = sin x** с заданной точностью с использованием метода *Подбор параметра.*

**Выполнение задания:**

1. При использовании метода *Подбора параметров* для решения уравнений вида f(x) = g(x) вводят вспомогательную функцию y(x) = f(x) - g(x) и находят с требуемой точностью значения x точек пересечения графика функции y(x) с осью абсцисс.
2. Ввести формулы функций и заполнить таблицу значений функций на интервале от -2,5 до 2,5 с шагом 0,5.
3. Установить точность представления чисел в ячейках с точностью до 4 знаков после запятой.
4. Построить диаграмму. Для этого выделить *таблицу значений функции* и воспользоваться кнопкой *Мастер диаграмм*. Выбрать *график*. Установить *линии сетки* для оси х – *промежуточные*, для оси y – *снять*. Внести *Заголовок* диаграммы *Таблица значений функции*.
5. Определить по графику приближенно корни уравнения.
6. Выделить ячейку, содержащую значение функции наиболее близкое к нулю, например, $K$3. Ввести команду *Сервис - Подбор параметра*.
7. На панели *Подбор параметра* в поле *Конечное значение* ввести требуемое значение функции (в данном случае 0). В поле изменяемая ячейка ввести адрес ячейки $K$2, в которой будет производиться подбор значения аргумента.
8. На панели *Результат подбора* параметра будет выведена информация о величине подбираемого и подобранного значения.
9. В ячейке аргумента К2 появиться подобранное значение 2,0648. Повторить подбор параметра для ячейки значения функции С3. В ячейке аргумента С2 появиться подобранное значение – 2,0648.
10. Таким образом, корни уравнения с точностью до четырёх знаков после запятой найдены: х1 = -2,0648, х2 = 0,0000, х3 = 2,0648.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Таблица значений функции** | | | | | | | | | | | | |
|  | -2,5000 | -2,0000 | -1,5000 | -1,0000 | -0,5000 | 0,0000 | 0,5000 | 1,0000 | 1,5000 | 2,0648 | 2,5000 | |
| y1=x^3/10-sin(x) | -0,9640 | 0,1093 | 0,6600 | 0,7415 | 0,4669 | 0,0000 | -0,4669 | -0,7415 | -0,6600 | -0,0001 | 0,9640 | |



**Задание 3.**

Используя метод *Подбора параметров*, найти корни уравнения -х2 = 5х-3 на промежутке от 0 до 5 с шагом 0,25.

Критерии оценивания:

№1 - 1 балл, №2 – 2 балла, №3 – 3 балла.

Итого 6 баллов:6 баллов – оценка «5», 3 балла – оценка «4», 1 балл – оценка «3», менее 1 – оценка «2»

**Практическое занятие №24**

**«Основные приемы решения уравнений, неравенств и систем»**

***Цель:*** сформироватьумения и навыки решения уравнений, неравенств и систем различными приемами и методами.

**Оборудование**: тетрадь для выполнения практического занятия, ручка.

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1.Повторите теоретические положения по теме.  2.Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д.  3.Выполните задание, согласно своего варианта. |

**Теоретический материал**

1.Прочитайте §27, стр 234,236, §28, стр 241-244

Пример1. Решите уравнение http://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char00.png6−xhttp://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char01.pnghttp://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char00.pngx−2http://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char01.pnghttp://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char00.pngx+3http://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char01.pnghttp://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char00.pngx+9http://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char01.png=24x2 . Найти целые корни.

Решение: Для успешного решения такого уравнения надо раскрыть скобки в парах, так чтобы выражения с переменной были похожи:

а) Если http://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char00.png6−xhttp://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char01.pnghttp://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char00.pngx−2http://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char01.png=−x2+8x−12  и http://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char00.pngx+3http://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char01.pnghttp://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char00.pngx+9http://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char01.png=x2+12x+27 , то выражения с переменной совсем не похожи;

б) Если http://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char00.png6−xhttp://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char01.pnghttp://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char00.pngx+3http://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char01.png=−x2+3x+18  и http://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char00.pngx−2http://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char01.pnghttp://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char00.pngx+9http://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char01.png=x2+7x−18 , то выражения с переменной можно считать похожими.

Тогда http://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char00.png6−xhttp://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char01.pnghttp://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char00.pngx−2http://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char01.pnghttp://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char00.pngx+3http://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char01.pnghttp://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char00.pngx+9http://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char01.png=http://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char00.png3x−x2+18http://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char01.pnghttp://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char00.png7x+x2−18http://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char01.png=24x2 . Так как x=0 не является корнем уравнения, то можно разделить на x2, получим

http://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char00.png3−x+http://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char01.pnghttp://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char00.png7+x− http://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char01.png=24 . Введем новую переменную y=x−. Уравнение примет вид http://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char00.png3−yhttp://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char01.pnghttp://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char00.png7+yhttp://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmex10/alpha/100/char01.png=24y2+4y+3=0http://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmsy10/alpha/100/char29.pngy1=−1http://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmmi10/alpha/100/char3B.pngy2=−3 .

Вернемся к замене

Ответ: x= −6http://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmmi10/alpha/100/char3B.png x=3.

Пример2. Решите уравнение  =0

Решение: =0

Ответ: x=0http://uztest.ru/jsmath/jsMath/fonts/cmmi10/alpha/100/char3B.png x=5

 Пример3. Решить уравнение 

Решение. Так как в данном примере n=3 - нечетное, то после возведения обеих частей уравнения в третью степень получим равносильное данному уравнение:

.

Ответ: .

Пример 4. Решите неравенство

http://konspekta.net/lectmaniaru/baza1/43038512663.files/image611.gif

Решение

http://konspekta.net/lectmaniaru/baza1/43038512663.files/image613.gif http://konspekta.net/lectmaniaru/baza1/43038512663.files/image615.gif http://konspekta.net/lectmaniaru/baza1/43038512663.files/image617.gif

-3< http://konspekta.net/lectmaniaru/baza1/43038512663.files/image619.gif http://konspekta.net/lectmaniaru/baza1/43038512663.files/image621.gif .

Ответ: ( http://konspekta.net/lectmaniaru/baza1/43038512663.files/image623.gif

**Ход занятия**

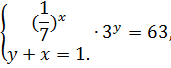
1.Запишите название, номер практического занятия и ее цель.

2.Укажите вариант, номер задания.

3.Выполните задания.

**Вариант 1.**

Решите:

* + - 1. image2717
      2. 27http://festival.1september.ru/articles/602945/Image9668.gif-http://festival.1september.ru/articles/602945/Image9669.gif = 0
      3. 
      4. http://konspekta.net/lectmaniaru/baza1/43038512663.files/image625.gif

**Вариант 2.**

Решите:

1. http://festival.1september.ru/articles/602945/Image9683.gif
2. http://konspekta.net/lectmaniaru/baza1/43038512663.files/image663.gif
3. http://konspekta.net/lectmaniaru/baza1/43038512663.files/image483.gif

E)image2750

F)

G)

Критерии оценивания:

A-C – 1 балл, D-E– 2 балла, F-G- 3 балла.

Итого 13 баллов:13 баллов – оценка «5», 10 баллов – оценка «4», 6 баллов – оценка «3», 5 баллов и менее – оценка «2».

**Практическое занятие №25**

**«Уравнения и неравенства с параметрами»**

***Цель:*** отработать навыки и умения основных приемов решения уравнений, неравенств, содержащих параметры.

**Оборудование**: тетрадь для выполнения практического занятия, ручка.

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1.Повторите теоретические положения по теме.  2.Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д.  3.Выполните задание, согласно своего варианта. |

**Теоретический материал**

1. Линейные уравнения и неравенства с параметрами

Линейная функция: image003 – уравнение прямой с угловым коэффициентом image005. Угловой коэффициент равен тангенсу угла наклона прямой к положительному направлению оси image007.

Линейные уравнения с параметрами вида image009

Если image011, уравнение имеет единственное решение.

Если image013, то уравнение не имеет решений, когда image015, и уравнение имеет бесконечно много решений, когда image017.

Пример 1. Решить уравнение |3 – *x*| = *a*.

Решение:

1. *a* > 0, => 3 – *x* = ±*a*, => *x* = 3 ± *a*
2. *a* = 0, => 3 – *x* = 0. => *x* = 3
3. *a* < 0, => решений нет.

Ответ: *x*1,2 = 3 ±*a* при *a* > 0; *x* = 3 при *a* = 0; решений нет при *a* < 0.

Линейные неравенства с параметрами

Пример 2. Для всех значений параметра а решить неравенство .

Решение:

 . Если скобка перед *x* положительна, т.е. при , то . Если скобка перед *x* отрицательна, т.е. при , то . Если же *a* = 0 или a = , то решений нет. Ответ:  при ;  при ;решений нет при *a* = 0 или a = .

2. Квадратные уравнения и неравенства с параметрами

Квадратичная функция: .

В множестве действительных чисел это уравнение исследуется по следующей схеме.

1. Если *a* = 0, то имеем линейное уравнение *bх + c*=0.
2. Если *a* ≠ 0 и дискриминант уравнения *D = b² – 4ac* < 0, то уравнение не имеет действительных решений.
3. Если, *a* ≠ 0 и *D* = 0, то уравнение имеет единственное решение х = или, как ещё говорят, совпадающие корни *х*­1 = *х*2 = .
4. Если *a* ≠ 0 и *D* > 0, то уравнение имеет два различных корня .

