**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Сибирский государственный университет геосистем и технологий»
Кафедра высшей математики**

ПРАКТИКУМ «ИНТЕГРАЛ. РЯДЫ. ВВЕДЕНИЕ В ДИСКРЕТНУЮ МАТЕМАТИКУ»

**Электронное учебно-методическое пособие
для обучающихся на 2 курсе по направлению подготовки бакалавров
05.03.03 Картография и геоинформатика**

**Учебно-методическое пособие разработал:
доцент кафедры высшей математики Мартынов Геннадий Павлович,**

Новосибирск, 2020

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГЕОСИСТЕМ И ТЕХНОЛОГИЙ»
(СГУГиТ)

Г.П. Мартынов

ПРАКТИКУМ
«ИНТЕГРАЛ. РЯДЫ.
ВВЕДЕНИЕ В ДИСКРЕТНУЮ МАТЕМАТИКУ»

Электронное учебно-методическое пособие
для обучающихся на 2 курсе по направлению подготовки бакалавров
05.03.03 Картография и геоинформатика

Новосибирск
2020

УДК 51

Рецензент: доктор физико-математических наук, доцент, профессор НГТУ,
Костюченко В.Я.

Мартынов, Г.П.
М 294 Практикум «Интеграл. Ряды. Введение в дискретную математику», учебно-методическое пособие [Электронный ресурс] / Г.П. Мартынов, – Новосибирск: 2020. – 32 с.

Учебно-методическое пособие разработано сотрудником кафедры высшей математики Сибирского государственного университета геосистем и технологий, доцентом Г.П. Мартыновым. Пособие предназначено для обучающихся на 2 курсе СГУГиТ по направлению подготовки бакалавров 05.03.03 Картография и геоинформатика. Пособие содержит практикум: контрольные вопросы для повторения теоретического материала, аудиторные задания, самостоятельную работу обучающихся, расчетно-графическую работу по всем перечисленным в названии разделам и библиографический список рекомендуемой литературы. Данное пособие может быть использовано в качестве второго учебного документа после лекционного курса при формировании комплекта учебных материалов 3 семестра для дистанционного обучения в вузе.

УДК 51

© Мартынов Г.П., 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

Занятие 1. Определённый интеграл

Контрольные вопросы

1. Дайте определение «определённого интеграла».
2. Перечислите свойства определённого интеграла.
3. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
4. Что такое «среднее значение функции на отрезке»?

Аудиторные задания

1. Выразить через определённый интеграл и вычислить площадь области D, ограниченной кривыми: $y = x^2$, $y = 8\text{-}x^2$.

2. Найти площадь области, ограниченной кривыми: $y = x^2/2$, $x = 3$, $x = 6$ и осью Ox.

3. Найти среднее значение функции: $y = 2x^2 + 3x + 3$ на отрезке [1, 4].

4. Найти площадь области, ограниченной кривыми: $y = x^2/4$, $y = 3 - x^2/2$.

Самостоятельная работа

Найти площадь области, ограниченной:

5. осями Ox и Oy, прямой: $x = 3$ кривой: $y = x^2 + 1$;

6. прямой: $y = 2x + 3$ и кривой: $y = x^2$;

7. кривыми: $y = x^2 - 6x + 10$, $y = 6x - x^2$.

8. Найти среднее значение функции: $y = \left(9 - x^2\right)^{-0,5}$ на отрезке [–2; 2].

Ответы

1. $S = \int\limits_{-2}^{2}\left(8 - 2x^2\right)dx = \dfrac{64}{3}$ (ед^2); **2.** 31,5(ед^2); **3.** 24,5; **4.** 8; **5.** 12;

6. 32/3; **7.** 64/3; **8.** $\dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{2}{3}\right) \approx 0,364$.

Занятие 2. Геометрические приложения определённого интеграла

Контрольные вопросы

1. Как с помощью определённого интеграла найти площадь в декартовых (полярных) координатах?
2. Как найти длину кривой в декартовых (полярных) координатах? Длину кривой, заданной с помощью параметра?
3. Как найти объём тела вращения?

