МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Сибирский государственный университет геосистем и технологий»
Кафедра высшей математики

РЯДЫ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Электронное учебно-методическое пособие
для обучающихся на 1 и 2 курсах по направлениям подготовки бакалавров
05.03.03 Картография и геоинформатика
05.03.06 Экология и природопользование

Учебно-методическое пособие разработал:
доцент кафедры высшей математики Мартынов Геннадий Павлович,

Новосибирск, 2020

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГЕОСИСТЕМ И ТЕХНОЛОГИЙ»
(СГУГиТ)

Г.П. Мартынов

РЯДЫ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Электронное учебно-методическое пособие
для обучающихся на 1 и 2 курсах по направлениям подготовки бакалавров
05.03.03 Картография и геоинформатика
05.03.06 Экология и природопользование

Новосибирск
СГУГиТ
2020

УДК 517

Рецензент: кандидат технических наук, доцент, НГТУ, *Сопов В.И.*

Мартынов, Г.П.
М 294 Ряды в примерах и задачах, учебно-методическое пособие [Электронный ресурс] / Г.П. Мартынов, – Новосибирск: СГУГиТ, 2020. – 35 с.

Учебно-методическое пособие разработано сотрудником кафедры высшей математики Сибирского государственного университета геосистем и технологий, доцентом Г.П. Мартыновым. Пособие предназначено для обучающихся на 1 и 2 курсах СГУГиТ по направлениям подготовки бакалавров 05.03.03 Картография и геоинформатика и 05.03.06 Экология и природопользование. Пособие содержит краткую теорию (определения, формулы и теоремы) раздела «Ряды», примеры решения типовых задач и библиографический список рекомендуемой литературы. Данное пособие может быть использовано в качестве опорного конспекта лекций по теме «Ряды» при формировании комплекта учебных материалов для дистанционного обучения в вузе.

УДК 517

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Числовые ряды. Основные понятия

Определение 1.1. Пусть задана числовая последовательность:

$$a_1,\ a_2,\ a_3, ...,\ a_n, ...$$

Числовым рядом называется составленный с ее помощью следующий символ:

$$a_1 +\ a_2 +\ a_3 + ... +\ a_n + ..., \tag{1.1}$$

в котором просуммировано бесконечное число заданных слагаемых, одно из них – a_n – задает формулу для нахождения любого слагаемого с любым номером n. При этом сами слагаемые $a_1,\ a_2,\ a_3, ...,\ a_n, ...$ называются членами ряда (1.1), а слагаемое a_n – общим членом ряда (1.1). Сокращенно ряд (1.1) записывается так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n . \tag{1.2}$$

Определение 1.2. *Частичной суммой* ряда (1.1) называется сумма S_n первых его n слагаемых:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n . \tag{1.3}$$

Определение 1.3. Если существует предел частичных сумм: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S -$ число, тогда числовой ряд (1.1) называется *сходящимся*, а число S – называется *суммой ряда* (1.1). Если же $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, либо вообще не существует, то числовой ряд (1.1) называется расходящимся. Факт наличия суммы ряда записывается так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S\,. \tag{1.4}$$

Теорема 1.1 (необходимый признак сходимости ряда). Если числовой ряд (1.1) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Следствие. Если необходимый признак сходимости числового ряда не выполняется ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$), то ряд (1.1) расходится.

Замечание 1. Необходимый признак используется только в негативном смысле, т. е. для доказательства расходимости ряда в случае его невыполнения.

Например: рассмотрим числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{1}{5} + \frac{3}{8} + \frac{5}{11} + \ldots + \frac{2n-1}{3n+2} + \ldots \tag{1.5}$$

и найдем: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+2} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\cdot\left(2-\frac{1}{n}\right)}{n\cdot\left(3+\frac{1}{n}\right)} = \frac{2}{3} \neq 0,$

т. е. для ряда (1.5) не выполняется необходимый признак, поэтому ряд (1.5) расходится.

Замечание 2. Необходимый признак не является достаточным, т. е. если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то из этого факта ничего не следует, тем самым выполнение необходимого признака не обеспечивает сходимости ряда. Пример тому – гармонический ряд.

Примеры числовых рядов

1. Гармонический ряд:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots. \qquad (1.6)$$

Докажем, что этот ряд расходится. Имеем:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}>n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}. \qquad (1.7)$$

Разобьем слагаемые ряда (1.6) на такие группы с количеством слагаемых в каждой группе, равным 2, 2^2, 2^3, 2^4,…, 2^{k-1} соответственно:

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right), \left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\right),\ldots,$$

$$\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\frac{1}{2^{k-1}+3}+\frac{1}{2^{k-1}+4}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right).$$

Затем применим к каждой группе неравенство (1.7):

$$S_n = (\text{при } n=2^k) = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^k} = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\frac{1}{2^{k-1}+3}+\frac{1}{2^{k-1}+4}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right) > \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot k = B_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} S_{2^k} \ge \lim_{k\to\infty} B_k = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot k\right) = \infty,$$

т. е. частичные суммы гармонического ряда не ограничены и в пределе дают бесконечность, что означает расходимость гармонического ряда. Тем не менее $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. Вывод: для гармонического ряда необходимый признак выполняется, но ряд расходится.

2. Ряд геометрической прогрессии:

$$b_1+b_1q+b_1q^2+\ldots+b_1q^{n-1}+\ldots,\quad b_1\ne 0, q\ne 1, q\ne -1. \qquad (1.8)$$

Сумма первых n слагаемых геометрической прогрессии находится так: $S_n = \frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$, поэтому:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b_1}{1-q} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1-q^n\right) = \begin{cases} \infty, \text{ если } |q|>1; \\ \dfrac{b_1}{1-q}, \text{ если } |q|<1. \end{cases}$$

Вывод: ряд геометрической прогрессии (1.8) расходится, если $|q|>1$. Если $|q|<1$, то ряд сходится, причем его сумма: $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Замечание. Числовые ряды появились при решении некоторых технических задач. Например, при расчете колебаний опор и перегонов мостов.

Если в расчетах появляются числовые ряды, которые сходятся, то можно оценить изменяющиеся параметры и определить степень износа конструкций.

Если же появляются расходящиеся ряды, то возможны 2 варианта:

1) через некоторое время конструкция разрушится;
2) неправильно составлена схема исследования.

Поэтому и необходимо отличать сходящиеся ряды от других (расходящихся).

В связи с тем, что необходимый признак не является достаточным для сходимости числового ряда, далее рассмотрим группу достаточных признаков сходимости. Причем рассмотрим достаточные признаки для некоторых классов числовых рядов:

1) знакопостоянные и знакоположительные числовые ряды;
2) знакопеременные и знакочередующиеся числовые ряды.

2. Знакопостоянные, знакоположительные числовые ряды

Определение 2.1. Числовой ряд (1.1) называется *знакопостоянным* числовым рядом, если все члены этого ряда имеют одинаковый знак. Числовой ряд, у которого все члены ряда имеют знак «плюс» (ряд (2.1)), называется *знакоположительным*.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \\ a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ a_3 > 0,\ a_n > 0, \ldots \end{array}\right|. \qquad (2.1)$$

Существуют и знакоотрицательные числовые ряды, которые вместе со знакоположительными образуют множество знакопостоянных рядов. Однако знакоотрицательные ряды сводятся к знакоположительным, поэтому далее будем изучать только знакоположительные числовые ряды.