Пример 3. При каких значениях *a* уравнение *x*² – *ax* + 1 = 0 не имеет действительных корней?

Решение:

*x*² – *ax* + 1 = 0

*D* = *a*² – 4 · 1 = *a*² – 4



*a*² – 4 < 0 + – +

(*a* – 2)(*a* + 2) < 0 –2 2 Ответ: при a Є (–2; 2)

**Ход занятия**

1.Запишите название, номер практического занятия и ее цель.

2.Укажите номер задания.

3.Выполните задания.

1.Найдите все значения http://latex.codecogs.com/gif.latex?a, при которых уравнение имеет единственное решение.

http://latex.codecogs.com/gif.latex?\sqrt%7bx%5e4+(a-5)%5e4%7d=&space;\left&space;|&space;x+a-5\right&space;|+\left&space;|&space;x-a+5\right&space;|

2.При всех *а* решите неравенство: https://urokidoma.org/uploads/e/8/f/e8f1cbb4548e6073127b27f2c1fb8944a324195c/phpKn4GgW_Fajl-k-uroku---Zadacha-18-Parametry-Uravneniya-s-parametrom-26-02-17_3.png.

3.При каких значениях параметра *b* уравнение не имеет корней:

https://urokidoma.org/uploads/e/8/f/e8f1cbb4548e6073127b27f2c1fb8944a324195c/phpKn4GgW_Fajl-k-uroku---Zadacha-18-Parametry-Uravneniya-s-parametrom-26-02-17_6.png

4.Для всех значений параметра *а* решить систему уравнений

https://urokidoma.org/uploads/e/8/f/e8f1cbb4548e6073127b27f2c1fb8944a324195c/phpKn4GgW_Fajl-k-uroku---Zadacha-18-Parametry-Uravneniya-s-parametrom-26-02-17_12.png

5.При каких значениях https://urokidoma.org/uploads/e/8/f/e8f1cbb4548e6073127b27f2c1fb8944a324195c/phpKn4GgW_Fajl-k-uroku---Zadacha-18-Parametry-Uravneniya-s-parametrom-26-02-17_18.png корни уравнения https://urokidoma.org/uploads/e/8/f/e8f1cbb4548e6073127b27f2c1fb8944a324195c/phpKn4GgW_Fajl-k-uroku---Zadacha-18-Parametry-Uravneniya-s-parametrom-26-02-17_19.png положительны?

6.Найти значения параметра *а*, при которых среди корней уравнения имеется ровно один отрицательный: https://urokidoma.org/uploads/e/8/f/e8f1cbb4548e6073127b27f2c1fb8944a324195c/phpKn4GgW_Fajl-k-uroku---Zadacha-18-Parametry-Uravneniya-s-parametrom-26-02-17_20.png

7.При каких значениях параметра https://urokidoma.org/uploads/e/8/f/e8f1cbb4548e6073127b27f2c1fb8944a324195c/phpKn4GgW_Fajl-k-uroku---Zadacha-18-Parametry-Uravneniya-s-parametrom-26-02-17_18.png уравнение  имеет единственный корень?

https://urokidoma.org/uploads/e/8/f/e8f1cbb4548e6073127b27f2c1fb8944a324195c/phpKn4GgW_Fajl-k-uroku---Zadacha-18-Parametry-Uravneniya-s-parametrom-26-02-17_22.png

8.При каких значениях *m* корни уравнения 4*x*² – (3*m*+ 1) *x*– *m*– 2 = 0 лежат в промежутке между –1 и 2?

9.Найти все значения параметра *а*, при которых меньший корень уравнения *x*² + (*a* + 1) *x*+ 3 = 0 лежал в интервале (–1; 3)

10.При каких целых *а* неравенство верно для любого значения *х*:

https://urokidoma.org/uploads/e/8/f/e8f1cbb4548e6073127b27f2c1fb8944a324195c/phpKn4GgW_Fajl-k-uroku---Zadacha-18-Parametry-Uravneniya-s-parametrom-26-02-17_24.png

Критерии оценивания:

№1 - №4 – 1 балл, №5 – 2 балла, №6 – 2 балла, №7 – 1 балл, №8 – 2 балла, №9 – 2 балла, №10 – 2 балла.

Итого 15 баллов:15 баллов – оценка «5», 10 баллов – оценка «4», 7 баллов – оценка «3», 6 баллов и менее – оценка «2».

**Практическое занятие №26**

**«Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля»**

***Цель*:** сформировать умения и навыки решения уравнений и неравенств с двумя переменными

**Оборудование**: тетрадь для выполнения практического занятия, ручка.

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1.Повторите теоретические положения по теме.  2.Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д.  3.Выполните задание, согласно своего варианта. |

**Теоретический материал**

Существует два числа х и у, одно больше другого на 5. Как записать соотношение между ними? (х – у = 5) это и есть линейное уравнение с двумя переменными. Сформулируем по аналогии с определением линейного уравнения с одной переменной определение линейного уравнения с двумя переменными (Линейным уравнением с двумя переменными называется уравнение вида *ax* + *by* = *c*, где *a,b* и *c* – некоторые числа, а *x* и *y* –переменные).

Уравнение *x* – *y* = 5 при x = 8, y = 3 обращается в верное равенство 8 – 3 = 5. Говорят, что пара значений переменных x = 8, y = 3 является решением этого уравнения.

- Сформулируйте определение решения уравнения с двумя переменными (Решением уравнения с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая это уравнение в верное равенство)

Пары значений переменных иногда записывают короче: (8;3). В такой записи на первом месте пишут значение x а на втором - y.

Уравнения с двумя переменными, имеющие одни и те же решения (или не имеющие решений), называются равносильными.

Уравнения с двумя переменными обладают такими же свойствами, как и уравнения с одной переменной:

1. Если в уравнении перенести любой член из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение равносильное данному.
2. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число(не равное нулю), то получится уравнение равносильное данному.

**Ход занятия**

1.Запишите название, номер практического занятия и ее цель.

2.Укажите номер задания.

3.Выполните задания.

1. Решите систему уравнений:

a) b)

c) d)

2.Решите систему уравнений графически:

a) b)

Критерии оценивания:

№1 -4 балла, №2 – 4 балла. Итого 8 баллов:8 баллов – оценка «5», 6 баллов – оценка «4», 5 баллов – оценка «3», 4 балла и менее – оценка «2».

**Практическое занятие №27**

**«Перпендикуляр и наклонная к плоскости»**

***Цель:****-*рассмотреть связь между перпендикуляром, наклонной, проекцией наклонной;

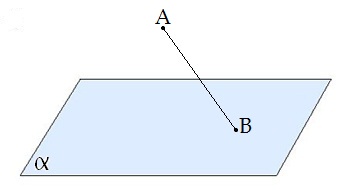
-систематизировать и закрепить знания и умения в ходе решения задач.

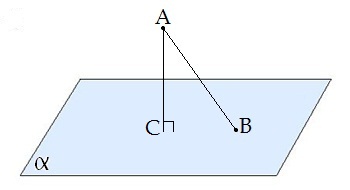
**Оборудование**: тетрадь для выполнения практическое занятие, ручка, карандаш, линейка, ластик.

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1.Повторите теоретические положения по теме.  2.Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д.  3.Выполните задание, согласно своего варианта. |

**Теоретический материал**

Наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости. Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется основанием наклонной.

AB - наклонная.  
B - основание наклонной.

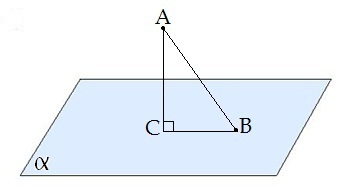
Перпендикуляром, проведенным из данной точки к данной плоскости, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости. Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется основанием перпендикуляра.

AC - перпендикуляр.

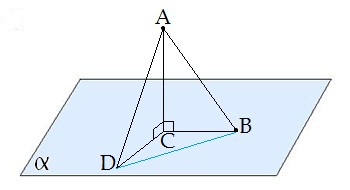
C - основание перпендикуляра.

 Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости. Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется проекцией наклонной.

CB - проекция наклонной AB на плоскость α.

Треугольник ABC прямоугольный.

Углом между наклонной и плоскостью называется угол между этой наклонной и её проекцией на плоскость CBA - угол между наклонной AB и плоскостью α.Если AD>AB, то DC>BC

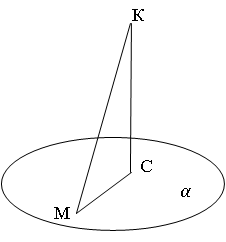
 Если из данной точки к данной плоскости провести несколько наклонных, то большей наклонной соответствует большая проекция.DAB - угол между наклонными  
DCB - угол между проекциями наклонных  
Отрезок DB - расстояние между основаниями наклонных.

Применение знаний при решении типовых заданий.

Задача1.

Из точки К, на расстоянии 9 см, к плоскости опущен перпендикуляр КС и проведена наклонная КМ, равная 15 см.

Найти проекцию наклонной. ( Устно, менять условие, найти наклонную, найти перпендикуляр)

Решение:

Рассмотрим прямоугольный треугольник КСМ: (КС-перпендикуляр, по условию), по теореме Пифагора:

=12 (см)

Ответ: Проекция наклонной МС=12 см.