Аудиторные задания

1. Найти длину дуги параболы:

$y = 2x^{3/2}$ от точки A (1, 2) до точки B (4, 16).

2. Найти длину линии: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, t – параметр.

3. Найти объём тела, полученного при вращении параболы:

$y^2 = 4x$, $x \in [0; 1]$, вокруг оси Ox (вокруг оси Oy).

4. Найти площадь области, ограниченной линией: $r = a\cos(5\varphi)$.

Самостоятельная работа

5. Найти длину дуги параболы:

$4y^2 = x^3$ от точки O (0, 0) до точки B (1, 0,5).

6. Найти длину дуги кривой:

$x = R(\cos t + t\sin t)$, $y = R(\sin t - t\cos t)$, $t \in [0; \pi]$.

7. Фигура, ограниченная параболами: $y = x^2$ и $x = y^2$, вращается вокруг оси Ox. Найти объём полученного тела вращения.

8. Найти площадь области, ограниченной кривой, заданной в полярной системе координат уравнением: $r = a\sin(2\varphi)$.

Ответы

1. $l \approx 14{,}2$; **2.** $6a$; **3.** $V_{ox} = 2\pi$, $V_{oy} = 0{,}8\,\pi$; **4.** $\pi\, a^2/4$; **5.** 134/27;

6. $0{,}5\,\pi^2 R$; **7.** $0{,}3\,\pi$; **8.** $\pi\, a^2/4$.

Занятие 3. Приближённые методы вычисления определённых интегралов

Контрольные вопросы

1. Запишите приближённые: «формулу прямоугольников» и «формулу трапеций». Какова их точность?
2. Запишите формулу Симпсона. Какова её точность?

Аудиторные и самостоятельные задачи

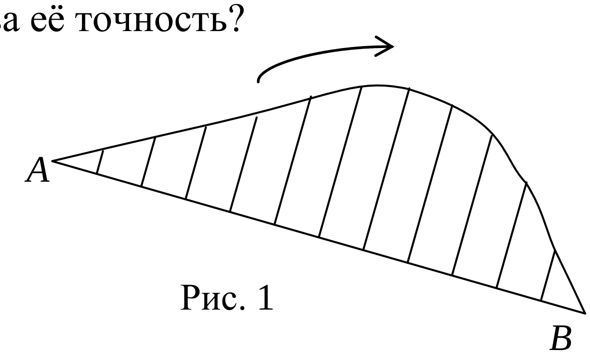

Рис. 1

1. Прямая линия касается берега реки (рис. 1) в точках A и B. Для приближённого нахождения площади участка, ограниченного линией берега реки и прямой AB, построены 11 перпендикуляров (через каждые 5 метров) к прямой AB до пересечения их с линией берега.

При измерении длины этих перпендикуляров оказались такие (по направлению от точки A к точке B):
3,28; 4,02; 4,64; 5,26; 4,98; 3,62; 3,82; 4,68; 5,26; 3,82; 3,24 (метров). Вычислить приближённое значение площади участка с помощью формулы прямоугольников и формулы Симпсона.

2. Вычислить по формуле Симпсона $\int\limits_{1,05}^{1,35} f(x)dx$, если функция $f(x)$ задана следующей таблицей:

x	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35
$f(x)$	2,36	2,50	2,74	3,04	3,46	3,98	4,60

3. Вычислить приближённо $\int\limits_a^b f(x)dx$ по формуле Симпсона ($n = 10$), все вычисления производить с точностью 10^{-3}, если:

а) $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = \sqrt{1 - x^3}$; б) $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = \sqrt{1 + x^4}$;

в) $a = 0$, $b = \pi/2$, $f(x) = \sqrt{0{,}5 - 0{,}1\sin^2 x}$; г) $a = 0$, $b = \pi$, $f(x) = \sqrt{2 - \cos^2 x}$.

Ответы

1. $S_1 \approx 233\,м^2$, $S_2 \approx 239\,м^2$; **2.** 0,9573; **3.** а) 0,837; б) 1,090; в) 1,052; г) 3,819.