Пример. Ряд $-b_1 - b_2 - b_3 - \ldots - b_n - \ldots$, где $b_1 > 0, b_2 > 0, \ldots, b_n > 0$, легко сводится к знакоположительному ряду:

$$-b_1 - b_2 - b_3 - \ldots - b_n - \ldots = -(b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots).$$

Свойства знакоположительных числовых рядов

Рассмотрим знакоположительный числовой ряд (2.1) и запишем его частичные суммы:

$$S_1 = a_1 > 0, \quad S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2 > S_1, \quad S_3 = (a_1 + a_2) + a_3 = S_2 + a_3 > S_2 \Rightarrow \ldots$$

S_n – монотонно возрастающая функция.

В результате для частичных сумм знакоположительного ряда есть только 2 возможности:

1) последовательность S_n монотонно возрастает и ограничена сверху ($S_n < C,\ n \geq 1$), тогда существует предел частичных сумм, и знакоположительный ряд сходится;

2) последовательность S_n монотонно возрастает и не ограничена сверху ($S_n \to +\infty$), следовательно, ряд расходится.

Вывод: для знакоположительных числовых рядов невозможен случай несуществования предела $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Однако такое возможно для других рядов.

Например: ряд

$$1 – 1 + 1 – 1 + 1 – \ldots + (–1)^{n–1} + \ldots \qquad (2.2)$$

имеет следующие частичные суммы: $S_n = \begin{cases} 0, \ n - \text{четное;} \\ 1, \ n - \text{нечетное} \end{cases}$ – данная последовательность не имеет предела (рис. 4.1) на бесконечности, следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, и ряд (2.2) расходится по определению, но этот ряд не является знакоположительным, а является знакочередующимся рядом.

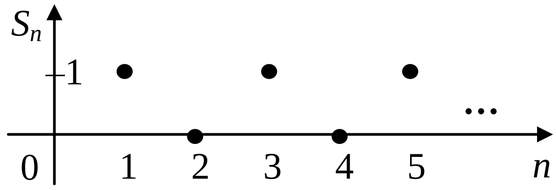

Рис. 2.1

Достаточные признаки сходимости знакоположительных числовых рядов

Теорема 2.1 (первый признак сравнения). Пусть даны два знакоположительных числовых ряда:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots; \tag{2.3}$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots, \tag{2.4}$$

при этом $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2, \ldots, a_n < b_n, \ldots$ (в этом случае говорят, что ряд (2.3)) является меньшим по отношению к большему ряду (2.4)).

Первый признак сравнения утверждает, что:

1) если больший ряд сходится, то меньший ряд тоже сходится;
2) если меньший ряд расходится, то больший ряд тоже расходится.

Теорема 2.2 (второй (предельный) признак сравнения). Пусть даны два знакоположительных числовых ряда (2.3) и (2.4), причем существует предел отношения: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K$, где число K таково, что $0 \le K < \infty$. Тогда:

1) при $K \neq 0$ ряды (2.3) и (2.4) сходятся (расходятся) одновременно;

2) при $K = 0$ из сходимости ряда (2.4) вытекает сходимость ряда (2.3).

Теорема 2.3 (третий признак сравнения). Пусть дан знакоположительный числовой ряд (2.3). Если выполняются 2 условия:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (необходимый признак выполнен);

2) $a_n \sim \dfrac{k}{n^p}$ при $n \to \infty$, $k \neq 0$, p – порядок малости, то при $p > 1$ – ряд (2.3) сходится, при $p \leq 1$ – ряд расходится.

Теорема 2.4 (признак Даламбера). Пусть дан знакоположительный числовой ряд (2.3), у которого существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$, тогда возможны три варианта:

1) $q > 1 \Rightarrow$ ряд (2.3) расходится;

2) $0 \leq q < 1 \Rightarrow$ ряд (2.3) сходится;

3) $q = 1 \Rightarrow$ используется не тот признак.

Доказательство основано на сравнении данного ряда (2.3) с рядом геометрической прогрессии (1.8) при $b_1 = 1$, который (как показано выше) при $q > 1$ – расходится, при $0 \leq q < 1$ – сходится.

Справка. Жан Лерон де Аламбер (1717–1783) – французский математик, механик, философ.

Замечание. Признак Даламбера целесообразно использовать в том случае, если у знакоположительного числового ряда формула для a_n содержит либо функцию факториал, либо показательную и степенную функции одновременно.

Пример 2.1. Исследовать числовые ряды (2.5) и (2.6) на сходимость.

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(3n)!} = \frac{2}{3!} + \frac{4}{6!} + \ldots. \qquad (2.5)$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5n^2+3} = \frac{4}{8} + \frac{16}{23} + \ldots. \qquad (2.6)$$

Решение

1. Исследуем внимательно свойства слагаемых ряда (2.5):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(3n)!}=\frac{2}{3!}+\frac{4}{6!}+\ldots.$$

Видно, что все его слагаемые положительны, поэтому дан знакоположительный числовой ряд, у которого a_n содержит функцию факториал, поэтому целесообразно применить признак Даламбера. Имеем:

$$a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(3(n+1))!}=\frac{2^n\cdot 2}{(3n+3)!}=\frac{2^n\cdot 2}{(3n)!(3n+1)(3n+2)(3n+3)};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot 2}{(3n)!(3n+1)(3n+2)(3n+3)}\cdot\frac{(3n)!}{2^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}=\frac{2}{\infty}=0=q<1.$$

Поэтому по признаку Даламбера числовой ряд (2.5) сходится.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{5n^2+3}=\frac{4}{8}+\frac{16}{23}+\ldots.$

Очевидно, что все слагаемые ряда (2.6) положительны, поэтому дан знакоположительный числовой ряд, у которого $a_n=\frac{4^n}{5n^2+3}$ содержит показательную и степенную функции, поэтому целесообразно применить признак Даламбера:

$$a_{n+1}=\frac{4^{n+1}}{5(n+1)^2+3}=\frac{4^n\cdot 4}{5(n+1)^2+3};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\cdot 4}{5(n+1)^2+3}\cdot\frac{5n^2+3}{4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\left(5n^2+3\right)}{5(n+1)^2+3}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2\left(5+\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left[5\left(\frac{n+1}{n}\right)^2+\frac{3}{n^2}\right]}=\lim_{n\to\infty}\frac{20}{5\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=4=q>1.$$

Поэтому по признаку Даламбера ряд (2.6) расходится.

Теорема 2.5 (радикальный признак Коши). Пусть дан знакоположительный числовой ряд (2.3), и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$. Тогда если:

1) $l>1\Rightarrow$ ряд (2.3) расходится;
2) $0\le l<1\Rightarrow$ ряд (2.3) сходится;
3) $l=1\Rightarrow$ необходимо применить другой признак.

Доказательство аналогично доказательству признака Даламбера.

Замечание. Данный признак целесообразно использовать в том случае, если a_n содержит некоторую общую степень, зависящую от n.

Пример 2.2. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n-2}\right)^{4n+5}=\left(\frac{1}{1}\right)^{9}+\left(\frac{3}{4}\right)^{13}+\dots \tag{2.7}$$

Решение

Очевидно, что дан знакоположительный числовой ряд, у которого $a_n=\left(\frac{2n-1}{3n-2}\right)^{4n+5}$ содержит общую степень, зависящую от n.

Применим радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{3n-2}\right)^{4n+5}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{3n-2}\right)^{\frac{4n+5}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{3n-2}\right)^{4+\frac{5}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(2-1/n)}{n(3-2/n)}\right)^{4+\frac{5}{n}}=\left(\frac{2-0}{3-0}\right)^{4+0}=\frac{16}{81}=l<1\Rightarrow,$$

в соответствии с радикальным признаком Коши, ряд (2.7) сходится.

