**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Сибирский государственный университет геосистем и технологий»
Кафедра высшей математики**

ВВЕДЕНИЕ В ДИСКРЕТНУЮ МАТЕМАТИКУ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

**Электронное учебно-методическое пособие
для обучающихся на 2 курсе по направлению подготовки бакалавров
05.03.03 Картография и геоинформатика**

**Учебно-методическое пособие разработал:
доцент кафедры высшей математики Мартынов Геннадий Павлович,**

Новосибирск, 2020

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГЕОСИСТЕМ И ТЕХНОЛОГИЙ»
(СГУГиТ)

Г.П. Мартынов

ВВЕДЕНИЕ В ДИСКРЕТНУЮ МАТЕМАТИКУ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Электронное учебно-методическое пособие
для обучающихся на 2 курсе по направлению подготовки бакалавров
05.03.03 Картография и геоинформатика

Новосибирск
СГУГиТ
2020

УДК 51

Рецензент: кандидат технических наук, доцент, НГТУ, *Сопов В.И.*

Мартынов, Г.П.
М 294 Введение в дискретную математику в примерах и задачах, учебно-методическое пособие [Электронный ресурс] / Г.П. Мартынов, – Новосибирск: СГУГиТ, 2020. – 21 с.

Учебно-методическое пособие разработано сотрудником кафедры высшей математики Сибирского государственного университета геосистем и технологий, доцентом Г.П. Мартыновым. Пособие предназначено для обучающихся на 2 курсе СГУГиТ по направлению подготовки бакалавров 05.03.03 Картография и геоинформатика. Пособие содержит краткую теорию (определения, формулы и теоремы) раздела «Дискретная математика», примеры решения типовых задач и библиографический список рекомендуемой литературы. Кроме этого, в пособии представлены некоторые приложения методов «Дискретной математика» в технических науках, в частности, в картографических исследованиях. Данное пособие может быть использовано в качестве опорного конспекта лекций по теме «Дискретная математика» при формировании комплекта учебных материалов для дистанционного обучения в вузе.

УДК 51

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Множества и операции над ними

Понятие множества относится к основным понятиям математики, наряду с натуральными числами, точкой, прямой и т. д. Для множества можно ввести синонимы: совокупность предметов, объединенных по какому-либо признаку, или группа предметов. Создатель теории множеств – немецкий математик Георг Кантор (1845–1918).

Он сформулировал принцип объемности: два множества A и B равны тогда и только тогда, если они состоят из одних и тех же элементов.

Если x – элемент из множества A, то записывают: $x \in A$.

Принцип объемности: $A = B \Leftrightarrow \forall x: (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

Например: $A=\{1,1,2,2\}$, $B=\{1,2\} \Leftrightarrow A = B$. Повторения не учитываются!

Как же можно определить множество? Если множество конечное, то записываются все его элементы: $A=\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$.

Если множество бесконечно, то указывается то общее свойство, которым обладают его элементы.

Например: $A=\{x \mid P(x)\}$= {все элементы x, обладающие свойством P, и только они}.

Из школьной программы известны, например, следующие множества:

1) $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$ – множество натуральных чисел;
2) $Z = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \ldots\}$ – множество целых чисел;

3) $Q = \left\{ x \mid \quad x = \dfrac{m}{n}, m \in Z, n \in Z, n \neq 0 \right\}$ – множество рациональных чисел;

4) $\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$ – пустое множество, не содержащее ни одного элемента.

Подмножества

Пусть A и B – некоторые множества. Говорится, что A есть подмножество множества B, если $\forall\ x : x \in A \Rightarrow x \in B$. А обозначается это так: $A \subseteq B$.

Замечание. По определению пустое множество принадлежит любому множеству B: $\varnothing \subseteq B$.

Обозначим через U – множество всех рассматриваемых множеств (и назовем его универсальным множеством).

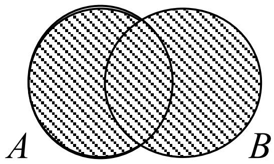

Рис. 1.1

Операции над множествами

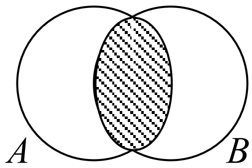

Рис. 1.2

1. Объединением двух множеств A и B A и B называется такое множество $A \cup B$, которое состоит либо из элементов множества A, либо из элементов множества B, либо из их общих элементов (рис. 1.1).

Или короче: $A \cup B = \{ x,\ x \in A$ или $x \in B \}$.

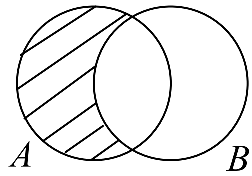

Рис. 1.3

2. Пересечением двух множеств A и B A и B называется такое множество $A \cap B$, которое состоит только из их общих элементов (рис. 1.2).

Или короче: $A \cap B = \{ x \mid x \in A$ и $x \in B \}$.

3. Разностью двух множеств A и B A и B называется такое множество $A - B$, которое состоит только из тех элементов множества A, которые не содержатся в множестве B (рис. 1.3).