Занятие 4. Задание плоской области в виде систем двойных неравенств

Контрольные вопросы

1. Какая область называется правильной (неправильной) в отношении оси Ox?
2. Какая область называется правильной (неправильной) в отношении оси Oy?
3. Какая область называется неправильной?

4. Как задать правильную (неправильную) область в виде систем двойных неравенств?

Задачи (аудиторные и самостоятельные)

Задать двумя способами область D в виде системы (или систем) двойных неравенств, если D ограничена линиями:

1. $y=0$, $y=2$, $y=0{,}5x$, $y=0{,}5x-1$.   2. $y=x^2$, $x=y^2$.

3. $x=3$, $x=5$, $3x-2y+4=0$, $3x-2y+1=0$.

4. $x=0$, $y=0$, $x+y=2$.   5. $y=x^2$, $y=4-x^2$.

6. $y=x$, $y=2x$, $x+y=6$.

Ответы

1. $D_{xy}=\left\{\begin{matrix}0\le x\le 2\\ 0\le y\le 0{,}5x\end{matrix}\right\}\cup\left\{\begin{matrix}2\le x\le 4\\ 0{,}5x-1\le y\le 0{,}5x\end{matrix}\right\}\cup\left\{\begin{matrix}4\le x\le 6\\ 0{,}5x-1\le y\le 2\end{matrix}\right\}$,

$D_{yx}=\left\{\begin{matrix}0\le y\le 2\\ 2y\le x\le 2y+2\end{matrix}\right\}$; **2.** $D_{xy}=\left\{\begin{matrix}0\le x\le 1\\ x^2\le y\le \sqrt{x}\end{matrix}\right\}$, $D_{yx}=\left\{\begin{matrix}0\le y\le 1\\ y^2\le x\le \sqrt{y}\end{matrix}\right\}$;

3. $D_{xy}=\left\{\begin{matrix}3\le x\le 5\\ 1{,}5x+0{,}5\le y\le 1{,}5x+2\end{matrix}\right\}$,

$$D_{yx}=\left\{\begin{matrix}5\le y\le 6{,}5\\ 3\le x\le (2y-1)/3\end{matrix}\right\}\cup\left\{\begin{matrix}6{,}5\le y\le 8\\ (2y-4)/3\le x\le (2y-1)/3\end{matrix}\right\}\cup\left\{\begin{matrix}8\le y\le 9{,}5\\ (2y-4)/3\le x\le 5\end{matrix}\right\};$$

4. $D_{xy}=\left\{\begin{matrix}0\le x\le 2\\ 0\le y\le 2-x\end{matrix}\right\}$, $D_{yx}=\left\{\begin{matrix}0\le y\le 2\\ 0\le x\le 2-y\end{matrix}\right\}$;

5. $D_{xy}=\left\{\begin{matrix}-\sqrt{2}\le x\le \sqrt{2}\\ x^2\le y\le 4-x^2\end{matrix}\right\}$, $D_{yx}=\left\{\begin{matrix}0\le y\le 2\\ -\sqrt{y}\le x\le \sqrt{y}\end{matrix}\right\}\cup\left\{\begin{matrix}2\le y\le 4\\ -\sqrt{4-y}\le x\le \sqrt{4-y}\end{matrix}\right\}$;

6. $D_{xy}=\begin{cases}0\le x\le 2\\ x\le y\le 2x\end{cases}\cup\begin{cases}2\le x\le 3\\ x\le y\le 6-x\end{cases}$, $D_{yx}=\begin{cases}0\le y\le 3\\ 0{,}5y\le x\le y\end{cases}\cup\begin{cases}3\le y\le 4\\ 0{,}5y\le x\le 6-y\end{cases}$.

Занятие 5. Двойной интеграл

Контрольные вопросы

1. Дайте определение двойного интеграла.
2. В чем заключается геометрический смысл двойного интеграла?
3. Назовите свойства двойного интеграла.
4. Изложите план вычисления двойного интеграла в декартовых координатах для правильных и неправильных областей.