Теорема 2.6 (интегральный признак Маклорена-Коши). Пусть задана функция $f(x)$, $x\ge 1$, которая непрерывна, положительна, монотонно убывает и $\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=0$. С ее помощью построим числовой ряд (2.3) таким образом, что: $f(n)=a_n$. Составим несобственный интеграл [7, с. 103]) I рода

$\int\limits_{A}^{\infty} f(x)\,dx,$ где число $A \geq 1$. Тогда этот несобственный интеграл и числовой ряд (2.3) сходятся (расходятся) одновременно.

Замечание. Интегральный признак используют для знакоположительных числовых рядов, у которых соответствующий несобственный интеграл можно вычислить или достаточно легко оценить.

Справка. Огюстен Луи Коши (1789–1857) – французский математик. Колин Маклорен (1698–1746) – шотландский математик.

Пример 2.3. Исследовать на сходимость числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}. \tag{2.8}$$

Решение

Дан знакоположительный числовой ряд. Восстановим производящую функцию ряда: $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}, x \geq 1$. Проверим выполнение всех свойств теоремы 2.6:

1) функция непрерывна, так как $x = -1 \notin [1, \infty)$;
2) функция положительна: $f(x) > 0$ при $x \geq 1$;
3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)} = \dfrac{1}{\infty} = 0$;
4) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$ монотонно убывает.

Составим несобственный интеграл:

$$I = \int\limits_{1}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} (\ln(x+1))^{-2}\, \frac{d\,x}{x+1} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} (\ln(x+1))^{-2}\, d(\ln(x+1)) = \lim_{b\to+\infty} \left.\frac{(\ln(x+1))^{-1}}{-1}\right|_{1}^{b} = \lim_{b\to+\infty} \left.\frac{-1}{\ln(x+1)}\right|_{1}^{b} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln(b+1)}+\frac{1}{\ln 2}\right)=0+\frac{1}{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}\Rightarrow$$ получилось число, т. е. несобственный интеграл сходится, поэтому в соответствии с интегральным признаком данный в условии числовой ряд (2.8) тоже сходится.

Замечание. Теорема 2.6 сравнивает ряд (2.3) с обобщенным гармоническим рядом:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}. \tag{2.9}$$

Исследуем ряд (2.9) на сходимость с помощью интегрального признака Маклорена-Коши.

Производящая функция $f(x)=\frac{1}{x^p}, x\geq 1$, непрерывна, положительна, монотонно убывает и стремится к нулю.

Рассмотрим несобственный интеграл:

$$I=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx=\int_1^{\infty}x^{-p}dx.$$

Возможны варианты:

1) $p=1, I=\int_1^{\infty}x^{-1}dx=\lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}(\ln b-\ln 1)=\infty$

– интеграл расходится, поэтому по интегральному признаку при $p = 1$ расходится и ряд (2.9);

2) $p\neq 1, I=\int_1^{\infty}x^{-p}dx=\lim_{b\to\infty}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_1^b$, далее имеем две возможности:

а) $p>1\Rightarrow -p+1<0\Rightarrow I=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{(-p+1)x^{p-1}}\Bigg|_1^b=\frac{1}{\infty}-\frac{1}{1-p}=\frac{1}{p-1}$, т. е. получилось число, поэтому интеграл сходится, тогда по интегральному признаку при $p > 1$ ряд (2.9) сходится;

б) $p<1\Rightarrow -p+1>0\Rightarrow I=\lim_{b\to\infty}\frac{x^{-p+1}}{(-p+1)}\Bigg|_1^b=\infty$, поэтому интеграл расходится, тогда по интегральному признаку при $p < 1$ ряд (2.9) расходится.

Вывод. При $p \le 1$ обобщенный гармонический ряд (2.9) расходится, а при $p > 1$ ряд (2.9) сходится.

Замечание. Третий признак сравнения целесообразно использовать для таких знакоположительных числовых рядов, у которых a_n содержит только степенные функции относительно n.

Первый признак сравнения целесообразно использовать, если удается сравнить данный ряд с уже известным числовым рядом.

Пример 2.4. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...=\left(q=\frac{1}{2},b_1=\frac{1}{2}\right)=\frac{b_1}{1-q}=1,$ т. е. ряд геометрической прогрессии (больший ряд) сходится. Следовательно, данный ряд, который является меньшим по отношению к сходящейся геометрической прогрессии, тоже сходится по первому признаку сравнения.

Пример 2.5. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+2n-1}{2n^5-n^4+3n^2}=1+\frac{15}{92}+.... \tag{2.10}$$

Решение

Дан знакоположительный числовой ряд, у которого a_n содержит только степенные функции, поэтому целесообразно применить 3-й признак сравнения, у которого два условия:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-1}{2n^5-n^4+3n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2}{2n^5}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{2n^3}=\frac{3}{\infty}=0;$

б) найдем порядок малости (оставив в числителе и знаменателе только «старшие слагаемые»): $a_n=\frac{3n^2+2n-1}{2n^5-n^4+3n^2}\sim\frac{3n^2}{2n^5}=\frac{3}{2n^3}=\frac{1{,}5}{n^3}$ при $n\to\infty$, т. е. порядок малости $p=3>1$, следовательно, по третьему признаку сравнения ряд (2.10) сходится.

3. Знакопеременные и знакочередующиеся числовые ряды

Определение 3.1. Рассмотрим числовой ряд (1.1):

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

Числовой ряд (1.1) называется *знакопеременным* числовым рядом, если члены этого ряда меняют свои знаки по некоторому закону. Числовой ряд, у которого члены ряда меняют свои знаки по закону чередования («+», «–», «+»,…, или наоборот: «–», «+», «–», …), называется *знакочередующимся*.

Пример 3.1. Ряд: $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-...+(-1)^n\cdot\frac{1}{2^{n-1}}+...$ – знакочередующийся, а ряд: $-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-...$ – знакопеременный.

Определение 3.2. Рассмотрим знакопеременный числовой ряд:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ..., \tag{3.1}$$

у которого члены ряда меняют свои знаки по некоторому закону. Составим соответствующий ряд из модулей:

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + ... + |a_n| + ... \tag{3.2}$$

Если сходятся оба ряда (3.1) и (3.2), то знакопеременный ряд (3.1) называется *абсолютно сходящимся*. Если сходится ряд (3.1), а ряд из модулей (3.2) расходится, то знакопеременный ряд (3.1) называется *условно сходящимся*.

Теорема 3.1. Из сходимости ряда (3.2) следует сходимость ряда (3.1).

Следствие. При проверке ряда (3.1) на абсолютную сходимость достаточно доказать сходимость ряда из модулей (3.2).

Далее относительно подробно рассмотрим только частный случай знакопеременных рядов – знакочередующиеся ряды. Общий вид знакочередующихся рядов можно представить в виде ряда (3.3) или ряда (3.4):

$$b_1 - b_2 + b_3 - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot b_n + \ldots, \text{ где } b_1 > 0, b_2 > 0, \ldots, b_n > 0, \ldots; \quad (3.3)$$

$$-b_1 + b_2 - b_3 + \ldots + (-1)^{n} \cdot b_n + \ldots, \text{ где } b_1 > 0, b_2 > 0, \ldots, b_n > 0, \ldots . \quad (3.4)$$

Для знакочередующихся рядов справедлива теорема 3.2.