Задача2

К плоскости α проведена наклонная AB (A∈α). Длина наклонной равна 8 см, наклонная с плоскостью образует угол 60°. Вычисли, на каком расстоянии от плоскости находится точка B.

Решение:

В

А

О

Рассмотрим треугольник АВО: прямоугольный, ВО-

расстояние от точки В до плоскости перпендикулярно АО. Следовательно угол В=30, а АО =4 см, как катет лежащий против угла в 30.

По теореме Пифагора:

В = (см)

Ответ: 4 см.

Задача 3

АВ перпендикулярно плоскости α. Наклонная AС  образует с плоскостью α , угол 60, а наклонная АD равна . Длина проекции наклонной ВD равна 2 см.

Вычисли длину наклонной АС.

А

Решение:

D

Рассмотрим о теореме Пифагора:

;

С

В

АВ=.

Угол АСВ = 60(по условию), следовательно САВ=30.

Рассмотрим , ;

АС =;

АС = 2.

Ответ: 2см.

**Ход занятия**

1.Запишите название, номер практического занятия и ее цель.

2.Укажите вариант, номер задания.

3.Выполните задания.

**Вариант 1**

1) Прямая*a* пересекает плоскость β в точке C, и образует с плоскостью угол 30°. В∈*a*, точка А - проекция точки В на плоскость β. ВC=12 см. Найдите ВА

2) К плоскости α проведена наклонная AС (A∈α). Длина наклонной равна 24 см, наклонная с плоскостью образует угол 60°. Вычислите, на каком расстоянии от плоскости находится точка С.

3) Наклонная AК с плоскостью α образует угол 30, а наклонная КC с плоскостью α образует угол 45. Длина перпендикуляра КB равна 12 см.

Вычислите длины наклонных.

**Вариант 2**

1) К плоскости α проведена наклонная, длина которой равна 25 см, проекция наклонной равна 15 см . На каком расстоянии от плоскости находится точка, из которой проведена наклонная?

2) К плоскости α проведена наклонная AB (A∈α). Длина наклонной равна 12 см, наклонная с плоскостью образует угол 45°. Вычисли, на каком расстоянии от плоскости находится точка B.

3) Проекции наклонных AD и DC на плоскости α равны соответственно 8 см и 4 см, а угол между ними равен  120°. Вычислите расстояние между концами проекций наклонных.

**Вариант 3**

1) Прямая *a* пересекает плоскость β в точке C, и образует с плоскостью угол 30°. P∈*a*, точка N - проекция точки P на плоскость β. PN=5 см. Найдите PC.

2) К плоскости α проведена наклонная AC (A∈α). Длина наклонной равна 16 см, наклонная с плоскостью образует угол 60°. Вычислите, на каком расстоянии от плоскости находится точка C.

3) Наклонная AD с плоскостью α образует угол 30, а наклонная DC с плоскостью α образует угол 45.Длина перпендикуляра DB равна 32 см.

Вычислите длины наклонных.

**Вариант 4**

1) Прямая *a* пересекает плоскость β в точке C, и образует с плоскостью угол 30°. P∈*a*, точка F - проекция точки P на плоскость β. PC=14 см. Найдите PF.

2) К плоскости α проведена наклонная AB (A∈α). Длина наклонной равна 12 см, наклонная с плоскостью образует угол 60°. Вычислите, на каком расстоянии от плоскости находится точка B.

3) Наклонная AD с плоскостью α образует угол 30, а наклонная DC с плоскостью α образует угол 45. Длина перпендикуляра DB равна 22 см.

Вычислите длины наклонных.

Задание 4 (для всех вариантов): верно ли утверждение (да или нет)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1. | Углом между двумя пересекающимися прямыми называется угловая мера меньшего из образовавшихся между ними углов. | 4. | Углом между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и перпендикуляром к плоскости. |
| 2. | Угол между параллельными прямыми равен 180. | 5. | Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися параллельными им прямыми. |
| 3. | Скрещивающиеся прямые называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90. | 6. | Углом между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость. |

Задание 5 (для всех вариантов): заполните пропуски

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1. | Пересечение угла, образованного двумя плоскостями и плоскости,... к линии их пересечения, является углом между плоскостями.   1. Перпендикулярной. 2. Параллельной. 3. Наклонной. | 4. | Углом между двумя скрещивающимися прямыми называется угол между двумя пересекающимися прямыми, соответственно … данным скрещивающимся прямым.   1. Перпендикулярными. 2. Параллельными. |
| 2. | Углом между двумя пересекающимися прямыми называют величину … из углов, определяемых этими прямыми.  1. Одного. 2. Меньшего. 3. Большего. | 5. | Угол между двумя пересекающимися плоскостями … от выбора секущей его плоскости, перпендикулярной линии пересечения данных плоскостей.  1. Не зависит. 2. Зависит. |
| 3. | Угол между параллельными плоскостями считается равным …  1. Нулю.  2. 180.  3. 90. | 6. | Угол между … плоскостями считается равным нулю.   1. Пересекающимися. 2. Перпендикулярными. 3. Параллельными. |

Критерии оценивания: №1 -1 балл, №2 -2 балла, №3 -3 балла, №4 -1 балл, №5 -1 балл. Итого 8 баллов:8 баллов – оценка «5», 6 баллов – оценка «4», 5 баллов – оценка «3», 4 балла и менее – оценка «2».

**Практическое занятие №28**

**«Взаимное расположение прямых и плоскостей»**

***Цель :****-*рассмотреть возможные случаи взаимного расположения прямых и

плоскостей в пространстве;

-сформировать навыки чтения и построения чертежей пространственных

конфигураций;

-применить полученные знания к решению геометрических задач.

**Оборудование**тетрадь для выполнения практического занятия, ручка, карандаш, линейка, ластик.

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1.Повторите теоретические положения по теме.  2.Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д.  3.Выполните задание, согласно своего варианта. |

**Теоретический материал**

Аксиомы стереометрии

* А1: Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость и притом только одна.
* А2: Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости, т.е. прямая лежит в плоскости или плоскость проходит через прямую.
* А3: Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.
* *Следствия из аксиом*

Теорема 1. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.

Теорема 2. Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.

Взаимное расположение прямых в пространстве

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Прямые лежат в одной плоскости | | Прямые лежат в разных плоскостях |
| Прямые параллельны  Лежат в одной плоскости и не пересекаются | Прямые пересекаются  Имеют только одну общую точку | Прямые скрещиваются |

*Взаимное расположение плоскостей в пространстве*

**α**

**β**

Плоскости пересекаются

Плоскости параллельны

**α**

**β**

*Признак параллельности плоскостей*

Теорема. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

*Признак перпендикулярности плоскостей*

Теорема. Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

**Ход занятия**

1.Запишите название, номер практического занятия и ее цель.

2.Укажите номер задания.

3.Выполните тест.

1. Сколько прямых можно провести через одну точку пространства?

          1) Ни одной.

          2) Одну.

          3) Две.

          4) Бесконечно много.

2. Сколько плоскостей можно провести через одну точку пространства?

          1) Ни одной.

          2) Одну.

          3) Две.

          4) Бесконечно много.

3. Сколько прямых можно провести через две точки пространства?

          1) Ни одной.

          2) Одну.

          3) Две.

          4) Бесконечно много.

4. Сколько плоскостей можно провести через две точки пространства?

          1) Ни одной.

          2) Одну.

          3) Две.

          4) Бесконечно много.

5. Сколько прямых можно провести через различные пары из трех точек пространства, не принадлежащих одной прямой?

          1) Ни одной.

          2) Три.

          3) Шесть.

          4) Бесконечно много.

6. Сколько плоскостей можно провести через три точки пространства, не принадлежащие одной прямой?

          1) Ни одной.

          2) Одну.

          3) Три.

          4) Бесконечно много.

7. Сколько плоскостей можно провести через три точки пространства, принадлежащие одной прямой?

          1) Ни одной.

          2) Одну.

          3) Три.

          4) Бесконечно много.

8. Сколько общих точек имеют две пересекающиеся плоскости?

          1) Одну.

          2) Две.

          3) Три.

          4) Бесконечно много.

9. В каком случае центры трех шаров принадлежат одной плоскости?

          1) Радиусы шаров совпадают.

          2) Центры шаров принадлежат одной прямой.

          3) Всегда.

          4) Никогда.

10. Сколько плоскостей можно провести через три вершины куба?

          1) Одну.

          2) Три.

          3) Шесть.

          4) Бесконечно много.

11. Какое наибольшее число прямых можно провести через различные пары из четырех точек пространства?

          1) Четыре.

          2) Пять.

          3) Шесть.

          4) Восемь.

12. Какое наибольшее число прямых можно провести через различные пары из пяти точек пространства?

          1) 5.

          2) 10.

          3) 15.

          4) 25.

13. Найдите число диагоналей прямоугольного параллелепипеда.

          1) 2.

          2) 4.

          3) 6.

          4) 8.

14. Найдите число диагоналей 6-угольной призмы.

          1) 6.

          2) 12.

          3) 9.

          4) 18.

15. Какой многоугольник лежит в основании пирамиды, имеющей 12 ребер?

          1) Треугольник.