Задачи (аудиторные и самостоятельные)

1. Найти пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x;y)\,dS$, проектируя область D сначала на ось Ox, если D ограничена:

а) $y=x^2,\ y=\sqrt{x}$; б) $y=2x,\ y=3x,\ x+y=12$;

в) $y=x,\ y=x+3,\ 2x+y=1,\ 2x+y=5$;

2. Вычислить $\iint\limits_D f(x;y)\,dS$, если:

а) $f(x;y)=\dfrac{x^2}{1+y^2}$, D: $0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1$;

б) $f(x;y)=xy$, D: $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2$.

3. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле:

а) $\int\limits_0^1\left(\int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x;y)\,dx\right)dy$; б) $\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{x} f(x;y)\,dy\right)dx+\int\limits_1^2\left(\int\limits_0^{2-x} f(x;y)\,dy\right)dx$;

в) $\int\limits_{0}^{2}\left(\int\limits_{2x}^{6-x} f(x;y)dy\right)dx$; г) $\int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{0}^{x^2} f(x;y)dy\right)dx+\int\limits_{1}^{3}\left(\int\limits_{0}^{1{,}5-0{,}5x} f(x;y)dy\right)dx$.

Ответы

1. а) $\int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x;y)dy\right)dx$; б) $\int\limits_{0}^{3}\left(\int\limits_{2x}^{3x} f(x;y)dy\right)dx+\int\limits_{3}^{4}\left(\int\limits_{2x}^{12-x} f(x;y)dy\right)dx$;

в) $\int\limits_{-2/3}^{1/3}\left(\int\limits_{1-2x}^{3+x} f(x;y)dy\right)dx+\int\limits_{1/3}^{2/3}\left(\int\limits_{x}^{3+x} f(x;y)dy\right)dx+\int\limits_{2/3}^{5/3}\left(\int\limits_{x}^{5-2x} f(x;y)dy\right)dx$;

2. а) $2\pi/3$; б) 1; **3.** а) $\int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{x^2}^{x} f(x;y)dy\right)dx$; б) $\int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{y}^{2-y} f(x;y)dx\right)dy$;

в) $\int\limits_{0}^{4}\left(\int\limits_{0}^{0{,}5y} f(x;y)dx\right)dy+\int\limits_{4}^{6}\left(\int\limits_{0}^{6-y} f(x;y)dx\right)dy$; г) $\int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x;y)dx\right)dy$;

Занятие 6. Двойной интеграл в полярных координатах

Контрольные вопросы

1. Что такое полярные координаты? Как они связаны с декартовыми координатами? Когда целесообразен переход к полярным координатам?
2. Запишите $\iint\limits_{D} f(x;y)dS$ в полярных координатах.
3. Как найти площадь области D с помощью двойного интеграла в полярных координатах?

Задачи (аудиторные и самостоятельные)

1. Перейти в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x;y)\,dS$ к полярным координатам (обосновать целесообразность этого), если область D задана так:

а) $x^2+y^2 \le R^2$; б) $x^2+y^2 \le 4y$.

2. В двойном интеграле перейти к полярным координатам:

а) $\int\limits_0^{2R}\left(\int\limits_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x;y)\,dx\right)dy$; б) $\int\limits_0^{R}\left(\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} f(x;y)\,dy\right)dx$.

3. Найти площадь области D с помощью двойного интеграла в полярных координатах, если D ограничена:

а) $x=0,\ y=\sqrt{3}\cdot x,\ x^2+y^2=2y,\ x^2+y^2=4y$;

б) $y=x,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ x^2+y^2=4x,\ x^2+y^2=8x$;

в) $y=0,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ x^2+y^2=2x,\ x^2+y^2=4x$.