Теорема 3.2 (признак Лейбница). Пусть дан знакочередующийся ряд вида (3.3) или (3.4), у которого:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$; 2) $b_{n+1} < b_n$, при всех $n \geq n_0$, где $n_0 \geq 1$.

Тогда:

1) знакочередующийся ряд сходится;

2) его сумма S такова, что $|S| < b_1$;

3) $|S - S_n| < b_{n+1}$,

где S_n – частичная сумма знакочередующегося ряда.

Замечание. Утверждение 3 теоремы 3.2 означает, что ошибка при вычислении суммы сходящегося «лейбницевского» ряда меньше модуля первого «отброшенного» слагаемого ряда.

Справка. Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716) – немецкий математик, физик и философ.

Пример 3.2. Исследовать ряды (3.5)–(3.7) на абсолютную (условную) сходимость:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n+2}}{(2n)!} = -\frac{27}{2} + \frac{83}{24} - \frac{243}{720} + \ldots . \quad (3.5)$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n-2}{4n^2 - n - 1} = \frac{1}{2} - \frac{4}{13} + \frac{7}{32} - \ldots . \quad (3.6)$$

$$\mathbf{3.}\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n^2-2}{4n^2-n+1}=-\frac{1}{4}+\frac{10}{15}-\frac{25}{34}+\dots \tag{3.7}$$

Решение

1. Дан знакочередующийся ряд типа (3.4). Исследуем его сначала на абсолютную сходимость, а для этого составим соответствующий ряд из модулей:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+2}}{(2n)!}=\frac{27}{2}+\frac{83}{24}+\frac{243}{720}+\dots \tag{3.8}$$

Получился знакоположительный числовой ряд (3.8), у которого a_n содержит функцию факториал, поэтому применим признак Даламбера:

$$a_{n+1}=\frac{3^{n+3}}{(2(n+1))!}=\frac{3^{n+2}\cdot 3}{(2n+2)!}=\frac{3^{n+2}\cdot 3}{(2n)!\cdot(2n+1)(2n+2)}=\frac{a_n\cdot 3}{(2n+1)(2n+2)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n\cdot 3}{(2n+1)(2n+2)\cdot a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{3}{\infty}=0=q<1,$$

следовательно, по признаку Даламбера ряд из модулей (3.8) сходится, поэтому по теореме 2.4 и по определению 3.2 знакочередующийся ряд (3.5) сходится абсолютно.

2. Ряд (3.6) является знакочередующимся рядом типа (3.3). Исследуем его сначала на абсолютную сходимость, а для этого составим соответствующий ряд из модулей:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{4n^2-n-1}=\frac{1}{2}+\frac{4}{13}+\frac{7}{32}+\dots \tag{3.9}$$

Получился знакоположительный числовой ряд (3.9), у которого a_n содержит только степенные функции относительно переменной n, поэтому применим третий признак сравнения, у которого два условия:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-2}{4n^2-n-1} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\left(3-\frac{2}{n}\right)}{n^2\left(4-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{4n} = \frac{3}{\infty} = 0 \Rightarrow$

величина a_n является бесконечно малой при $n\to\infty$. Определим порядок ее малости при $n\to\infty$ (оставим в числителе и знаменателе только «старшие слагаемые»):

б) $a_n = \frac{3n-2}{4n^2-n-1} \sim \frac{3n}{4n^2} = \frac{0,75}{n^1}$ при $n\to\infty$, поэтому порядок малости $p = 1$, а это в соответствии с третьим признаком сравнения означает, что ряд из модулей (3.9) расходится. Следовательно, у ряда (3.6) нет абсолютной сходимости, поэтому его надо исследовать на условную сходимость по признаку Лейбница, у которого два условия:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-2}{4n^2-n-1} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\left(3-\frac{2}{n}\right)}{n^2\left(4-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{4n} = \frac{3}{\infty} = 0 \Rightarrow$

величина a_n является бесконечно малой при $n\to\infty$;

б) $a_{n+1} = \frac{3n+3-2}{4(n+1)^2-n-1-1} = \frac{3n+1}{4n^2+7n+2}$, $a_n = \frac{3n-2}{4n^2-n-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3n+1}{4n^2+7n+2} \cdot \frac{4n^2-n-1}{3n-2} = \frac{12n^3+n^2-4n-1}{12n^3+13n^2-8n-4} =$$

$= \frac{12n^3+n^2-4n-1}{(12n^3+n^2-4n-1)+12n^2-4n-3} < 1$, так как $12n^2-4n-3>0$ при $n\geq 1 \Rightarrow$

оба условия признака Лейбница выполнены, поэтому ряд (3.6) сходится условно.

3. Ряд (3.7) является знакочередующимся рядом типа (3.4). Исследуем его сначала на абсолютную сходимость, а для этого составим соответствующий ряд из модулей:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-2}{4n^2-n+1} = \frac{1}{4} + \frac{10}{15} + \frac{25}{34} + \dots. \qquad (3.10)$$

Получился знакоположительный числовой ряд (3.10), у которого a_n содержит только степенные функции относительно переменной n, поэтому применим третий признак сравнения, у которого два условия:

а) $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2}{4n^2-n+1} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(3-\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(4-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{3}{4} \neq 0 \Rightarrow$$

первое условие третьего признака сравнения не выполнено (а именно, не выполнен необходимый признак (теорема 1.1) сходимости ряда (3.10)), поэтому 3-й признак сравнения не применим, но по невыполнению необходимого признака ряд из модулей (3.10) расходится.

Тогда проверим выполнение необходимого признака для самого знакочередующегося ряда (3.7):

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\cdot\frac{3n^2-2}{4n^2-n+1} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{n\to\infty}(-1)^n\cdot\frac{n^2\left(3-\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(4-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty}(-1)^n\cdot\frac{3}{4}\Rightarrow$$

данный предел не существует (так как выражение $(-1)^n\cdot\frac{3}{4}$ принимает только два значения $+\frac{3}{4}$ и $-\frac{3}{4}$, которые не сближаются на бесконечности), т. е. для ряда (3.7) не выполнен необходимый признак сходимости.

Вывод. Ряд (3.7) расходится (и абсолютно, и условно).

4. Функциональные ряды, степенные ряды

Определение 4.1. Пусть на области D определена функциональная последовательность:

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ldots,\ f_n(x),\ldots. \tag{4.1}$$

Составленный с ее помощью символ:

$$f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots \tag{4.2}$$

называется *функциональным рядом.* Ряд (4.2) кратко обозначается так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \tag{4.3}$$

Если у ряда (4.2) фиксировать $x \in D$, то функциональный ряд (4.2) превращается в числовой ряд, который либо сходится, либо расходится.

Определение 4.2. Назовем *областью сходимости* функционального ряда (4.2) множество всех тех (и только тех) фиксированных x, при которых числовой ряд (полученный из (4.2) подстановкой конкретного фиксированного x) сходится. Область сходимости ряда (4.2) будем обозначать так: $D_{cx.}$.

Определение 4.3. Возьмем фиксированный $x \in D_{cx.}$, тогда ряд (4.2) становится сходящимся числовым рядом, т. е. имеет некоторую сумму S, соответствующую данному $x \in D_{cx.}$. Этот закон соответствия данному $x \in D_{cx.}$ суммы S ряда (4.2) определяет функцию $S(x)$, $x \in D_{cx.}$, которая называется *суммой функционального ряда* (4.2). А записывается это так:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),\ x \in D_{cx.}. \tag{4.4}$$

Далее рассмотрим один частный случай функциональных рядов: степенные ряды, образованные функциональными последовательностями из степенных функций.