          2) Четырехугольник.

          3) Шестиугольник.

          4) Двенадцатиугольник.

16. Какой многоугольник лежит в основании призмы, имеющей 36 ребер?

          1) Шестиугольник.

          2) Девятиугольник.

          3) Двенадцатиугольник.

          4) Тридцатишестиугольник.

17. Призма имеет 18 вершин. Какой многоугольник лежит в ее основании?

          1) Треугольник.

          2) Шестиугольник.

          3) Девятиугольник.

          4) Восемнадцатиугольник.

18. Пирамида имеет 10 вершин. Какой многоугольник лежит в ее основании?

          1) Пятиугольник.

          2) Шестиугольник.

          3) Восьмиугольник.

          4) Девятиугольник.

19. Призма имеет 18 диагоналей. Определите ее вид.

          1) Треугольная.

          2) Шестиугольная.

          3) Девятиугольная.

          4) Восемнадцатиугольная.

20. Сколько диагоналей имеет 7-угольная пирамида?

          1) Ни одной.

          2) 6.

          3) 7.

          4) 14.

21. Даны две параллельные прямые *a*и *b*. Через прямую *a*проходит плоскость , не совпадающая с плоскостью данных прямых. Определите взаимное расположение прямой *b*и плоскости http://geometry2006.narod.ru/Didakt10-11/Test1.files/image002.gif.

          1) *b*лежит в плоскости http://geometry2006.narod.ru/Didakt10-11/Test1.files/image002.gif.

          2) *b*пересекает плоскость http://geometry2006.narod.ru/Didakt10-11/Test1.files/image002.gif.

          3) *b*параллельна плоскости http://geometry2006.narod.ru/Didakt10-11/Test1.files/image002.gif.

          4) Нельзя определить.

22. Какое наибольшее число плоскостей можно провести через различные пары из трех параллельных прямых?

          1) Одну.

          2) Две.

          3) Три.

          4) Шесть.

23. Какое наибольшее число плоскостей можно провести через различные пары из четырех параллельных прямых?

          1) Одну.

          2) Две.

          3) Четыре.

          4) Шесть.

24. Через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость. Эти две плоскости пересекаются. Как расположена их линия пересечения относительно данных прямых?

          1) Параллельна им.

          2) Пересекает их.

          3) Совпадает с одной из них.

          4) Скрещивается с ними.

25. Даны две скрещивающиеся прямые *a*и *b* и точка *A*, принадлежащая прямой *a*. Как расположена прямая *a* по отношению к проходящей через точку *A* и прямую *b*плоскости?

          1) Прямая *a* пересекает плоскость.

          2) Прямая *a* параллельна плоскости.

          3) Прямая *a* лежит в плоскости.

          4) Нельзя определить.

26. Даны скрещивающиеся прямые *c*и *d*и точка *K*. Как относительно друг друга расположены плоскости, проходящие через точку *K*и прямую *c* и точку *K*и прямую *d*?

          1) Совпадают.

          2) Пересекаются.

          3) Параллельны.

          4) Нельзя определить.

27. Плоскость  пересекается с прямой *a*, которая параллельна плоскости . Как расположены относительно друг друга плоскости http://geometry2006.narod.ru/Didakt10-11/Test1.files/image002.gif и β?

          1) Параллельны.

          2) Совпадают.

          3) Пересекаются.

          4) Нельзя определить.

28. Найдите геометрическое место прямых, пересекающих две данные параллельные прямые.

          1) Параллельная им прямая, лежащая в плоскости данных прямых.

          2) Плоскость данных прямых.

          3) Прямая, параллельная плоскости данных прямых.

          4) Две пересекающиеся прямые.

29. Найдите геометрическое место прямых, проходящих через данную точку и параллельных данной плоскости.

          1) Прямая, параллельная данной плоскости и проходящая через данную точку.

          2) Две прямые, параллельные данной плоскости и проходящие через данную точку.

          3) Плоскость, параллельная данной плоскости и проходящая через данную точку.

          4) Окружность, проходящая через данную точку.

30. В каком случае параллельной проекцией двух параллельных прямых являются две точки?

          1) Прямые параллельны плоскости проектирования.

          2) Прямые параллельны направлению проектирования.

          3) Плоскость прямых совпадает с плоскостью проектирования.

          4) Плоскость прямых не параллельна направлению проектирования.

31. Отрезок параллелен плоскости проектирования. Сравните его длину *a* с длиной его проекции *a’*.

          1) *a* < *a’*.

2) *a* > *a’*.

          3) *a = a’*.

          4) *a’ =* 0.

32. Параллельной проекцией куба является квадрат. Как расположен куб относительно направления и плоскости проектирования?

          1) Два ребра параллельны плоскости проектирования.

          2) Две грани параллельны плоскости проектирования.

          3) Четыре ребра параллельны направлению проектирования.

          4) Две грани параллельны плоскости проектирования и четыре ребра параллельны направлению проектирования.

33. Найдите угол между пересекающимися диагоналями граней куба.

          1) 300.

          2) 450.

          3) 600.

          4) 900.

34. В кубе *A…D*1 найдите угол между прямыми *AD*1 и *CB*1.

          1) 300.

          2) 450.

          3) 600.

          4) 900.

35. Найдите геометрическое место прямых, перпендикулярных данной прямой и проходящих через данную на ней точку.

          1) Прямая, перпендикулярная данной прямой и проходящая через данную точку.

          2) Плоскость, перпендикулярная данной прямой.

          3) Плоскость, параллельная данной прямой.

          4) Плоскость, перпендикулярная данной прямой и проходящая через данную точку.

Критерии оценивания: №1 - №35 - 1балл.

Итого 35 баллов: 35-33 балла – оценка «5», 30 баллов – оценка «4», 20 баллов – оценка «3», 19 баллов и менее – оценка «2».

**Практическое занятие № 29**

**«Многогранники. Сечения многогранников»**

***Цель:*** закрепить знания и совершенствовать умения в решении геометрических задач на пространственные фигуры*.*

**Оборудование**: тетрадь для выполнения практического занятия, макеты пространственных фигур, ручка, карандаш, линейка, ластик.

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1.Повторите теоретические положения по теме.  2.Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д.  3.Выполните задание, согласно своего варианта. |

**Теоретический материал**

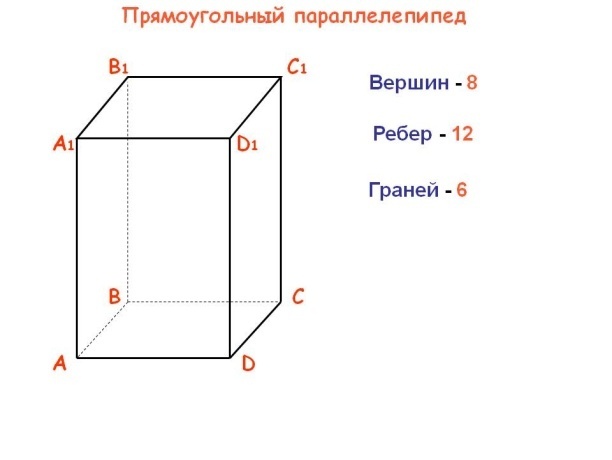
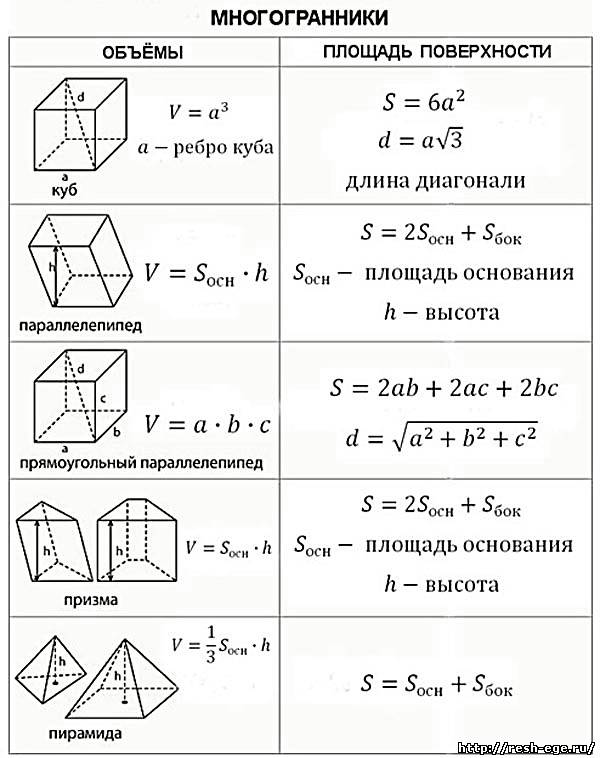
Правильный многогранник -выпуклый многогранник, грани которого являются правильными многоугольниками с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине которого сходится одно и то же число ребер.

Призма - это многогранник, две грани которого, многоугольники по форме, являются основаниями, остальные грани (боковые грани) имеют форму параллелограмма.

Правильной призмой - является призма, у которой в основаниях правильные многоугольники, а боковые грани равные прямоугольники.

Параллелепипед – многогранник, у которого шесть граней и каждая из них параллелограмм. Прямоугольный параллелепипед – это параллелепипед, у которого все грани прямоугольники.