Или короче: $A - B = \{ x \mid x \in A \ и \ x \notin B \}$.

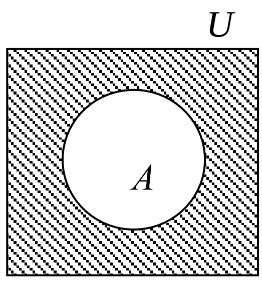

Рис. 1.4

Замечание. Разность двух множеств $A - B$ иногда обозначается и по-другому: $A \setminus B$.

4. Дополнением множества A (относительно универсального множества U) A и B называется такое множество $\overline{A}$, которое состоит из таких элементов множества U, которые не содержатся в множестве A (рис. 1.4).

Или короче: $\overline{A} = U \setminus A$.

5. Прямым декартовым произведением двух множеств A и B называется такое множество $A \times B$, которое состоит из всевозможных упорядоченных пар $(x; y)$, где левый элемент $x \in A$, а правый элемент упорядоченной пары $y \in B$.

Или короче: $A \times B = \{ (x; y) \mid x \in A,\ y \in B \}$.

Основные тождества теории множеств

1. $A \cup B = B \cup A$ – коммутативность операции объединения.

2. $A \cap B = B \cap A$ – коммутативность пересечения.

3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – ассоциативность объединения.

4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – ассоциативность пересечения.

5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)$ – дистрибутивность объединения, относительность пересечения.

6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (B \cap C)$ – дистрибутивность пересечения, относительность объединения.

7. $A \cup \varnothing = A$. 8. $A \cap \varnothing = \varnothing$. 9. $A \cup \overline{A} = U$. 10. $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

11. $A \cup A = A$. 12. $A \cap A = A$. 13. $A \cup U = U$. 14. $A \cap U = A$.

$$\left.\begin{array}{l} 15.\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ 16.\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{array}\right\} \text{законы Де Моргана.}$$

$$\left.\begin{array}{l} 17.\ A \cup (A \cap B) = A \\ 18.\ A \cap (A \cup B) = A \end{array}\right\} \text{законы поглощения.}$$

Пример 1.1. Заданы множества: $A = \{ x | x=2k-3, k=0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$, $B = \{ x | x=2m+1, m = 1, 3, 5, 7 \}$, $C = \{ x | x=3p-3, p=0, 1, 2, 3, 4 \}$ и универсальное множество $U = Z$ (множество целых чисел). Требуется найти следующие множества: $A \cup B$, $A \cap B$, $A - C$, дополнение $\overline{A}$ относительно универсального множества $U = Z$, $A \times B$.

Решение

Записываются подробно все элементы множеств A, B, C. Получается:

$$A = \{ -3; -1; 1; 3; 5; 7 \}; \quad B = \{3; 7; 11; 15\}; \quad C = \{ -3; 0; 3; 6; 9\}.$$

Объединение находится записыванием всех элементов множеств A и B без повторов: $A \cup B = \{ -3; -1; 1; 3; 5; 7; 11; 15\}$.

Далее находится пересечение $A \cap B = \{3; 7\}$ – оно составлено только из общих элементов этих множеств.

Чтобы найти разность $A - C$, необходимо из множества A удалить те элементы, которые одновременно принадлежат и множеству C (это будут числа: –3 и 3).

Следовательно, $A - C = \{ -1; 1; 5; 7\}$.

Для того, чтобы найти дополнение $\overline{A}$, необходимо из множества $U = Z$ удалить все элементы множества A:

$$\overline{A} = \{ x \in Z | \ x \neq -3; x \neq -1; x \neq 1; x \neq 3; x \neq 5; x \neq 7\}.$$

Прямое декартовое произведение $A \times B$ будет составлено из всевозможных упорядоченных пар $(x; y)$, где левый элемент $x \in A$, а правый элемент упорядоченной пары $y \in B$.

Поэтому получается следующее:

$$A \times B = \{(-3; 3), (-3; 7), (-3; 11), (-3; 15), (-1; 3), (-1; 7), (-1; 11), (-1; 15),$$
$$(1; 3), (1; 7), (1; 11), (1; 15), (3; 3), (3; 7), (3; 11), (3; 15),$$
$$(5; 3), (5; 7), (5; 11), (5; 15), (7; 3), (7; 7), (7; 11), (7; 15)\}.$$

Теория множеств и картография

Формально любая карта может быть представлена [1] в виде множества. Можно допустить, что карта представлена в виде некоторого множества K, элементами которого являются объекты карты k_0.

Также, например, можно взять атлас (рис. 1.5). В классической картографии атлас [2] представляет из себя картографическое произведение, состоящие из множества карт, объединённых общей программой. Исходя из этого, обычный атлас Ak – состоит из собрания отдельных карт Ki. Тогда можно записать так:

$Ak = \{Ki | i = 1, 2, \dots b\}$, где b – число карт в атласе.