Степенные ряды

Определение 4.4. Если функциональный ряд (4.2) составлен из степенных функций следующего вида:

$$b_0 + b_1 \cdot (x - x_0) + b_2 \cdot (x - x_0)^2 + b_3 \cdot (x - x_0)^3 + \ldots + b_n \cdot (x - x_0)^n + \ldots, \tag{4.5}$$

где x_0, b_0, b_1, b_2, $b_3, \ldots,$ $b_n, \ldots$ – заданные числа, то такой ряд (4.5) называется *степенным рядом*.

Степенной ряд сокращенно записывается так:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x - x_0)^n . \qquad (4.6)$$

Свойства степенных рядов

1. Область сходимости степенного ряда (4.5) имеет вид:

$$D_{сх.} = (x_0 - R,\ x_0 + R), \text{ либо } D_{сх.} \subset [\,x_0 - R,\ x_0 + R\,], \qquad (4.7)$$

где число R, называемое *радиусом сходимости* степенного ряда (4.5), находится по одной из следующих формул:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right|, \qquad (4.8)$$

$$R = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\,b_n\,|} \right)^{-1} . \qquad (4.9)$$

2. Внутри области сходимости (4.7) при каждом фиксированном x ряд (4.5) является абсолютно сходящимся числовым рядом.

3. На границе области сходимости (4.7) (т. е. в точках $x = x_0 \pm R$) требуется дополнительное исследование ряда (4.5) на сходимость.

4. Сумма $S(x)$ степенного ряда (4.5) является непрерывной функцией на области сходимости (4.7).

5. Если x лежит внутри области сходимости (4.7), то производная суммы степенного ряда (4.5) равна сумме сходящегося ряда, составленного из производных каждого слагаемого ряда (4.5):

$$S'(x) = b_1 + 2b_2 \cdot (x - x_0) + 3b_3 \cdot (x - x_0)^2 + \ldots + nb_n \cdot (x - x_0)^{n-1} + \ldots . \qquad (4.10)$$

6. Если числа a, b находятся внутри области (4.7), то определенный интеграл от суммы степенного ряда (4.5) равен сумме сходящегося числового ряда, составленного из определенных интегралов от каждого слагаемого ряда (4.5):

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b b_n \cdot (x - x_0)^n\,dx . \qquad (4.11)$$

Пример 4.1. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{3^{n-1}\cdot(2n^2+1)}\cdot(x+1)^n . \qquad (4.12)$$

Решение

Дан степенной ряд типа (4.6), у которого $x_0=-1,\ b_n=\dfrac{n+2}{3^{n-1}\cdot(2n^2+1)}$.

В соответствии с формулами (4.7) и (4.8) имеем:

$$D_{cx.}=(x_0-R,\ x_0+R),\ R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right|,\ x_0=-1,\ b_n=\frac{n+2}{3^{n-1}\cdot(2n^2+1)};$$

$$b_{n+1}=\frac{n+3}{3^n\cdot(2(n+1)^2+1)}=\frac{n+3}{3^{n-1}\cdot 3\cdot(2n^2+4n+3)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\cdot 3^{n-1}\cdot 3\cdot(2n^2+4n+3)}{3^{n-1}\cdot(2n^2+1)\cdot(n+3)}=$$

$$=3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\cdot(2n^2+4n+3)}{(2n^2+1)\cdot(n+3)}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 2n^2}{2n^2\cdot n}=3\Rightarrow$$

предварительно записывается (возможно, это неточно): $D_{cx.}=(-1-3,\ -1+3)=(-4,\ 2)$. При этом в соответствии со 2-м свойством степенных рядов: внутри (–4, 2) степенной ряд (4.12) сходится абсолютно. Проведем дополнительное исследование ряда (4.12) на сходимость в точках: $x=2$ и $x=-4$. Подставляем $x=2$ в ряд (4.12):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{3^{n-1}\cdot(2n^2+1)}\cdot(2+1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(n+2)}{2n^2+1}=6+3+\frac{4}{3}+\frac{15}{19}+\dots \qquad (4.13)$$

Получился знакоположительный числовой ряд (4.13), у которого a_n содержит только степенные функции, поэтому применим 3-й признак сравнения, у которого два условия:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+6}{2n^2+1}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1{,}5}{n}=\dfrac{1{,}5}{\infty}=0$, т. е. величина a_n является бесконечно малой при $n\to\infty$;

2) определим порядок ее малости: $a_n = \dfrac{3n+6}{2n^2+1} \sim \dfrac{3n}{2n^2} = \dfrac{1{,}5}{n^1} \Rightarrow p = 1-$ порядок малости при $n \to \infty$, поэтому по 3-му признаку сравнения ряд (4.13) расходится. Следовательно $x = 2$ не включаем в область сходимости.

Подставляем $x = -4$ в степенной ряд (4.12):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{3^{n-1} \cdot (2n^2+1)} \cdot (-4+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{3(n+2)}{2n^2+1} = 6 - 3 + \frac{4}{3} - \frac{15}{19} + \ldots. \quad (4.14)$$

Получился знакочередующийся ряд (4.14). Исследуем его сначала на абсолютную сходимость, для чего составим соответствующий ряд из модулей:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(n+2)}{2n^2+1} = 6 + 3 + \frac{4}{3} + \frac{15}{19} + \ldots.$$

Получился уже известный ранее знакоположительный ряд (4.13), который, как выяснилось выше, расходится, поэтому у знакочередующегося ряда (4.14) нет абсолютной сходимости.

Проверим ряд (4.14) на условную сходимость по признаку Лейбница, у которого два условия:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+6}{2n^2+1} = \left\{ \dfrac{\infty}{\infty} \right\} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n}{2n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1{,}5}{n} = \dfrac{1{,}5}{\infty} = 0$, т. е. величина a_n является бесконечно малой при $n \to \infty$ (первое условие выполнено);

2) $b_n = \dfrac{3n+6}{2n^2+1}$, $b_{n+1} = \dfrac{3n+9}{2(n+1)^2+1} = \dfrac{3n+9}{2n^2+4n+3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{(3n+9)\cdot(2n^2+1)}{(2n^2+4n+3)\cdot(3n+6)} = \dfrac{2n^3+18n^2+3n+9}{6n^3+24n^2+33n+18} < 1 \Rightarrow b_{n+1} < b_n$ при всех $n \geq 0$ (так как каждое слагаемое числителя меньше соответствующего слагаемого знаменателя при $n \geq 1$, а при $n = 0$ эта дробь равна 0,5 и меньше единицы тоже). Поэтому оба условия признака Лейбница выполнены, следовательно, знакочередующийся ряд (4.14) сходится условно, т. е. степенной ряд (4.12) при $x = -4$ условно сходится.

Ответ. $D_{сх.} = [-4,\ 2)$, причем при $x = -4$ ряд сходится условно.

Степенные ряды Тейлора, Маклорена

Теорема 4.1. Пусть задана функция $f(x)$, $x\in[a,b]$; $x_0\in(a,b)$. В некоторой δ-окрестности точки x_0 $f(x)$ имеет: первую производную, вторую, …, производную любого порядка.

Тогда для функции $f(x)$ имеет место следующее представление (в этой δ-окрестности точки x_0) в виде суммы сходящегося на этой δ-окрестности степенного *ряда Тейлора*:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \quad (4.15)$$

Замечание. При $x_0 = 0$ ряд (4.15) носит название *ряда Маклорена* (ряд Маклорена – это частный случай ряда Тейлора).