Пирамида называется правильной, если её основанием является правильный многоугольник, при этом вершина такой пирамиды проецируется в центр ее основания.



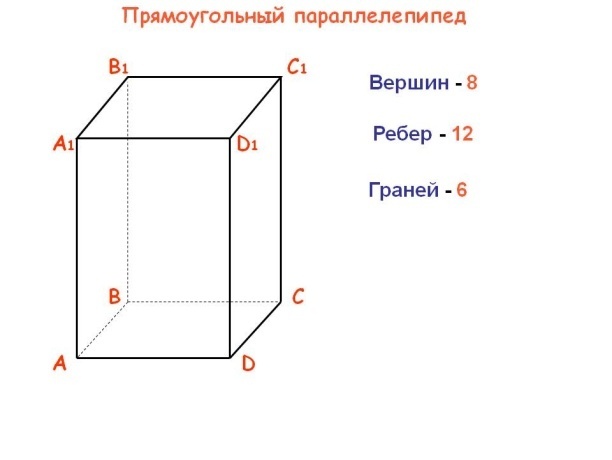
Задача 1. Нарисовать параллелепипед. Записать и перечислить все вершины, ребра и грани параллелепипеда.

Решение**:**

1) Вершины: A, B, C, D, A1, B1, C1, D1.

2) Ребра: AB, BC, CD, DA, A1B1, B1C1, C1D1, D1A1, AA1, BB1, CC1, DD1.

3) Грани: ABCD, A1B1C1D1, ABB1A1, BCC1B1, CDD1C1, ADD1A1.

Задача 2. ABCDA1B1C1D1 – прямоугольный параллелепипед, стороны основания которого 10 см и 15 см, а его боковое ребро равно 6 см. Найти параллелепипеда.

Дано: ABCDA1B1C1D1 – прямоугольный параллелепипед

АВ=10 см, ВС=15 см, АА1=6 см

Найти:

Решение:

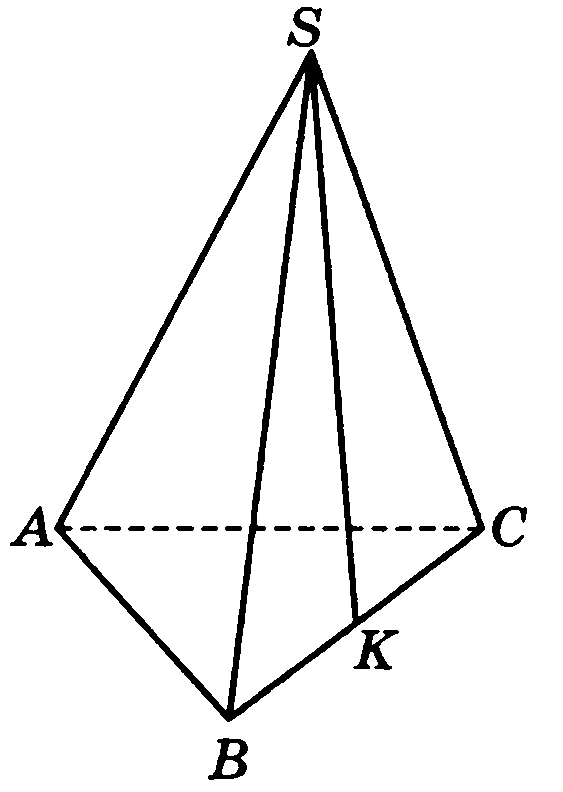
*Ответ:*

Задача 3. В основании правильной пирамиды – треугольник со стороной 12 см. Высота боковой грани равна 20 см. Найти пирамиды.

Дано: SABC – правильная пирамида

АВ=12 см, SК=20 см

Найти:

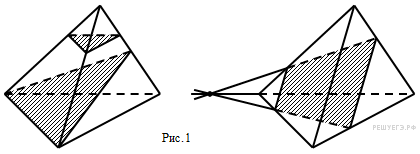
 Решение:

Так как в основании правильный треугольник, то , отсюда следует

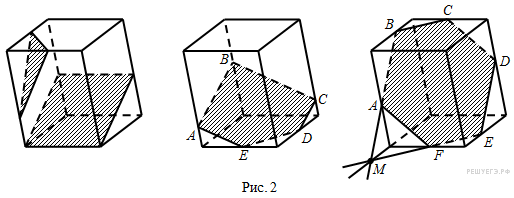
*Ответ:*

**Сечения**

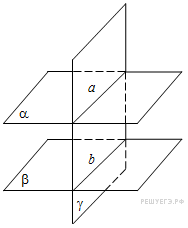
Секущей плоскостью многогранника называется любая плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного многогранника. Секущая плоскость пересекает грани многогранника по отрезкам. Многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки, называется сечением многогранника.



Тетраэдр имеет четыре грани, поэтому его сечениями могут быть только треугольники и четырехугольники (рис. 1). Параллелепипед имеет шесть граней. Его сечениями могут быть треугольники, четырехугольники, пятиугольники и шестиугольники (рис. 2).



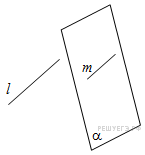
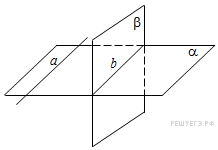
**Теоремы, используемые при построении сечений**

Теорема 1. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны. Поэтому секущая плоскость пересекает плоскости параллельных граней по параллельным прямым.

Теорема 2. Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

Теорема 3. Если прямая *l* параллельна какой либо прямой *m*, проведённой в плоскости https://ege.sdamgia.ru/formula/2a/2a6ccaea07db0dd364bbe96c2ca411ecp.png то она параллельна и самой плоскости https://ege.sdamgia.ru/formula/47/4732a703569514c5db685bc796a7ebafp.png

Теорема 4. Если прямая, лежащая в плоскости сечения, не параллельна плоскости некоторой грани, то она пересекается со своей проекцией на эту грань.



**Алгоритм построения сечений**

Для построения сечений рекомендуем пользоваться следующим алгоритмом.

1. Если две точки секущей плоскости лежат в плоскости одной грани, то проводим через них прямую. Часть прямой, лежащая в плоскости грани — сторона сечения.

2. Если прямая *a* является общей прямой секущей плоскости и плоскости какой-либо грани, то находим точки пересечения прямой *a* с прямыми, содержащими ребра этой грани. Полученные точки — новые точки секущей плоскости, лежащие в плоскостях граней.

3. Если никакие две из данных точек не лежат в плоскости одной грани, то строим вспомогательное сечение, содержащее любые две данные точки, а затем выполняем шаги 1, 2.

Для контроля правильности построенного сечения, проверяйте, что:

– все вершины сечения лежат на рёбрах многогранника;

– все стороны сечения лежат в гранях многогранника;

– в каждой грани многогранника лежит не более одной стороны сечения.

**Ход занятия**

1.Запишите название, номер практического занятия и ее цель.

2.Укажите вариант, номер задания.

3.Выполните задания.

|  |  |
| --- | --- |
| **Вариант 1** | **Вариант 2** |
| 1. Нарисовать пирамиду, в основании которой лежит треугольник. Записать и перечислить все вершины, ребра и грани пирамиды. | 1. Нарисовать треугольную призму, боковые ребра которой, перпендикулярны основанию. Записать и перечислить все вершины, ребра и грани призмы. |
| 2. Ребро куба равно 4 см. Найти и V куба. | 2. Дана правильная треугольная пирамида со стороной основания 3 см., а высота боковой грани равна 4 см. Найти и V пирамиды. |
| 3. В основании пирамиды лежит ромб с диагоналями 12 мм 16 мм, а высота боковой грани равна 20 мм. Найти и V пирамиды. | 3. В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями 6 см и 8 см. Боковое ребро призмы равно 10 см. Найти и V призмы. |
| 4. Основанием прямой треугольной призмы является прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см, длина бокового ребра 8 см. Найти и V призмы. | 4. Основание пирамиды – квадрат АВСD со стороной 4 см. Боковое ребро SB перпендикулярно основанию и равно 3 см. Найти и V пирамиды. |
| 5.В основании правильной треугольной призмы *ABCA*1*B*1*C*1 лежит треугольник со стороной 6. Высота призмы равна 4. Точка *N* — середина ребра *A*1*C*1.  а) Постройте сечение призмы плоскостью *BAN*.  б) Найдите периметр этого сечения. | 5.В правильной четырехугольной пирамиде *PABCD*, все ребра которой равны 4, точка *K* ― середина бокового ребра *AP*.  а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку *K* и параллельной прямым *PB* и *BC*.  б) Найдите площадь сечения. |

Критерии оценивания: тКаждое задание оценивается в 1 балл

Итого 5 баллов:5 баллов – оценка «5», 4 балла – оценка «4», 3 балла – оценка «3», 2 балла и менее – оценка «2».