Ответы

1. а) $\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{R} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)\,r\,dr\right)d\varphi$**;** б) $\int\limits_0^{\pi}\left(\int\limits_0^{4\sin\varphi} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)\,r\,dr\right)d\varphi$**;**

2. а) $\int\limits_0^{\pi/2}\left(\int\limits_0^{2R\sin\varphi} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)\,r\,dr\right)d\varphi$**;** б) $\int\limits_{3\pi/2}^{2\pi}\left(\int\limits_0^{R} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)\,r\,dr\right)d\varphi$**;**

3. а) $S = \pi/2 + 3\sqrt{3}/4$; б) $S = \pi + 6 - 3\sqrt{3}$; в) $S = \pi/2 + 3\sqrt{3}/4$.

Занятие 7. Вычисление площадей и объёмов с помощью двойных интегралов

Контрольные вопросы

1. Как найти площадь области D с помощью двойного интеграла в прямоугольных координатах? В полярных координатах?
2. Как с помощью двойного интеграла найти объем «цилиндрического тела»? Произвольного тела?

Задачи (аудиторные и самостоятельные)

1. Найти площадь области D, ограниченной:

а) $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $x=4$; б) $y=x$, $y=2x$, $x+y=6$;

в) $y=0$, $y=-\dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $y=-\sqrt{2x-x^2}$, $y=-\sqrt{4x-x^2}$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

а) $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=4$, $y=4$, $z=x^2+y^2+1$;

б) $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $z=0$, $x+z=6$;

в) $x=0$, $y=0$, $z=0$, $6x+4y+3z=12$;

г) $y=0$, $z=0$, $3x+y=6$, $3x+2y=12$, $x+y+z=6$;

д) $x=0$, $y=0$, $z=0$, $2x+3y=12$, $z=0{,}5y^2$.

Ответы

1. а) $\dfrac{16}{3}$; б) 3; в) $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$;

2. а) $\dfrac{560}{3}$; б) $\dfrac{48\sqrt{6}}{5}$**;** в) 4; г) 12; д) 16.

Занятие 8. Тройной интеграл

Контрольные вопросы

1. Что такое тройной интеграл?
2. Каковы свойства тройного интеграла?
3. Записать тройной интеграл в цилиндрических координатах, в сферических координатах.
4. Когда целесообразен переход в тройном интеграле к цилиндрическим координатам? К сферическим координатам?
5. Как с помощью тройного интеграла найти объём тела? Массу тела?
6. Как с помощью тройного интеграла найти центр тяжести тела?

Задачи (аудиторные и самостоятельные)

С помощью тройного интеграла найти объём тела, ограниченного поверхностями:

1. $x=0\ (x\ge 0),\ y=0,\ z=0,\ 2x+y=4,\ z=4-x^2;$

2. $x^2+y^2=R^2,\ z=0,\ z=x^3,\ (x\ge 0);$

3. $x=-1,\ x=2,\ z=4-y^2,\ z=y^2+2;$

4. $x^2+y^2+z^2=4,\ 3z=x^2+y^2.$

5. Найти массу цилиндра $x^2+y^2\le R^2$, $0\le z\le H$, если плотность $\gamma=x^2+y^2$.

6. Найти центр тяжести половины шара: $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z\ge 0$ – при условии, что плотность $\gamma=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Ответы

1. $\frac{40}{3}$**; 2.** $\frac{4R^5}{15}$**; 3.** 8**; 4.** $V_1=\frac{19\pi}{6}$**,** $V_2=7{,}5\pi$**; 5.** $0{,}5\pi R^4H$; **6.** $x_c=y_c=0$, $y_c=0{,}4R$.

Занятие 9. Примерный вариант контрольной работы «Интеграл»

1. Найти с помощью определённого интеграла площадь области, ограниченной линиями: $y = 0$, $y = 2x$, $y = 3 - x$.

2. Вычислить $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^2 x^2 \, y e^{y^2} d x \right) d y$.

3. Найти с помощью двойного интеграла площадь области D, ограниченной линиями: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$.

4. Найти объём тела, ограниченного поверхностями: $z = 0$, $x^2 + y^2 = 4$,

$z = 4 - x^2$.

5. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^2 \left(\int\limits_{x^2/4}^{2\sqrt{x}} f(x;y) d y \right) d x$.