Справка. Брук Тейлор (1685–1731) – английский математик. Колин Маклорен (1698–1746) – шотландский математик.

Разложение некоторых элементарных функций в ряд Маклорена

Положим $x_0=0$, тогда по аналогии с формулой Маклорена для некоторых элементарных функций выводятся следующие разложения в ряд Маклорена:

1. $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\ldots, x\in(-\infty,\ \infty)$. (4.16)

2. $\sin x=x-\dfrac{1}{3!}\cdot x^3+\dfrac{1}{5!}\cdot x^5-\ldots.+(-1)^k\cdot\dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\ldots,\ x\in(-\infty,\ \infty)$. (4.17)

3. $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\ldots.+(-1)^k\cdot\dfrac{x^{2k}}{(2k)!}+\ldots,\ x\in(-\infty,\ \infty)$. (4.18)

4. $\ln(1+x)=x-\dfrac{1}{2}\cdot x^2+\dfrac{1}{3}\cdot x^3-\ldots.+(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{n}\cdot x^n+\ldots,\ x\in(-1,\ 1]$. (4.19)

5. $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha\cdot x+\dfrac{\alpha\cdot(\alpha-1)}{2!}\cdot x^{2}+\dfrac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)}{3!}\cdot x^{3}+....+$

$$+\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot....\cdot(\alpha-(n-1))}{n!}\cdot x^{n}+...,\ x\in(-1,\,1). \qquad (4.20)$$

6. $$\ln\frac{1+x}{1-x}=2x+\frac{2}{3}\cdot x^{3}+\frac{2}{5}\cdot x^{5}+...+\frac{2}{2k+1}\cdot x^{2k+1}+...,\ x\in(-1,\,1). \qquad (4.21)$$

7. $$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{5}}{5}-...+(-1)^{k}\cdot\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+...,\ x\in\left(-1,\,1\right]. \qquad (4.22)$$

Замечание. Представленные ряды Маклорена для элементарных функций используется, например, при вычислении приближенных значений элементарных функций с помощью микрокалькулятора по заложенной в нем программе, а также для приближенного вычисления определенных интегралов, для которых не удается найти первообразную в виде элементарной функции.

Пример 4.2. Вычислить приближенно с точностью 10^{-3} определенные интегралы, используя стандартное разложение подынтегральной функции в степенной ряд:

1) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{\sin\left(x^{3}\right)}{x}dx$; 2) $\displaystyle\int_{0}^{0,5}x^{2}\cdot e^{x^{2}}dx$.

Решение

1. Подынтегральная функция $f(x)$ имеет точку устранимого разрыва [7, с. 63] I рода: $x=0$, так как в силу первого замечательного предела:

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^{3}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}x^{2}\cdot\frac{\sin\left(x^{3}\right)}{x^{3}}=0\cdot 1=0$ – предел существует, тем самым можно доопределить функцию при $x=0$: $f(0)=0$.

Следовательно, нам дан собственный определенный интеграл от доопределенной непрерывной функции на $\left[0,\,1\right]$. Используем стандартное разложение (4.17), заменив в нем x на x^{3}:

$$\sin\left(x^3\right)=x^3-\frac{1}{3!}\cdot x^9+\frac{1}{5!}\cdot x^{15}-....+(-1)^k\cdot\frac{x^{6k+3}}{(2k+1)!}+...,\ x\in(-\infty,\ \infty)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\sin\left(x^3\right)}{x}=x^2-\frac{1}{3!}\cdot x^8+\frac{1}{5!}\cdot x^{14}-....+(-1)^k\cdot\frac{x^{6k+2}}{(2k+1)!}+...,\ \text{при}\ x\neq 0. \quad (4.23)$$

Однако при $x = 0$ степенной ряд (4.23) сходится и имеет сумму, равную нулю, что совпадает со значением исправленной подынтегральной функции в нуле. Поэтому можно считать, что равенство (4.23) справедливо при любом x. По шестому свойству (с. 22) степенных рядов: определенный интеграл от суммы сходящегося степенного ряда (4.23) равен сумме сходящегося числового ряда, составленного из определенных интегралов от каждого слагаемого ряда (4.23):

$$\int_0^1\frac{\sin\left(x^3\right)}{x}dx=\int_0^1 x^2dx-\frac{1}{3!}\cdot\int_0^1 x^8\,dx+....+(-1)^k\cdot\int_0^1\frac{x^{6k+2}}{(2k+1)!}dx+...=$$

$$=\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1-\frac{x^9}{6\cdot 9}\bigg|_0^1+\frac{x^{15}}{120\cdot 15}\bigg|_0^1-...+(-1)^k\cdot\frac{x^{6k+3}}{(2k+1)!\cdot(6k+3)}\bigg|_0^1+...=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{54}+\frac{1}{1800}-....+(-1)^k\cdot\frac{1}{(2k+1)!\cdot(6k+3)}+.... \quad (4.24)$$

Получился сходящийся знакочередующийся числовой ряд (4.24). В соответствии с признаком Лейбница: ошибка при вычислении суммы сходящегося знакочередующегося числового ряда не превосходит модуля первого отброшенного слагаемого, каковым для точности 10^{-3} является третье слагаемое в (4.24).

Тем самым: $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin\left(x^3\right)}{x}dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{54}\pm 10^{-3}=\frac{17}{54}\pm 10^{-3}=0{,}315\ \pm 10^{-3}.$

Ответ: $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin\left(x^3\right)}{x}dx=0{,}315\ \pm 10^{-3}.$

2. Подынтегральная функция не имеет точек разрыва, поэтому нам дан собственный определенный интеграл от непрерывной функции. Используем стандартное разложение (4.16), заменив в нем x на x^2:

$$e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots, x\in(-\infty,\,\infty)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2\cdot e^{x^2}=x^2+x^4+\frac{x^6}{2!}+\frac{x^8}{3!}+\ldots+\frac{x^{2n+2}}{n!}+\ldots, x\in(-\infty,\,\infty). \qquad (4.25)$$

По шестому свойству степенных рядов: определенный интеграл от суммы степенного ряда (4.25) равен сумме сходящегося числового ряда, составленного из определенных интегралов от каждого слагаемого ряда (4.25):

$$\int\limits_0^{0,5} x^2\cdot e^{x^2}\,dx=\int\limits_0^{0,5} x^2dx+\int\limits_0^{0,5} x^4dx+\int\limits_0^{0,5}\frac{x^6}{2!}dx+\ldots+\int\limits_0^{0,5}\frac{x^{2n+2}}{n!}dx+\ldots=$$

$$=\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{0,5}+\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^{0,5}+\frac{x^7}{14}\Bigg|_0^{0,5}+\frac{x^9}{54}\Bigg|_0^{0,5}+\ldots+\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)\cdot n!}\Bigg|_0^{0,5}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{24}+\frac{1}{160}+\frac{1}{1792}+\ldots+\frac{1}{2^{2n+3}\cdot(2n+3)\cdot n!}+\frac{1}{2^{2n+5}\cdot(2n+5)\cdot(n+1)!}+\ldots. \qquad (4.26)$$