**Практическое занятие №30**

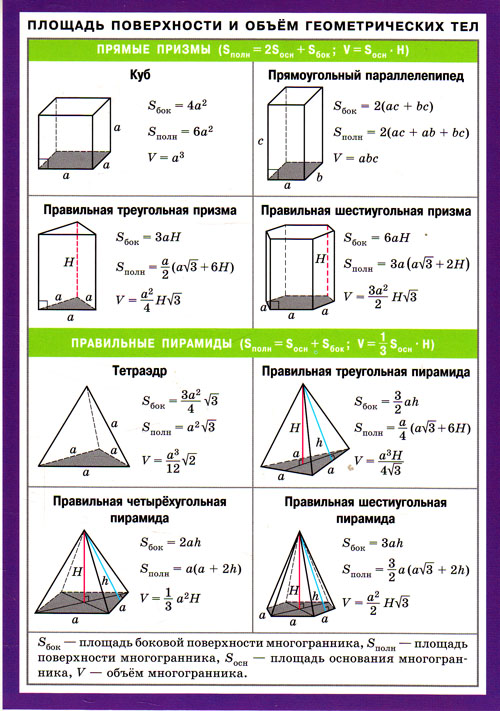
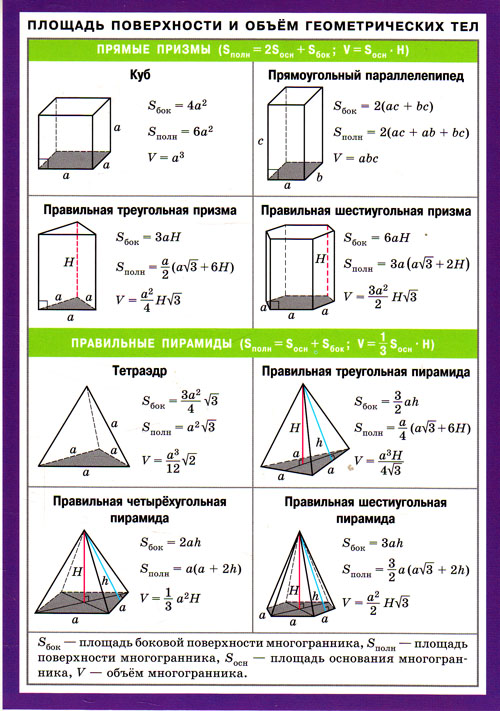
**«Вычисление площадей и объемов многогранников»**

***Цель :***сформировать знания и умения вычислять площади и объемы фигур в пространстве при решении задач;

**Оборудование**: тетрадь для выполнения практического занятия, макеты пространственных фигур, ручка, карандаш, линейка, ластик.

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1.Повторите теоретические положения по теме.  2.Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д.  3.Выполните задание, согласно своего варианта. |

**Теоретический материал**



**Ход занятия**

1.Запишите название, номер практического занятия и ее цель.

2.Укажите вариант, номер задания.

3.Выполните задания.

**Вариант 1**

1. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 и 2. Объем параллелепипеда равен 48. Найдите третье ребро параллелепипеда, выходящее из той же вершины.

3. В правильной треугольной пирамиде медианы основания пересекаются в точке . Площадь треугольника равна 9; объем пирамиды равен 6. Найдите длину отрезка .

4. Через среднюю линию основания треугольной призмы, объем которой равен 32, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем отсеченной треугольной призмы.

5. В правильной треугольной пирамиде медианы основания пересекаются в точке Площадь треугольника равна 2, объем пирамиды равен 4. Найдите длину отрезка

**Вариант 2**

1. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 7 и 3. Объем параллелепипеда равен 63. Найдите третье ребро параллелепипеда, выходящее из той же вершины.

2. В правильной треугольной пирамидеSABC, P – середина ребра AB, S – вершина. Известно, что BC=5, а SP =6. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

3. Во сколько раз увеличится объем правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?

4. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1, а высота равна

5. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 6, боковое ребро равно 10. Найдите ее объем.

Критерии оценивания:

№1 -1 балл, №2 - №3- 2 балла, №4 - №5 – 3 балла.

Итого 11 баллов:11 баллов – оценка «5», 8 баллов – оценка «4», 5 баллов – оценка «3», 4 балла и менее – оценка «2».

**Практическое занятие №31**

**«Тела вращения. Сечения»**

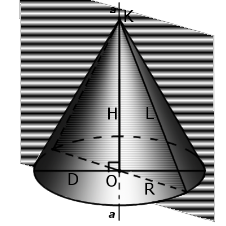
***Цель:*** сформировать умения и навыки строить чертеж тел вращения, сечение тел вращения.

**Оборудование**: тетрадь для выполнения практического занятия, макеты пространственных фигур, ручка, карандаш, линейка, ластик.

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1.Повторите теоретические положения по теме.  2.Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д.  3.Выполните задание, согласно своего варианта. |

**Теоретический материал**

* + 1. Конус

Конус — тело, полученное объединением всех лучей, исходящих из одной точки (вершины конуса) и проходящих через плоскую поверхность.

Круглый конус может быть получен вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов.

Определение. Вершина конуса - это точка (K), из которой исходят лучи.

Определение. Основание конуса - это плоскость, образованная в результате пересечения плоской поверхности и всех лучей, исходящих из вершины конуса. У конуса могут быть такие основы, как круг, эллипс, гипербола и парабола.

Определение. Образующей конуса (L) называется любой отрезок, который соединяет вершину конуса с границей основания конуса. Образующая есть отрезок луча, выходящего из вершины конуса.

Формула. Длина образующей (L) прямого кругового конуса через радиус R и высоту H (через теорему Пифагора):

L2 = R2 + H2

Определение. Направляющая конуса - это кривая, которая описывает контур основания конуса.

Определение. Боковая поверхность конуса - это совокупность всех образующих конуса. То есть, поверхность, которая образуется движением образующей по направляющей конуса.

Определение. Поверхность конуса состоит из боковой поверхности и основания конуса.

Определение. Высота конуса (H) - это отрезок, который выходит из вершины конуса и перпендикулярный к его основанию.

Определение. Ось конуса (a) - это прямая, проходящая через вершину конуса и центр основания конуса.

Определение. Конусность (С) конуса - это отношение диаметра основания конуса к его высоте. В случае усеченного конуса - это отношение разности диаметров поперечных сечений D и d усеченного конуса к расстоянию между ними:

Конусность характеризует остроту конуса, то есть, угол наклона образующей к основанию конуса. Чем больше конусность, тем острее угол наклона. угол конуса α

Осевое сечение конуса с обозначениями

Определение. Осевое сечение конуса - это сечение конуса плоскостью, проходящей через ось конуса. Такое сечение образует равнобедренный треугольник, у которого стороны образованы образующими, а основание треугольника - это диаметр основания конуса.

2.Цилиндр

 Цилиндр — это геометрическое тело, ограниченное *цилиндрической поверхностью* и двумя плоскостями (*основами цилиндра*).

Цилиндрическая поверхность — поверхность, получаемая при движении прямой (образующей L) параллельно самой себе, вдоль плоской кривой *направляющей*.

Основания цилиндра - плоские фигуры, образованные пересечением цилиндрической поверхности с двумя плоскостями.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Изображение прямого цилиндра с обозначениями |  | Изображение косого цилиндра с обозначениями |  | Изображение наклонного цилиндра с обозначениями |
| Рис. 1 |  | Рис. 2 |  | Рис. 3 |

Круговой цилиндр

В большинстве случаев под цилиндром подразумевается прямой круговой цилиндр, у которого *направляющая* — окружность, а *основания* перпендикулярны *образующей*. У такого цилиндра имеется ось симметрии.

*Прямой круговой цилиндр* можно описать, как объёмного фигуру, образующуюся вращением прямоугольника вокруг своей стороны на 360°.

*Определение.* Радиус цилиндра r - это радиус основания цилиндра.

*Определение.* Диаметр цилиндра d - это диаметр основания цилиндра.

*Определение.* Высота цилиндра h - это расстояние между основаниями цилиндра.

*Определение.* Ось цилиндра - это прямая O1O2, которая проходит через центры оснований цилиндра.

*Определение.* Поверхность цилиндра состоит из цилиндрической поверхности и оснований цилиндра.

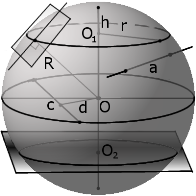
*Определение.* Осевое сечение цилиндра - это сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра.

3.Шар. Сфера.

*Определение.*

 Сфера (поверхность шара) — это совокупность всех точек в трехмерном пространстве, которые находятся на одинаковом расстоянии от одной точки, называемой центром сферы (О).

Сферу можно описать, как объёмную фигуру, которая образуется вращением окружности вокруг своего диаметра на 180° или полуокружности вокруг своего диаметра на 360°.



*Определение.*

 Шар — это совокупность всех точек в трехмерном пространстве, расстояние от которых не превышает определенного расстояния до точки, называемой центром шара (О) (совокупность всех точек трехмерного пространства ограниченных сферой).

Шар можно описать как объёмную фигуру, которая образуется вращением круга вокруг своего диаметра на 180° или полуокружности вокруг своего диаметра на 360°.

*Определение.* Радиус сферы (шара) (R) - это расстояние от центра сферы (шара) O к любой точке сферы (поверхности шара).

*Определение.* Диаметр сферы (шара) (D) - это отрезок, соединяющий две точки сферы (поверхности шара) и проходящий через ее центр.

**Ход занятия**

1.Запишите название, номер практического занятия и ее цель.

2.Укажите вариант, номер задания.

3.Ответьте письменно на контрольные вопросы.

4.Выполните задания.