Ответы

1. 1,5; **2.** $\frac{4(e-1)}{3}$**;** **3.** 2**;** **4.** 12π**;**

5. $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{y^2/4}^{2\sqrt{y}} f(x;y) d x \right) d y + \int\limits_1^{2\sqrt{2}} \left(\int\limits_{y^2/4}^{2} f(x;y) d x \right) d y$**;**

Занятие 10. Числовые ряды, знакоположительные ряды

Контрольные вопросы

1. Что такое «числовой ряд».
2. Какой числовой ряд называется сходящимся (расходящимся)? Что такое «сумма ряда»?
3. Запишите необходимый признак сходимости числового ряда.

4. Как определяются знакоположительные числовые ряды? Каковы их свойства?
5. Сформулируйте достаточные признаки сходимости знакоположительных числовых рядов.

Аудиторные задания

1. С помощью определения найдите сумму ряда:

а) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

2. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ на сходимость, если:

а) $a_n=\left((2n-1)\cdot 2^{2n-1}\right)^{-1}$; б) $a_n=\sin(\pi/2^n)$; в) $a_n=(n+1)/(n^2+2)$;

г) $a_n=(n+3)/\left((n+4)n^2\right)$; д) $a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$; е) $a_n=\left((2n+3)!\right)^{-1}$;

ж) $a_n=n\cdot 2^{1-n}$; з) $a_n=\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}$.

Самостоятельная работа

3. С помощью определения найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, если:

а) $a_n=1/[n(n+3)]$; б) $a_n=(3^n+2^n)/6^n$.

4. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ на сходимость, если:

а) $a_n=(3n-1)^{-1}$; б) $a_n=tg(\pi/(9n))$; в) $a_n=\left[(n^2+1)/(n^3+4)\right]^2$;

г) $a_n=\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)/n$; д) $a_n=n^2\cdot 3^{-n}$; е) $a_n=(n+1)!\cdot 5^{-n}$;

ж) $a_n=n^2\cdot\sin\left(\pi\cdot 2^{-n}\right)$.

Ответы

1. а) $S = 1$; б) $S = 1/2$; **2.** а) сходится; б) сходится; в) расходится;

г) сходится; д) расходится; е) сходится; ж) сходится; з) сходится.

3. а) $S = 11/18$; б) $S = 1{,}5$;

4. а) расходится; б) расходится; в) сходится; г) сходится; д) сходится.

Занятие 11. Знакопеременные, знакочередующиеся числовые ряды

Контрольные вопросы

1. Какой числовой ряд называется знакопеременным (знакочередующимся)?
2. Что такое «абсолютная (условная) сходимость»?
3. Запишите признак Лейбница.

Аудиторные задания

1. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ на абсолютную (условную) сходимость, если:

а) $a_n = (-1)^n \cdot (n+1)^{-2} / \sqrt{n+2}$;

б) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot n/(2n-1)$;

в) $a_n = (-1)^n \cdot (n^2+1)/n^3$;

г) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot n^2/n!$;

д) $a_n = (-1)^n \cdot \left[(2n+3)/(3n+2)\right]^{4n}$;

е) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \sqrt{(n+1)/n}$;

ж) $a_n = (-1)^n \cdot (n+1)^{-1} \cdot \left[\ln(n+1)\right]^{-4}$.

Самостоятельная работа

2. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ на абсолютную (условную) сходимость, если:

а) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot (3n-2) \cdot (n+1)^{-1}$;

б) $a_n = (-1)^n / \sqrt{(n+3)(n+1)}$;

в) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot 2^n / (3n)!$; г) $a_n = (-1)^n / [(n+2)\ln(n+2)]$;

д) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (4n-1)}$; е) $a_n = (-1)^n \cdot \sin[\pi(n+3)/(2n)]$.

Ответы

1. а) сходится абсолютно; б) расходится; в) сходится условно; г) сходится абсолютно; д) сходится абсолютно; е) расходится; ж) сходится абсолютно. **2.** а) расходится; б) сходится условно; в) сходится абсолютно; г) сходится условно; д) сходится абсолютно; е) расходится.