Получился знакоположительный ряд (4.26), к которому не применим признак Лейбница, поэтому оценка точности разложения (4.26) проводится по-другому. Исследуем остаток ряда (4.26):

$$R_n=\frac{1}{2^{2n+3}\cdot(2n+3)\cdot n!}+\frac{1}{2^{2n+5}\cdot(2n+5)\cdot(n+1)!}+\frac{1}{2^{2n+7}\cdot(2n+7)\cdot(n+2)!}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2^{2n+3}\cdot(2n+3)\cdot n!}\cdot\left(1+\frac{2n+3}{2^2\cdot(2n+5)\cdot(n+1)}+\frac{2n+3}{2^4\cdot(2n+7)\cdot(n+1)(n+2)}+\ldots\right)<$$

$$<\frac{1}{2^{2n+3}\cdot(2n+3)\cdot n!}\cdot\left(1+\frac{1}{4\cdot(n+1)}+\left(\frac{1}{4\cdot(n+1)}\right)^2+\left(\frac{1}{4\cdot(n+1)}\right)^3+\ldots\right)-$$

внутри скобок получилась бесконечно убывающая прогрессия, сумма которой равна: $P=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{4n+4}}=\dfrac{4n+4}{4n+3}$, поэтому остаток ряда (4.26) оценивается следующим образом:

$$R_n<\frac{1}{2^{2n+3}\cdot(2n+3)\cdot n!}\cdot\frac{4n+4}{4n+3}\Rightarrow R_2<\frac{1}{2^7\cdot 7\cdot 2}\cdot\frac{12}{11}=\frac{12}{11\cdot 1792}<10^{-3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\limits_0^{0,5}x^2\cdot e^{x^2}\,dx=\frac{1}{24}+\frac{1}{160}\pm 10^{-3}=0,048\pm 10^{-3}.$$

Ответ: $\int\limits_0^{0,5}x^2\cdot e^{x^2}\,dx=0,048\pm 10^{-3}.$

5. Тригонометрический ряд Фурье

Справка. Жан Батист Жозеф Фурье (1768–1830) – французский математик и физик.

Еще одним примером функциональных рядов является тригонометрический ряд Фурье, образованный функциональной последовательностью из тригонометрических функций, заданных на отрезке $[a,\,b]$:

$$\frac{1}{\sqrt{2l}},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right),\ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right),\ n=1,2,3,\ldots, \qquad (5.1)$$

где $l=(b-a)/2$.

Тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$, $x\in[a,\,b]$ имеет вид:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)+b_n\cdot\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad (5.2)$$

где

$$a_0=\frac{1}{l}\cdot\int\limits_a^b f(x)\,dx;\qquad a_n=\frac{1}{l}\cdot\int\limits_a^b f(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx,\ n\geq 1; \qquad (5.3)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx,\ n \ge 1. \tag{5.4}$$

Теорема 5.1 (Дирихле). Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ ограничена и, кроме того, кусочно монотонна и кусочно непрерывна. Тогда ряд Фурье (5.2), построенный для этой функции по функциональной последовательности (5.1), сходится при всех x. При этом его сумма $S(x)$:

1) периодична с периодом $T = 2l$;

2) если $x_0 \in (a, b)$ – точка непрерывности функции $f(x)$, то $S(x_0) = f(x_0)$;

3) если $x_0 \in (a, b)$ – точка разрыва I рода функции $f(x)$ (а точек разрыва II рода у функции не может быть по условию теоремы), то

$$S(x_0) = 0{,}5\,[\,f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)];$$

4) $S(a) = S(b) = 0{,}5\cdot[f(b-0) + f(a+0)]$.

Без доказательства.

Справка. Петер Густав Дирихле (1805–1859) – немецкий математик и физик.

Свойства коэффициентов ряда Фурье

1. Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[-l, l]$ является четной, тогда коэффициенты ее ряда Фурье обладают свойствами:

$$b_n = 0,\ n \ge 1,\ a_n = \frac{2}{l}\cdot\int_0^l f(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx,\ n \ge 0. \tag{5.5}$$

2. Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[-l, l]$ является нечетной, тогда коэффициенты ее ряда Фурье обладают свойствами:

$$a_n = 0,\ n \ge 0,\ b_n = \frac{2}{l}\cdot\int_0^l f(x)\cdot\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx,\ n \ge 1. \tag{5.6}$$

Данные свойства коэффициентов ряда Фурье следуют из соответствующих свойств определенного интеграла для четной функции и для нечетной функций.

Примеры

1. Разложить функцию $f(x)=\begin{cases} x\cdot(x+\pi), & -\pi\le x\le 0; \\ x\cdot(\pi-x), & 0<x\le\pi \end{cases}$ в тригонометрический ряд Фурье. Используя это разложение, найти сумму числового ряда $A=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\dfrac{1}{(2k-1)^3}$.

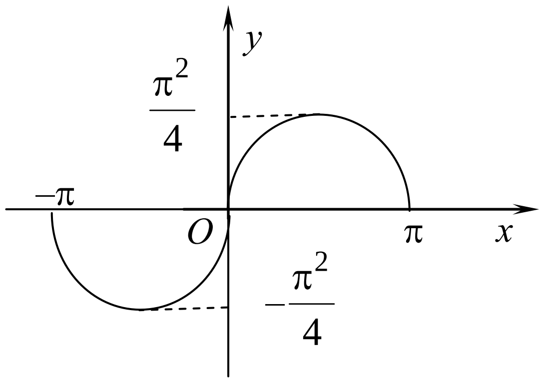

Рис. 5.1

Решение

Данная функция (рис. 5.1) является нечетной на отрезке $[-\pi,\pi]$, поэтому в силу формул (5.6) ее ряд Фурье имеет вид: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\cdot\sin(nx)$, где в силу формул (5.6):

$$b_n=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}f(x)\cdot\sin(nx)dx=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}x(\pi-x)\sin(nx)\,dx=\text{(по частям)}=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\cdot\left(-x(\pi-x)\cdot\cos(nx)+\frac{1}{n}\cdot(\pi-2x)\cdot\sin(nx)-\frac{2}{n^2}\cos(nx)\right)\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=-\frac{4}{\pi n^3}\cdot\left((-1)^n-1\right)=\frac{4}{\pi n^3}\cdot(1-(-1)^n).$$

Следовательно, ряд Фурье:

$$\frac{4}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\cdot(1-(-1)^n)\cdot\sin(nx)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{(2k-1)^3}.$$

Из графика данной функции (рис. 5.1) видно, что она удовлетворяет условиям теоремы Дирихле. Поэтому, полагая $x=\dfrac{\pi}{2}$, получим, согласно теореме 5.1:

$$\frac{\pi^2}{4}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{8}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)\cdot\pi/2)}{(2k-1)^3}=\frac{8}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left(k\pi-\pi/2\right)}{\left(2k-1\right)^3}=$$

$$=\frac{8}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{\left(2k-1\right)^3}=\frac{8}{\pi}\cdot A=\frac{\pi^2}{4}\Rightarrow A=\frac{\pi^3}{32}.$$

2. Разложить функцию $f(x)=\begin{cases}0, x\in[-3/2, \quad -1);\\ -x, x\in[-1,\ 0);\\ x, x\in[0, \quad 1);\\ 0, x\in(1, \quad 3/2]\end{cases}$ в тригонометрический ряд Фурье. Обозначив через $S(x)$, $x\in(-\infty,+\infty)$, сумму ее ряда Фурье, найти $S(0{,}5)$, $S(1)$, $S(3/2)$, $S(2)$, $S(31{,}5)$.