**Вариант 1.**

1.Прямоугольник, диагональ которого равна 25 см, а одна сторона 20 см, вращается вокруг меньшей стороны. Вычислите высоту полученного цилиндра.

2.Высота конуса 15 см, радиус основания – 20 см. Найти образующую конуса.

3. Радиус шара 12 см. На касательной плоскости лежит точка К, которая удалена от точки касания на 5 см. На каком расстоянии находится точка К от поверхности шара?

**Вариант 2.**

1. Радиус основания цилиндра равен 2 м, высота 3 м. Найти диагональ осевого сечения.

2.Высота конуса равна 16 см, а образующая – 20 см. Найти радиус основания конуса.

3. Секущая плоскость удалена от центра шара на расстояние 8 см, а радиус шара равен 10 см. Вычислите площадь сечения шара.

**Вариант 3.**

1. Высота конуса равна 18 см, а радиус основания равен 24 см. Найти образующую конуса.

2. Площадь осевого сечения цилиндра равна 10 м2, а площадь основания – 5 м2. Найдите высоту цилиндра.

3. Найдите площадь сечения шара радиуса 41 см плоскостью, проведенной на расстоянии 29 см от центра шара.

**Вариант 4.**

1. Высота цилиндра 12 см, радиус равен 10 см. Найти диагональ осевого сечения цилиндра.

2. Образующая конуса равна 15 см, а радиус основания равен 9 см. Найти высоту конуса.

3. Шар, радиус которого 41 дм, пересечен плоскостью на расстоянии 9 дм. Найдите площадь сечения.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение тела вращения.

2. Дайте определение цилиндра и его элементов.

3. Дайте определение конуса и его элементов.

4. Дайте определение сферы и его элементов.

5. Дайте определение шара и его элементов.

6. Какими фигурами являются сечения сферы и шара?

Критерии оценивания: №1 - 1балл, №2 – 1 балл, №3 – 1 балл. Контрольные вопросы:1 вопрос-1 балл

Итого 9 баллов:9 баллов – оценка «5», 7 баллов – оценка «4», 6 баллов – оценка «3», 5 баллов и менее – оценка «2».

**Практическое занятие №32**

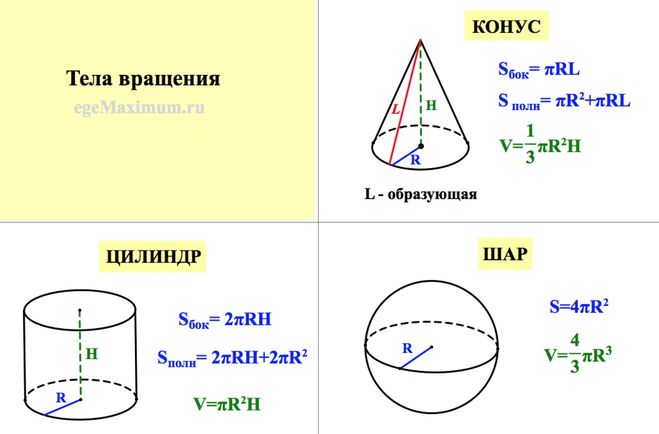
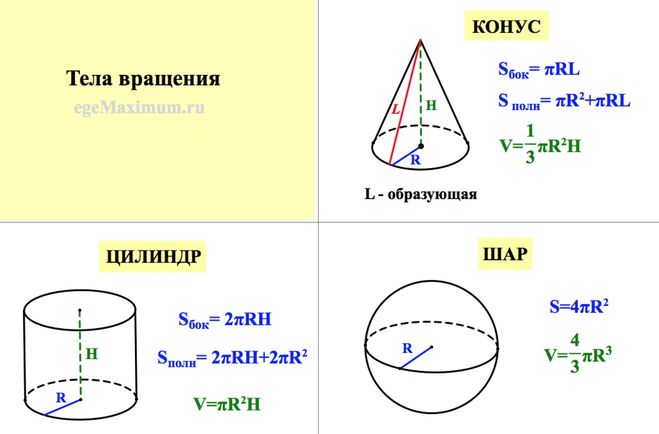
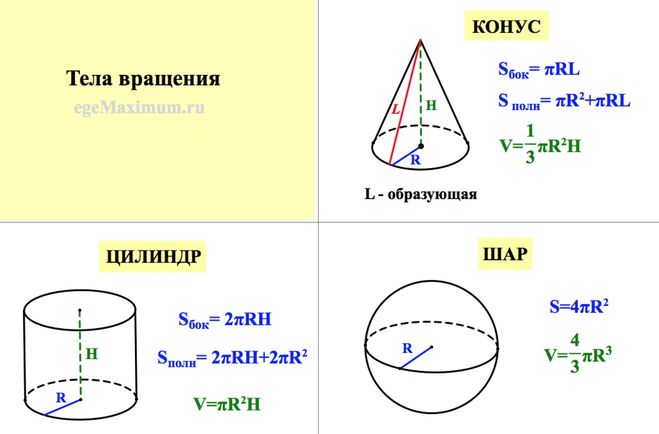
**«Вычисление площадей и объемов фигур в пространстве»**

***Цель :***сформировать знания и умения вычислять площади и объемы фигур в пространстве при решении задач;

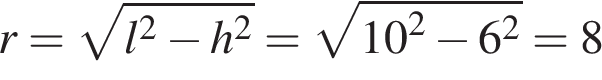
**Оборудование**: тетрадь для выполнения практического занятия, макеты пространственных фигур, ручка, карандаш, линейка, ластик.

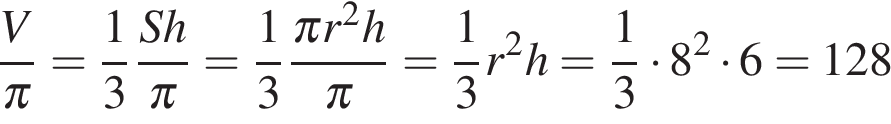
|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1.Повторите теоретические положения по теме.  2.Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д.  3.Выполните задание, согласно своего варианта. |

**Теоретический материал**



Задача 1. **Ре­ше­ние.**

По тео­ре­ме Пи­фа­го­ра най­дем, что ра­ди­ус ос­но­ва­ния равен . Тогда объем ко­ну­са, де­лен­ный на http://reshuege.ru/formula/52/522359592d78569a9eac16498aa7a087p.png:



Ответ: 128.

Ответ: 128

27120

128

Диа­метр ос­но­ва­ния ко­ну­са равен 6, а угол при вер­ши­не осе­во­го се­че­ния равен 90°. Вы­чис­ли­те объем ко­ну­са, де­лен­ный на π*.*

.

**С**

|  |  |
| --- | --- |
| **О**  **А**  http://reshuege.ru/get_file?id=837  **В** | Решение: АВ=6 см, значит ОВ=3 см.  Т.К.треугольник АВС – равнобедренный, прямоугольный, то угол ОВС равен 450. Значит, треугольник СОВ тоже равнобедренный, прямоугольный, поэтому h=СО=3 см.  V= 9π•3=9π(см3) Ответ: 9 |

Задача 2. Объём первого цилиндра равен 12 куб. м. У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания — в два раза меньше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах. Решение: Пусть объём первого цилиндра равен image002объём второго

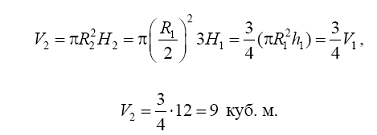


image004 R1,2      – радиусы оснований цилиндров,H1,2      –

image008

высоты. По условию image006

Выразим объём второго цилиндра через объём первого:

**Ход занятия**

1.Запишите название, номер практического занятия и ее цель.

2.Укажите вариант, номер задания.

3.Выполните задания.

**Вариант 1**

1. Объем конуса равен 16. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.

2. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 87.

3. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 81.

4. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 4. Объем параллелепипеда равен 16. Найдите высоту цилиндра.

5. Длина окружности основания цилиндра равна 3, высота равна 2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

**Вариант 2**

1. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 14.

2.Радиус основания цилиндра 3, высота 8. Найти диагональ осевого сечения.

3.Осевое сечение цилиндра – квадрат, площадь которого 12. Найти площадь основания.

4. Площадь осевого сечения цилиндра равна 4. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на π.

5. Радиусы оснований усеченного конуса равны 5 см и 11 см, а образующая равна 10 см. Найдите высоту и объем усеченного конуса.

Критерии оценивания:

№1 -1 балл, №2 - №3- 2 балла, №4 - №5 – 3 балла.

Итого 11 баллов:11 баллов – оценка «5», 8 баллов – оценка «4», 5 баллов – оценка «3», 4 балла и менее – оценка «2».

**Практическое занятие №33**

**«Действия над векторами, заданными координатами»**

***Цель*:** сформировать умения и навыки решения задач с векторами*.*

**Оборудование**: тетрадь для выполнения практической работы, ручка, карандаш, ластик, линейка.

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1.Повторите теоретические положения по теме.  2.Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д.  3.Выполните задание, согласно своего варианта. |

**Теоретический материал**

1.Прочитайте §22, стр 79-80, §23, стр 81-82

Примеры и последовательность выполнения заданий.

Пример 1

Даны векторы ; ; * *Вычислить |(2**+ )| – 4(2**- **)**

Решение.