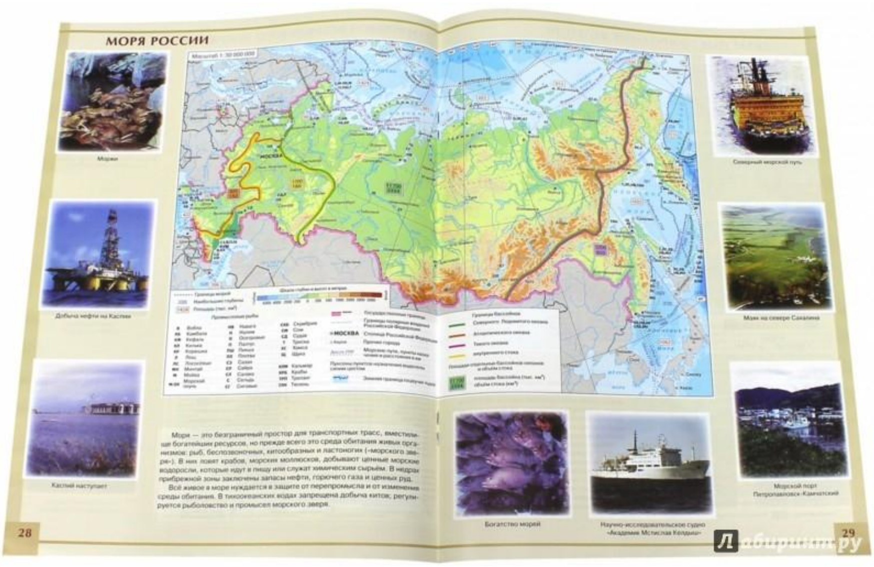

Рис. 1.5. Атлас морей России

Примеров использования множеств в картографии имеется великое множество [3]. Например, генерализация, когда из крупного масштаба делается более мелкий масштаб. В таком процессе происходит обобщение каких-то частей, например, участков леса, находящихся на расстояние одного сантиметра в масштабе карты. В результате генерализации промежуток между ними исчезнет и эти два участка леса сольются, или, если сказать на языке множеств – объединятся. Это можно записать так:

$A \cup B = \{x, x \in A \text{ или } x \in B\}$, где A – первый участок леса, B – второй участок леса, а x – количество деревьев на этих участках.

Или же возьмем в пример вычерчивание [1] жилых кварталов. Квартал мы выделяем, допустим, оранжевой заливкой, а поверх наносим n количество черных домов. В результате, части оранжевого квартала образуют дополнение $\bar{A}$.

Его запись будет выглядеть так:

$\bar{A} = \{x \in Z | x \neq 1;\ x \neq 2;\ x \neq 3;\ x \neq 4; \dots\ x \neq n\}$, где n – количество домов в квартале.

При вычерчивании дорог на карте [1] дороги могут пересекаться, и образовывается перекресток. Если представить это в виде множеств, то множество A – это одна дорога со всеми дорожными знаками ПДД, которые расположены на ней, а множество B – это вторая дорога также со своими дорожными знаками ПДД. При пересечении мы получаем перекресток с дорожными знаками, которые относятся сразу к двум дорогам. Если записать это на языке множеств, то получится следующее:

$A \cap B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}$, где A – первая дорога, B – вторая дорога, x – дорожные знаки.

2. Элементы математической логики

Рассматривается наиболее элементарный раздел математической логики, который носит название *алгебра логики.* Если имеется несколько высказываний, то при помощи логических связок и отрицаний из них можно образовать различные новые высказывания. При этом исходные высказывания принято называть *простыми,* а вновь образованные высказывания – *сложными.* Рассмотрим примеры.

Пусть имеются высказывания: «На улице светит солнце», «В классе идут занятия». Из этих простых высказываний можно различными способами построить сложные высказывания:

1. На улице светит солнце, и в классе идут занятия.
2. На улице не светит солнце.
3. На улице светит солнце, однако в классе идут занятия.
4. В классе идут занятия, а на улице светит солнце.
5. На улице светит солнце, или в классе идут занятия.
6. Или на улице светит солнце, или в классе идут занятия.
7. Если на улице светит солнце, то в классе идут занятия.
8. Если в классе идут занятия, то на улице светит солнце.
9. На улице не светит солнце, или в классе идут занятия.
10. На улице светит солнце тогда и только тогда, когда в классе идут занятия.

В алгебре высказываний допускаются любые грамматически правильные способы образования сложных высказываний, и совершенно игнорируется смысловая характеристика получившегося предложения. Любое из приведенных десяти сложных предложений допустимо с точки зрения алгебры высказываний.

В алгебре высказываний интересуются лишь истинностью или ложностью (истинностным значением) высказываний. Более точно: в ней исследуется вопрос об истинности сложного высказывания в зависимости от истинности входящих в него простых высказываний и с этой точки зрения исследуются различные логические связки.

Примеры логических связок (операций)

Таблица 2.1

A	B	A & B
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

1. Логическая связка, соответствующая союзу «и», называется *конъюнкцией* и обозначается знаком &.