Занятия 12,13. Функциональные и степенные ряды

Контрольные вопросы

1. Что такое «функциональный ряд»?
2. Как определяют его область сходимости и его сумму?
3. Что такое «степенной ряд»?
4. Как находится область сходимости степенного ряда?
5. Каковы свойства степенных рядов?

Аудиторные задания

1. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \cdot (x - x_0)^n$

(на границе указать: где степенной ряд сходится абсолютно, а где – условно), если:

а) $x_0 = 0$, $b_n = 1$; б) $x_0 = 0$, $b_n = 1/n^2$; в) $x_0 = 0$, $b_n = 1/(n + \sqrt{n})$;

г) $x_0 = 0$, $b_n = n!$; д) $x_0 = 2$, $b_n = 1/[n \cdot 10^n]$; е) $x_0 = -3$, $b_n = 1/\sqrt{n(n+1)}$.

Самостоятельная работа

2. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \cdot (x - x_0)^n$, если:

а) $x_0 = -1$, $b_n = 2^n/n!$; б) $x_0 = 0$, $b_n = 2^{n-1}$;

в) $x_0 = 2$, $b_n = 3^{n-1}/n$; г) $x_0 = -3$, $b_n = 2^n \cdot (n^2 + 1)/(3n + 1)!$.

Ответы

1. а) $D_{\text{сх}} = D_{\text{абс}} = (-1, 1)$; б) $D_{\text{сх}} = D_{\text{абс}} = [-1, 1]$; в) $D_{\text{сх}} = [-1, 1)$, $D_{\text{абс}} = (-1, 1)$;

г) $D_{\text{сх}} = \{0\}$; д) $D_{\text{сх}} = [-8, 12)$, $D_{\text{абс}} = (-8, 12)$; е) $D_{\text{сх}} = [-4, -2)$,$D_{\text{абс}} = (-4, -2)$.

2. а) $D_{\text{сх}} = D_{\text{абс}} = (-\infty, \infty)$; б) $D_{\text{сх}} = D_{\text{абс}} = (-0{,}5, 0{,}5)$; в) $D_{\text{сх}} = [5/3, 7/3)$,

$D_{\text{абс}} = (5/3, 7/3)$; г) $D_{\text{сх}} = D_{\text{абс}} = (-\infty, \infty)$.

Занятие 14. Степенные ряды в приближённых вычислениях

Контрольные вопросы

1. Как определяются степенные ряды Тейлора, Маклорена?
2. Запишите разложения некоторых элементарных функций в ряд Маклорена.
3. Как применяются степенные ряды в приближённых вычислениях?
4. Как оценивается точность в приближенном вычислении суммы знакочередующегося (знакоположительного) числового ряда?

Аудиторные задания

1. Разложить функции. $y = f(x)$ в степенной ряд Тейлора (Маклорена) в окрестности точки x_0, если:

а) $f(x) = 1/x$, $x_0 = 3$; б) $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = 0$.

2. Вычислить приближённое значение sin18°, взяв три первых ненулевых слагаемых разложения $\sin x$ в ряд Маклорена. Оценить точность вычисления.

3. Вычислить приближённо $\sqrt[3]{10} = 2\sqrt[3]{1{,}25}$, взяв четыре первых слагаемых в разложении $(1+x)^{\alpha}$, $\alpha = 1/3$, в ряд Маклорена. Оценить точность.

4. Вычислить $\sqrt[5]{250}$ с точностью 10^{-4}.

5. Вычислить $I = \int\limits_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x^3}}{x^3}dx$ с точностью 10^{-4}.

Самостоятельная работа

6. Разложить функции. $y = f(x)$ в степенной ряд Тейлора (Маклорена) в окрестности точки x_0, если:

а) $f(x) = \sin(0{,}5x)$, $x_0 = 0$; б) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$, $x_0 = 0$.

7. Вычислить $\cos 10°$ с точностью 10^{-4}.

8. Вычислить $\sqrt[3]{70}$ с точностью 10^{-3}.