2* *  2**

** 2**+ * *2**+ **

** 2**2

2**- ** 2**- ** ** 4(2**- **) **4(2**- **)**

Так как 4(2**- **)** - это скалярное произведение векторов, то по формуле скалярного произведения  получим:

4(2**- **)*=*16∙(-1) + (-20)∙1 + (-36)∙(-1)= -16 – 20 + 36 = 0

Тогда |(2**+ )| – 4(2**- **)** = + 0 =  Ответ: |(2**+ )| – 4(2**- **)** = 

Пример 2. Выяснить при каких значениях m и n данные векторы коллинеарные:  и .

Решение.

У коллинеарных векторов соответствующие коэффициенты пропорциональны. Запишем соответствующую пропорцию, из которой найдем m и n:

, откуда Ответ: m = -2, n = -2.5.

Пример 3.

Вершины треугольника имеют координаты А(1; 2; 0), В(5; -1; 3), С(6; 5; 4). Найдите длины сторон треугольника и угол A треугольника ABC.

Решение.

А(1; 2; 0)

В(5; -1; 3)

С(6; 5; 4)

1. Найдем координаты векторов , , 



1. Найдем длины каждого вектора. Это и будет длины сторон треугольника АВС.

- длина стороны АВ

- длина стороны ВС

- длина стороны АС

1. Найдем угол ВАС – это угол между векторами  и .

*.*

**Ответ: , **

**Ход занятия**

1.Запишите название, номер практического занятия и ее цель.

2.Укажите номер задания.

3.Выполните задания.

1. Запишите координаты вектора:

= 2+4-3, = -3-2+2, = -,

= 3, =- - и найдите скалярное произведение векторов и .

1. Даны векторы {-4;2;1},{3;4;0},

{0;0;-1}, запишите разложение этих векторов по координатным векторам

, , .

1. Найдите середину отрезка BD:

B (8; 2; 6) , D (2; 8; 4)

1. При каких значениях k и c данные векторы коллинеарные:



1. Дан Δ KNM найдите:

а) их координаты.

б) длины векторов

в) углы между векторами и .

Если известны координаты вершин треугольника: K(4;-3;0), N(5;-3;1),

M(5;-5;-1).

1. Найдите скалярное произведение векторов, используя формулу:

а ⃗∙в ⃗ = |а ⃗|∙|в ⃗|∙cos⁡〖(а ⃗ в ⃗)〗 (\*)

Если а ⃗{2;1;2} , в ⃗{-1;-2;-2}.

Для этого:

1) найдите длину а ⃗ и в ⃗.

2) cos⁡〖(а ⃗ в ⃗)〗.

3) подставьте найденные значения в формулу (\*)

1. Ребро куба АВСDА1В1С1D1 равно р. Вычислите

а) угол между прямыми АВ1 и ВС1 (А1В и АD1)

б) расстояние между серединами отрезков АВ1 и ВС1 (АС1 и В1С)

Критерии оценивания:

№1 - 4 балла, №2 – 3 балла, №3 – 1 балл, №4 – 1 балл, №5 – 3 балла, №6 – 3 балла, №7 – 2 балла.

Итого 17 баллов:17 баллов – оценка «5», 14 баллов – оценка «4», 10 баллов – оценка «3», 9 баллов и менее – оценка «2».

**Практическое занятие №34**

**«Векторное уравнение прямой и плоскости»**

***Цель*:** сформировать умения и навыки составления уравнения плоскости и прямой в пространстве.

**Оборудование**: тетрадь для выполнения практической работы, ручка, карандаш, ластик, линейка.

|  |  |
| --- | --- |
| **Порядок выполнения работы:** | 1.Повторите теоретические положения по теме.  2.Ознакомьтесь с методикой выполнения работы, выполнения расчетов и т.д.  3.Выполните задание, согласно своего варианта. |

**Теоретический материал**

1.Прочитайте §24, стр 85-86, §25, стр 87-89



**Ход занятия**

1.Запишите название, номер практического занятия и ее цель.

2.Укажите номер задания.

3.Выполните задания.

1.Даны точки M1(3;0;4) и M2(5;6;9).

Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M1 и перпендикулярно к вектору M1M2.

2.Написать уравнение плоскости, проходящей через точки M1(3;0;4), M2(5;2;6) и M3(2;3;−3).

3.Написать уравнение плоскости, проходящей через точки M1(3;0;4) и M2(5;2;6) и перпендикулярной к плоскости 2x+4y+6z-7=0.

4.Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M1(1;2;3) и перпендикулярной к плоскостям x-y+z-7=0 и Зх+2у-12z+5 = 0.

5.Составить уравнение плоскости, если ее расстояние от начала координат равно 10 и вектор n⃗ {13;23;−23} перпендикулярен к плоскости и направлен к ней от начала координат.

6.Привести к нормальному виду уравнение плоскости: (10i⃗ +2j⃗ −11k⃗ )r⃗ +60=0.

7.Составить уравнения прямой в пространстве, перпендикулярной плоскости https://function-x.ru/line/l251.gif и проходящей через точку пересечения этой плоскости с осью Oz.

8.Составить уравнение прямой в пространстве, проходящей через точки https://function-x.ru/line/l262.gif и https://function-x.ru/line/l263.gif.

9.Составить канонические уравнения прямой в пространстве, заданной общими уравнениями

https://function-x.ru/line/l270.gif

10. Даны точка https://function-x.ru/line/l278.gif и направляющий вектор https://function-x.ru/line/l279.gif. Составить параметрические уравнения прямой.

Критерии оценивания:

№1 - 1 балл, №2 – 1 балл, №3 – 1 балл, №4 – 1 балл, №5 – 2 балла, №6 – 2 балла, №7 – 1 балл, №8 – 2 балла, №9 – 2 балла, №10 – 2 балла.

Итого 15 баллов:15 баллов – оценка «5», 12 баллов – оценка «4», 7 баллов – оценка «3», 6 баллов и менее – оценка «2».

**Литература**

***Основная литература***

1. Мордкович, А.Г Математика: Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч1.: Учебник для учащихся общеобразоват. организаций (базовый и углубленный уровни) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. - 3-е изд., стереотип. - М.: Мнемозина, 2020
2. Мордкович АГ. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровни) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. — 2-е изд., стер. — М.: Мнемозина, 2020
3. Математика: Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч2.: Задачник для учащихся общеобразоват. организаций (базовый и углубленный уровни) / под ред. А.Г. Мордковича. - 3-е изд., стереотип. - М.: Мнемозина, 2020
4. Математика: Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч2.: Задачник для учащихся общеобразоват. организаций (базовый и углубленный уровни) / под ред. А.Г. Мордковича. - 3-е изд., стереотип. - М.: Мнемозина, 2020
5. Математика: Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразовательных организаций: базовый и углубленный уровни / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. - 5-е изд. - М.: Просвещение, 2018. - 255 с. : ил. - (МГУ - школе) .

***Дополнительная литература***

1. Башмаков М.И. Математика: учебник / М.И. Башмаков. — 2-е изд., стер. — М.: КНОРУС, 2017. — 394 с. — (Среднее профессиональное образование).
2. Григорьев С.Г. Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина ; под ред. В.А. Гусева. — 12-е изд., стер. — М.: Издательский центр «Академия», 2016. — 416 с.

**Интернет-ресурсы**

1.Григорьев С. Г. Математика: [Электронный ресурс]: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / С. Г. Григорьев, С. В. Иволгина; под ред. В. А. Гусева. — 13-е изд., стер. — М.: Издательский центр «Академия», 2017. — 416 с

2.Башмаков М.И. Математика.[Электронный ресурс]: – М.: Издательский центр «КноРус»,2020.-394 с.

3.Башмаков, М.И. Математика. Практикум: [Электронный ресурс]: учебно-практическое пособие / Башмаков М.И., Энтина С.Б. — М.: КноРус, 2021. — 294 с.

4.[www.fcior.edu.ru](http://www.fcior.edu.ru) (Информационные, тренировочные и контрольные материалы).

5.[www.school-collection.edu.ru](http://www.school-collection.edu.ru) (Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов).

6.ЕГЭ <http://reshuege.ru/> (Образовательный портал для подготовки к экзаменам).

7.ЕГЭ <http://ege.yandex.ru/> (ЕГЭ по математике).

8.[www.ziimag.narod.ru](http://www.ziimag.narod.ru) (Персональный сайт автора Мордковича А. Г. "Практика развивающего обучения").

9.[www.math.ru](http://www.math.ru) (Интернет - поддержка учителей математики).

10.[www.it-n.ru](http://www.it-n.ru) (Сеть творческих учителей. Материалы и ресурсы, касающиеся использования ИКТ в учебном процессе:

– библиотека готовых учебных проектов с применением ИКТ, а также различные проектные идеи, на основе которых можно разработать свой собственный проект;

– библиотека методик проведения уроков использованием разнообразных электронных ресурсов;

– руководства и полезные советы по использованию программного обеспечения в учебном процессе;

– подборка ссылок на интересные аналитические и тематические статьи для педагогов).

1. [www.exponenta.ru](http://www.exponenta.ru) (Образовательный математический сайт. Содержит материалы по работе с математическими пакетами Mathcad, MATLAB, Mathematica, Maple и др. Методические разработки, примеры решения задач, выполненные с использованием математических пакетов. Форум и консультации для студентов и школьника).