Высказывание A & B, называемое конъюнкцией A и B, истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания A и B. Это обстоятельство можно выразить с помощью так называемой *таблицы истинности* для конъюнкции (табл. 2.1).

В этой таблице символом И обозначается истинное высказывание, символом Л – ложное. В ней перечислены всевозможные *истинностные значения* (И и Л) высказываний A и B и соответствующие им истинностные значения высказывания A & B. С точки зрения алгебры высказываний логическая связка (операция) конъюнкция полностью определяется приведенной табл. 2.1. Высказывание A & B абсолютно истинно тогда и только тогда, когда абсолютно истинны оба высказывания A и B.

Таблица 2.2

A	$\overline{A}$
И	Л
Л	И

2. *Отрицание* ($\overline{A}$) высказывания A задается табл. 2.2 истинности.

Эта операция *одноместна* – в том смысле, что из одного данного простого высказывания A строится новое высказывание $\overline{A}$. В то же время конъюнкция A & B – двуместная операция: сложное высказывание строится из двух простых. Отрицание абсолютно истинного высказывания абсолютно ложно и наоборот.

3. Двуместная логическая операция, соответствующая союзу «или» называется *дизъюнкцией* (она обозначается знаком $\vee$). Надо иметь в виду, что в обычной речи союз «или» употребляется, по крайней мере, в двух различных смыслах: неальтернативное (неисключающее) «или» и альтернативное (исключающее) «или».

Таблица 2.3

A	B	A$\vee$B
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Дизъюнкция соответствует неальтернативному «или»; она задается следующей табл. 2.3 истинности.

Абсолютная истинность A$\vee$B означает, что в каждой ситуации хотя бы одно из высказываний A, B истинно.

Замечание. Часто, вместо символа & употребляется *знак* ^. Отметим также, что конъюнкцию иногда называют логическим умножением. Дизъюнкцию иногда называют логическим сложением.

4. Двуместная логическая операция, соответствующая обороту «если…, то…», посредством которого образуются условные предложения, называется *импликацией.* При этом сложное высказывание «если A, то B» записывается в виде A→B. Простое высказывание A называется *посылкой* импликации, B – *ее заключением.* Приводим табл. 2.4 истинности для импликации.

Таблица 2.4

A	B	A→B
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

5. В качестве последнего примера логической операции рассмотрим связку, которую называют *эквивалентностью* (обозначение: ~). Она соответствует оборотам типа «тогда и только тогда, когда», «для того чтобы, необходимо и достаточно» и др. Приводим табл. 2.5 истинности для эквивалентности.

Таблица 2.5

A	B	A~B
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Теперь у нас имеется некоторое количество «основных» логических операций (отрицание, дизъюнкция, конъюнкция, импликация, эквивалентность), позволяющих получать из простых высказываний сложные высказывания. При этом вместо простых высказываний можно брать уже построенные сложные высказывания. В результате появляется возможность применять при построении сложных высказываний многоступенчатые конструкции, многократно использующие введенные логические операции. Назовем ***формулами*** логические операции, которые получаются комбинированием конечного числа указанных выше основных логических операций. Для всякой формулы можно построить истинностную таблицу, последовательно используя истинностные таблицы для основных операций.

Для всякой формулы можно построить таблицу истинности для основных операций. Естественно считать равносильными формулы, которым соответствуют одинаковые таблицы истинности. Далее дается точное определение.

Определение 2.1. Пусть U и W – две формулы алгебры высказываний, а $A_1, \ldots, A_n$ – набор простых высказываний, входящих по крайней мере в одну из формул U, W. Формулы U и W называются *равносильными*, если при всех значениях истинности $A_1, \ldots, A_n$ значения истинности U и W совпадают. Равносильность U и W обозначается посредством обычного знака равенства: U = W.

Далее рассмотрим примеры, в которых будут даны образцы решения типовых задач по теме «Элементы математической логики».

Пример 2.1. Дана формула алгебры логики:

$$\alpha=\left[\left(A\to\overline{C}\right)\vee\overline{B}\right]\vee\left[\left(\overline{A}\sim B\right)\&C\right].$$

Требуется записать для нее таблицу истинности.

Решение

Данная формула алгебры логики основана на трех простых высказываниях: A, B и C (они будут занимать первые три столбца таблицы истинности (табл. 2.6), эти первые три столбца лучше всегда заполнять так, как в этом образце – для быстроты проверки вашего решения).