Решение

Функция $f(x)$ является четной. Для нее l = 3/2. Поэтому в силу формул (5.5) ее ряд Фурье: $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\cos(2\pi n x/3)$, где в силу формул (5.5):

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^{3/2}f(x)\,dx=\frac{2}{3}\cdot 2\int_0^1 x\,dx=\frac{2}{3};$$

$$a_n=\frac{2}{l}\cdot\int_0^l f(x)\cdot\cos(2\pi n x/3)\,dx=\frac{4}{3}\cdot\int_0^1 x\cos(2\pi n x/3)\,dx=\text{(по частям)}=$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2\pi n}\left(x\cdot\sin\left(\frac{2\pi n x}{3}\right)+\frac{3}{2\pi n}\cos\left(\frac{2\pi n x}{3}\right)\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{\pi n}\cdot\left(\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{2\pi n}\cdot\left(\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)-1\right)\right)=\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)-\frac{6}{\pi^2 n^2}\sin^2\left(\frac{\pi n}{3}\right).$$

Таким образом, ряд Фурье имеет вид:

$$1/3+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)-\frac{6}{\pi^2 n^2}\sin^2\left(\frac{\pi n}{3}\right)\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi n x}{3}\right).$$

Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле. Найдем значения суммы ряда $S(x)$ в заданных точках. Точка $x = 0{,}5$ является точкой непрерывности функции $f(x)$, поэтому в силу теоремы Дирихле $S(0{,}5) = f(0{,}5) = 0{,}5$. Точка $x = 1$ является точкой разрыва функции $f(x)$, поэтому $S(1) = 0{,}5\,(f(1-0) + f(1+0)) = 0{,}5\,(1+0) = 0{,}5$.

Точка $x = 3/2$ является граничной точкой отрезка $[-3/2,\ 3/2]$, поэтому по теореме Дирихле:

$S(3/2) = 0{,}5(f(3/2-0) + f(-3/2+0)) = 0$.

Учитывая периодичность $S(x)$ с периодом $T = 2\,l = 3$, находим:

$S(2) = S(2-3) = S(-1) = f(-1) = 1$, $\quad S(31{,}5) = S(31{,}5-30) = S(3/2) = 0$.

3. Разложить $f(x) = x,\ x \in \left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}\right]$ в тригонометрический ряд Фурье.

Решение

Данная функция не является ни четной, ни нечетной (так как область ее определения не симметрична относительно нуля), поэтому применяем общие формулы (5.2)–(5.4), в которых: $a = 0$, $b = 2\pi$, $l = (3\pi/2 + \pi/2)/2 = \pi$.

Поэтому

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} x\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-\pi/2}^{3\pi/2} = \pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} x\cdot\cos(nx)\,dx = (\text{по частям}) = \frac{1}{\pi n}\cdot\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} x\cdot d(\sin(nx)) =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\cdot\left(x\sin(nx)\Bigg|_{-\pi/2}^{3\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{3\pi/2}\sin(nx)\,dx \right) = \frac{1}{\pi n}\cdot\left(\frac{3\pi}{2}\sin\left(\frac{3\pi n}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n}\cdot\cos(nx)\Bigg|_{-\pi/2}^{3\pi/2}\right) = \frac{1}{\pi n}\cdot\left(\frac{3\pi}{2}\sin\left(2\pi n - \frac{\pi n}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{1}{n}\cdot\left(\cos\left(\frac{3\pi n}{2}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)\right) = \frac{1}{\pi n}\cdot\left(-2\pi\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{1}{n}\cdot\left(\cos\left(2\pi n - \frac{\pi n}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)\right) =$$

$$=\frac{1}{\pi n}\cdot\left(-2\pi\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{1}{n}\cdot 0\right)=\frac{-2}{n}\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right),\ n\geq 1;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{-\pi/2}^{3\pi/2}x\cdot\sin(nx)\,dx=(\text{по частям})=\frac{-1}{\pi n}\cdot\int\limits_{-\pi/2}^{3\pi/2}x\cdot d\,(\cos(nx))=$$

$$=\frac{-1}{\pi n}\cdot\left(x\cos(nx)\Big|_{-\pi/2}^{3\pi/2}-\int\limits_{-\pi/2}^{3\pi/2}\cos\,(nx)\,dx\right)=\frac{-1}{\pi n}\cdot\left(\frac{3\pi}{2}\cos\left(\frac{3\pi n}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{n}\cdot\sin(nx)\Big|_{-\pi/2}^{3\pi/2}\right)=\frac{-1}{\pi n}\cdot\left(\frac{3\pi}{2}\cos\left(2\pi n-\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{1}{n}\cdot\left(\sin\left(\frac{3\pi n}{2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)\right)=\frac{-1}{\pi n}\cdot\left(2\pi\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{1}{n}\cdot\left(\sin\left(2\pi n-\frac{\pi n}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{-1}{\pi n}\cdot\left(2\pi\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{1}{n}\cdot 0\right)=\frac{-2}{n}\cdot\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right),\ n\geq 1.$$

Следовательно, в соответствии с (5.2) ряд Фурье примет вид:

$$\frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\cos(nx)+\frac{2}{n}\cdot\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\sin(nx)\right).$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мартынов, Г.П. Учебно-методический комплекс дисциплины «Математика» для экологов и картографов [Электронный ресурс]: учебно-методический комплекс / Г.П. Мартынов. – М.: ИНФОРМРЕГИСТР, 2014. – 1,61 МБ. Режим доступа: http//www.lib/ssga.ru/
2. Мартынов, Г.П. Рабочая программа дисциплины Б1.Б.05 Математика [Электронный ресурс]: методический документ / Г.П. Мартынов. –Москва, «ИНФОРМИО», 2017 – 34 с. // Свидетельство о публикации в СМИ «ИНФОРМИО» от 09.10.2017, серия А № 001525/2017 / www.informio.ru.
3. Мартынов, Г.П. «Фонд оценочных средств дисциплины «Математика» [Электронный ресурс]: методическая разработка / Г.П. Мартынов. – Москва, «ИНФОРМИО», 2016 – 14 с. // Свидетельство о публикации в СМИ «ИНФОРМИО» от 15.11.2016, серия А № 002150/2016 / www.informio.ru.

4. Мартынов, Г.П. Организация самостоятельной работы студентов направления подготовки «Картография и геоинформатика» при изучении дисциплины «Математика» [Электронный ресурс]: методическая разработка / Г.П. Мартынов. – Москва, «ИНФОРМИО», 2016 – 7 с. // Свидетельство о публикации в СМИ «ИНФОРМИО» от 26.07.2016, серия А № 001637/2016 / www.informio.ru.
5. Мартынов, Г.П. Математика для экологов и картографов [Электронный ресурс]: учебное пособие. Ч. 1. / Г.П. Мартынов. – М.: ИНФОРМРЕГИСТР, 2013. – 2,63 МБ. Режим доступа: http//www.lib/ssga.ru/
6. Мартынов, Г.П. Математика для картографов и экологов [Текст]: учебное пособие. В 4-х ч. Ч. 1 / Г.П. Мартынов. – Новосибирск: СГУГиТ, 2016. – 192 с.
7. Вербная, В.П. Математика для дистанционного обучения: учебное пособие, издание 2-ое, стереотипное (Рекомендовано СибРУМЦ) / В.П. Вербная, Г.П. Мартынов, Е.С. Плюснина. – Новосибирск: СГУГиТ, 2016. – 278 с.
8. Вербная, В.П. Математика для дистанционного изучения [Электронный ресурс]: учебное пособие для вузов (Рекомендовано СибРУМЦ) / В.П. Вербная, Г.П. Мартынов, Е.С. Плюснина. – М.: ИНФОРМРЕГИСТР, 2013. – 230 с. Режим доступа: http//www.lib/ssga.ru/