Таблица 2.6

№	A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	β_1	β_2	β_3	β_4	α
1	И	И	И	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л
2	И	И	Л	Л	Л	И	И	И	Л	Л	И
3	И	Л	И	Л	И	Л	Л	И	И	И	И
4	Л	И	И	И	Л	Л	И	И	И	И	И
5	И	Л	Л	Л	И	И	И	И	И	Л	И
6	Л	И	Л	И	Л	И	И	И	И	Л	И
7	Л	Л	И	И	И	Л	И	И	Л	Л	И
8	Л	Л	Л	И	И	И	И	И	Л	Л	И
№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Пояснения. Для заполнения столбца № 7 для $\beta_1 = A \to \overline{C}$ используем столбец № 1 для А, столбец № 6 для $\overline{C}$ и табл. 2.4 для импликации. Например, на пересечении столбца № 7 и строки № 1 (табл. 2.6) поставлено Л потому, что у высказывания А в строке № 1 стоит И, у высказывания $\overline{C}$ в строке № 1 стоит Л, а по табл. 2.4 для импликации имеем $И \to Л = Л$. Аналогично заполняются все остальные строки столбца № 7 и столбцов № 8–11.

В записи формулы участвуют $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ (они будут занимать столбцы № 4, 5 и 6 – эти столбцы заполняем истинностными значениями с помощью табл. 2.2 для отрицания).

Далее внимательно изучается формула α слева направо. Следующие ее составляющие таковы: $\beta_1 = A \to \overline{C}$, $\beta_2 = \beta_1 \vee \overline{B}$, $\beta_3 = \overline{A} \sim B$, $\beta_4 = \beta_3 \& C$, $\alpha = \beta_2 \vee \beta_4$. Они будут занимать столбцы № 7–11. При заполнении столбцов № 7–11 истинностными значениями будут использоваться табл. 2.1–2.5 для основных логических операций.

Пример 2.2. Дана таблица 2.7 для формулы α алгебры логики. Требуется восстановить равносильную α формулу, составить для восстановленной формулы таблицу истинности (табл. 2.8) и сравнить ее с исходной таблицей 2.7.

Решение

Сначала в последнем столбце (в этой задаче это столбец № 4 табл. 2.7) находим буквы И (у нас это строки № 2 и 7, поэтому восстановленная фор-

Таблица 2.7

№	A	B	C	α
1	И	И	И	Л
2	И	И	Л	**И**
3	И	Л	И	Л
4	Л	И	И	Л
5	И	Л	Л	Л
6	Л	И	Л	Л
7	Л	Л	И	**И**
8	Л	Л	Л	Л
№	1	2	3	4

мула будет состоять из двух вариантов, соединенных дизъюнкцией (союзом «или»).

Каждый из этих двух вариантов формируется с помощью соответствующей строки (№ 2 и 7) следующим образом:

а) берем строку № 2 – в ней у высказываний A, B и C истинностные значения таковы: И, И, Л, поэтому первый вариант $\beta_1 = A \& B \& \overline{C}$;

б) берем строку № 7 – в ней у высказываний A, B и C истинностные значения таковы: Л, Л, И, поэтому второй вариант $\beta_2 = \overline{A} \& \overline{B} \& C$.

Восстановленная формула имеет вид:

$$\alpha = \beta_1 \vee \beta_2 = \left(A \& B \& \overline{C} \right) \vee \left(\overline{A} \& \overline{B} \& C \right).$$

Для проверки правильности восстановления этой формулы составим для нее таблицу истинности (табл. 2.8). Рассмотрим восстановленную формулу более подробно:

$$\omega_1 = A \& B,\ \beta_1 = \omega_1 \& \overline{C},\ \omega_2 = \overline{A} \& \overline{B},\ \beta_2 = \omega_2 \& C,\ \alpha = \beta_1 \vee \beta_2.$$

Затем заполняем таблицу 2.8 так же, как и в примере 2.1.

Таблица 2.8

№	A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	ω_1	β_1	ω_2	β_2	α
1	И	И	И	Л	Л	Л	И	Л	Л	Л	Л
2	И	И	Л	Л	Л	И	И	И	Л	Л	И
3	И	Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л	Л	Л
4	Л	И	И	И	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л
5	И	Л	Л	Л	И	И	Л	Л	Л	Л	Л
6	Л	И	Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л	Л
7	Л	Л	И	И	И	Л	Л	Л	И	И	И
8	Л	Л	Л	И	И	И	Л	Л	И	Л	Л
№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Замечание. Если сравнить последний столбец таблицы 2.8 (здесь это столбец № 11) с последним столбцом таблицы 2.7 из условия примера 2.2, то можно увидеть их полное совпадение. Следовательно, мы восстановили формулу правильно.

3. Элементы теории графов

Основателем теории графов принято считать Леонарда Эйлера (1707–1783), швейцарского, немецкого и российского математика и механика, внёсшего фундаментальный вклад в развитие этих наук (а также физики, астрономии и ряда прикладных наук). В 1736 году он опубликовал первую статью о своих трудах, которые сейчас именуются как теория графов. В этой статье он сформулировал возможное решение задачи о семи кенигсбергских мостах [4, 5].

Толчок к развитию теория графов получила на рубеже XIX и XX столетий, когда резко возросло число работ в области топологии и комбинаторики, с которыми её связывают самые тесные узы родства. Как отдельная математическая дисциплина теория графов была впервые представлена в работе венгерского математика Денеша Кёнига (1884–1944) в 30-е годы XX столетия.

В настоящее время, графы нашли свое применение в разных областях науки, например в биологии, экономике, математике и др. Так же зачастую можно встретить практическое применение рассматриваемой теории в геоинформационных системах. Таким образом, можно с легкость рассчитать кратчайший путь от одного пункта к другому или спланировать самый оптимальный маршрут. Кроме того, принципы сетевого описания объектов могут выражаться так, чтобы все линейные объекты были построены по теории графов, т.е. каждая линия должна быть отдельной. Выполнение этого принципа позволяет решать любые сетевые задачи, поскольку все коммуникации представляются сетями. Теория графов помогает во многом упростить решение различных задач [4, 5].

Определение 3.1. Графом называется геометрическая структура, составленная из вершин графа и дуг графа. Вершины графа будем обозначать точками с надписями в виде цифр, или букв, или, даже, слов. Вершины графа, как бы, обозначают станции назначения нашего сложного маршрута движения. Дуги графа обозначаются линиями, соединяющими две вершины графа. Эти линии могут быть со стрелками или без них. Стрелка показывает направление разрешенного движения по данной дуге графа (как улица с односторонним движением). Если же на дуге графа нет стрелки, то это означает, что движение по этой дуге графа разрешено в обе стороны. Графы будем обозначать буквами G_1, G_2, ….

Пример графа дан на рис. 3.1. У этого графа, в частности, на вершине 3 указана так называемая петля, которая соответствует кольцевой дороге через 3 вершину.

Определение 3.2. Пусть задан граф, у которого количество всех вершин равно n. Назовем матрицей смежности этого графа матрицу A_G размера $n \times n$, которая составлена только из чисел 0 и 1. Причем элемент a_{ij} этой матрицы A_G равен 0, если нет разрешенного движения по дуге графа из вершины № i в вершину № j. И элемент a_{ij} этой матрицы A_G равен 1, если есть разрешенное движение по дуге графа из вершины № i в вершину № j.

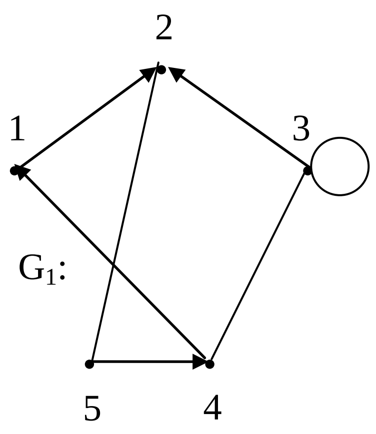

Рис. 3.1

Например, для графа G_1 на рис. 3.1 матрица смежности выглядит так: $A_{G_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

При этом $a_{33} = 1$ потому, что петля есть только на 3 вершине графа.

Замечание. Матрица смежности полностью определяет свой граф.

Определение 3.3. Пусть задан граф G, у которого количество всех вершин равно n. Составим для него матрицу смежности A_G, размер которой – $n \times n$. Назовем дополнением к графу G такой граф $\overline{G}$, у которого вершины – точно такие же, что и у графа G, а дуги построены в соответствии с матрицей смежности $A_{\overline{G}}$. При этом, у матрицы смежности $A_{\overline{G}}$ единицы стоят на тех местах, где в исходной матрице A_G стоят нули, и наоборот.

Пример 3.1. Матрица смежности для дополнения к графу G_1 (см. рис. 3.1) имеет вид: $A_{\overline{G}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Построение дополнения к заданному графу (см. рис. 3.1) проводится так: берем те же самые вершины, затем рисуем петли только возле тех вершин, у которых их не было на исходном графе (на рис. 3.1 – это вершины 1, 2, 4 и 5). Разные вершины графа соединяем дугами, которых не было в исходном графе. В итоге получаем рис. 3.2.

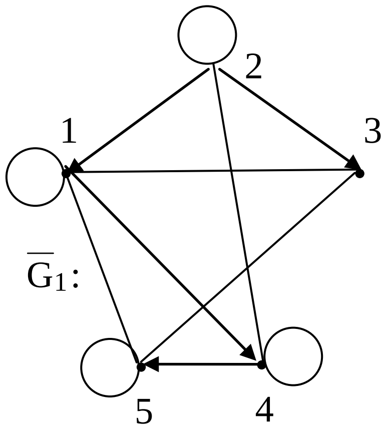

Рис. 3.2

Определение 3.4. Пусть заданы графы G_1 и G_2. Пересечением этих графов назовем новый граф $G_1 \cap G_2$, который имеет только общие вершины этих двух графов и только общие дуги этих двух графов.

Пример 3.2. Построить пересечение двух графов G_1 (см. рис. 3.1) и G_2 (рис. 3.3).

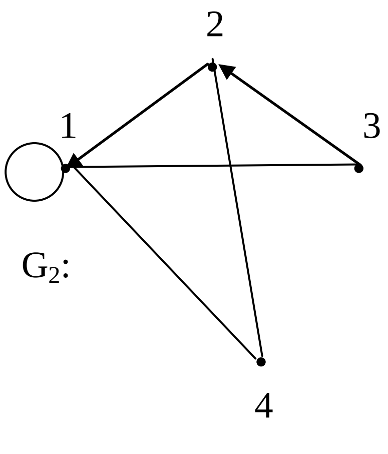

Рис. 3.3

Решение

Общие вершины этих двух графов: 1, 2, 3 и 4. Далее берём вершину 1. Сначала проверяем путь 1→2 на общность в двух графах: у графа G_1 есть путь 1→2, а у графа G_2 есть путь 2→1. Поэтому в пересечении вершины 1 и 2 не будут соединяться. Далее проверяем путь 1→3. В графе G_2 есть путь 1—3 в обе стороны, а у графа G_1 соединение этих вершин отсутствует, следовательно, этот путь не выделяется в пересечении. Рассмотрим путь 1→4. В частности, у графа G_2 есть путь 1—4 в обе стороны, а у графа G_1 есть путь 4→1. Поэтому в пересечении вершины 1 и 4 будут соединяться как в графе G_1: 4→1. Далее рассмотрим соединение вершин 2 и 3. В графах G_1 и G_2 есть путь 3→2, значит, этот путь будет выделяться в пересечении. Следующим рассмотрим путь 2→4. У графа G_2 есть соединение этих вершин в обе стороны (2—4), а у графа G_1 соединение этих вершин полностью отсутствует, следовательно, в пересечении эти вершины соединяться не будут. Теперь рассмотрим путь из вершины 3 в вершину 4. Соединение этих вершин в обе стороны есть только у графа G_1, а у графа G_2 нет никаких соединений этих вершин, поэтому рассматриваемое соединение не будет выделяться в пересечении данных графов. Общих петель у графов G_1 и G_2нет. В результате получаем рисунок 3.4 (на стр. 19).

Определение 3.5. Пусть заданы графы G_1 и G_2. Объединением этих графов назовем новый граф $G_1 \cup G_2$, который имеет вершины, принадлежащие хотя бы одному из этих двух графов, и имеет дуги, которые принадлежат хотя бы одному из этих двух графов.

Пример 3.3. Построить объединение двух графов G_1 (см. рис. 3.1) и G_2 (см. рис. 3.3).

Решение

Краткое решение: в «большой куче», куда можно «свалить» вершины этих двух графов разных вершин будет пять: 1, 2, 3, 4 и 5. Это и будут вершины графа $G_1 \cup G_2$. Точно также можно «свалить в общую кучу» и дуги обоих графов. В результате у графа $G_1 \cup G_2$ дуги будут такие: 1—2, 1––3, 1—4, 2←3, 2—4, 2—5, 3—4, 4←5, плюс петли возле вершин 1 и 3. Результат на рис. 3.5.

Более подробное решение: в данном случае будет пять общих вершин: 1, 2, 3, 4 и 5. Это и будут вершины графа$G_1 \cup G_2$. Берем вершину 1. У графа G_1 есть путь 1→2, а у графа G_2 путь 2→1, следовательно, в объединении графов G_1 и G_2 у дуги будет движение в обе стороны. Проверим путь 1→3. У графа G_1

нет соединения вершин 1 и 3, а у графа G_2 есть путь 1—3 в обе стороны, следовательно, в объединении графов, вершины 1 и 3 будут соединяться как у графа G_2: 1—3. Проверим путь 1→4: в графе G_1 есть путь 4→1, а у графа G_2 есть путь 1—4 в обе стороны, значит, в объединении этих двух графов вершины будут соединяться так: 1—4. Рассмотрим путь 2→3. В графах G_1 и G_2 вершины соединяются как 3→2, отсюда следует, что в объединении этих графов вершины будут также соединяться. Рассмотрим путь 2→4. У графа G_1 нет соединения вершин 2 и 4, а в графе G_2 есть соединение 2—4, значит, в объединении данных нам графов соединение вершин будет 2—4. Рассмотрим следующий путь: 3→4. Только в графе G_1 есть путь 3—4, таким образом, в объединении графов, вершины 3 и 4 соединятся также как в графе G_1.

Важно отметить то, что у графа G_1 есть вершина 5, которой нет у графа G_2 однако в объединении графов эта вершина будет присутствовать. Вершина 5 будет соединяется с вершиной 2 как 2—5 и с вершиной 4 как 5→4, т.е. точно также как у графа G_1. В результате у графа $G_1 \cup G_2$ дуги будут такие: 1—2, 1—3, 1—4, 3→2, 2—4, 2—5, 3—4, 5→4, плюс петли возле вершин 1 и 3 (рис. 3.5).

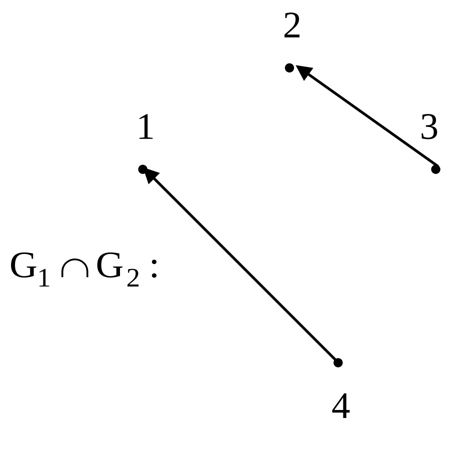

Рис. 3.4

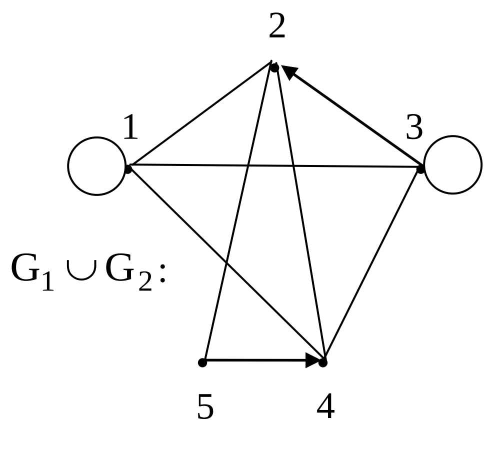

Рис. 3.5

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кокорина, И. П. Картографическое обеспечение зоогеографических исследований на базе ГИС-технологий [Текст] / И. П. Кокорина // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2011. – № 5. – С. 64–68.
2. Электронный атлас «Климат морей России и ключевых районов Мирового океана» / Вход в Атлас:http://www.esimo.ru/atlas/
3. Лисицкий, Д. В. Теоретические основы и особенности мультимедийной картографии [Текст] / Д. В. Лисицкий, Е. В. Комиссарова, А. А. Колесников // СГУГиТ. – 2017. – Т. 22, № 3. – С. 72–87.
4. Элементы теории графов и их технические приложения [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие для студентов технических специальностей. Ч. 1. Составители: Пронькин Ю.С., Егоров Ю.А. / Тверской государственный технический университет, 2007. – 57 с.
5. Березина Л. Ю. Графы и их применение: пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1979. – 143 с., илл.
6. Мартынов, Г.П. Учебно-методический комплекс дисциплины «Математика» для экологов и картографов [Электронный ресурс]: учебно-методический комплекс / Г.П. Мартынов. – М.: ИНФОРМРЕГИСТР, 2014. – 1,61 МБ. Режим доступа: http//www.lib/ssga.ru/
7. Мартынов, Г.П. Рабочая программа дисциплины Б1.Б.05 Математика [Электронный ресурс]: методический документ / Г.П. Мартынов. –Москва, «ИНФОРМИО», 2017 – 34 с. // Свидетельство о публикации в СМИ «ИНФОРМИО» от 09.10.2017, серия А № 001525/2017 / www.informio.ru.
8. Мартынов, Г.П. «Фонд оценочных средств дисциплины «Математика» [Электронный ресурс]: методическая разработка / Г.П. Мартынов. – Москва, «ИНФОРМИО», 2016 – 14 с. // Свидетельство о публикации в СМИ «ИНФОРМИО» от 15.11.2016, серия А № 002150/2016 / www.informio.ru.
9. Мартынов, Г.П. Организация самостоятельной работы студентов направления подготовки «Картография и геоинформатика» при изучении дисциплины «Математика» [Электронный ресурс]: методическая разработка / Г.П. Мартынов. – Москва, «ИНФОРМИО», 2016 – 7 с. // Свидетельство о публикации в СМИ «ИНФОРМИО» от 26.07.2016, серия А № 001637/2016 / www.informio.ru.
10. Мартынов, Г.П. Математика для экологов и картографов [Электронный ресурс]: учебное пособие. Ч. 1. / Г.П. Мартынов. – М.: ИНФОРМРЕГИСТР, 2013. – 2,63 МБ. Режим доступа: http//www.lib/ssga.ru/
11. Мартынов, Г.П. Математика для картографов и экологов [Текст]: учебное пособие. В 4-х ч. Ч. 1 / Г.П. Мартынов. – Новосибирск: СГУГиТ, 2016. – 192 с.
12. Мартынов, Г.П. Математика для картографов и экологов–II [Текст]: учебное пособие. / Г.П. Мартынов. – Новосибирск: СГУГиТ, 2017. – 155 с.

13. Вербная, В.П. Математика для дистанционного обучения: учебное пособие, издание 2-ое, стереотипное (Рекомендовано СибРУМЦ) / В.П. Вербная, Г.П. Мартынов, Е.С. Плюснина. – Новосибирск: СГУГиТ, 2016. – 278 с.
14. Вербная, В.П. Математика для дистанционного изучения [Электронный ресурс]: учебное пособие для вузов (Рекомендовано СибРУМЦ) / В.П. Вербная, Г.П. Мартынов, Е.С. Плюснина. – М.: ИНФОРМРЕГИСТР, 2013. – 230 с. Режим доступа: http//www.lib/ssga.ru/