9. Вычислить приближённо $\sqrt[5]{e}$, взяв три первых слагаемых в разложении e^x в ряд Маклорена. Оценить точность.

10. Вычислить $I = \int\limits_{0}^{0,8} x^{10} \cdot \sin x\, dx$ с точностью 10^{-3}.

Ответы

1. а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot 3^{-n-1} \cdot (x-3)^n$, $x \in (0,\ 6)$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot 2^{2n-1} \cdot x^n \cdot ((2n)!)^{-1}$, $x \in (-\infty,\ \infty)$.

2. $\sin 18° = 0{,}3090170 \pm 10^{-7}$. **3.** $\sqrt[3]{10} = 2{,}154 \pm 10^{-3}$. **4.** $\sqrt[5]{250} = 3{,}0171 \pm 10^{-4}$.

5. $I = 37{,}400 \pm 10^{-3}$. **6.** а) $\sin(0{,}5x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot (0{,}5)^{2n-1} \cdot x^{2n-1}/(2n-1)!$,

$x \in (-\infty, \infty)$; б) $x^2 \cdot e^{-x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{n+2} / n!$, $x \in (-\infty, \infty)$.

7. $\cos 10° = 0{,}9848 \pm 10^{-4}$. **8.** $\sqrt[3]{70} = 4{,}121 \pm 10^{-3}$. **9.** $\sqrt[5]{e} = 1{,}22 \pm 0{,}02$.

10. $I = 0{,}006 \pm 10^{-3}$.

Занятие 15. Примерный вариант контрольной работы «Ряды»

1. С помощью определения найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если:

а) $a_n = 1/[n(n+4)]$; б) $a_n = (3^n + 6^n)/9^n$.

2. Исследовать ряд $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ на сходимость, если:

а) $a_n = \left[(n^2+1)/(n^3+4)\right]^{0,5}$; б) $a_n = n^2 \cdot 4^{-n}$; в) $a_n = (n+2)! \cdot 3^{-n}$;

3. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ на абсолютную (условную) сходимость, если:

а) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot (5n-2) \cdot (2n+1)^{-1}$; б) $a_n = (-1)^n / \sqrt{(2n+3)(n+4)}$;

4. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot (x - x_0)^n$, если:

$x_0 = 4$, $b_n = 2^{n-1}/n$;

5. Вычислить с точностью 10^{-3}: $I = \int_0^{0,4} x^3 \cdot \sin x \, dx$

Ответы

1. а) $S = 25/48$; б) $S = 2{,}5$; **2.** а) расходится; б) сходится; в) расходится;
3. а) расходится; б) сходится условно; 4. $D_{сх} = [3{,}5, 4{,}5)$, 5. $I = 0{,}010 \pm 10^{-3}$.

Занятие 16. Примерный вариант контрольной работы «Введение в дискретную математику»

Самостоятельно освоить тему «Введение в дискретную математику» с помощью учебно-методического пособия [3], решить часть расчетно-графической работы, посвящённой данной теме и подготовиться к контрольной работе «Введение в дискретную математику» с помощью данного примерного варианта.

Задача 1. Заданы множества: $B=\{x \mid x=3m-4,\ m=-1, 0, 1, 2, 3\}$ и $E=\{x \mid x=3t+5,\ t=-2, -1, 0, 1, 2\}$. Требуется найти объединение, пересечение, разность и прямое декартовое произведение этих множеств.

Задача 2. Для данной формулы α алгебры логики записать таблицу истинности. Формула α задана так: $\alpha=\left[\left(\mathrm{A}\vee\overline{\mathrm{C}}\right)\&\overline{\mathrm{B}}\right]\vee\left[\left(\overline{\mathrm{A}}\to\mathrm{B}\right)\sim\overline{\mathrm{C}}\right]$.

Задача 3. Дана таблица (табл. 1) для формулы α алгебры логики. Требуется восстановить равносильную α формулу, составить для восстановленной формулы таблицу истинности и сравнить её с исходной таблицей.

Задача 4. Даны графы (рис. 2). Требуется построить пересечение и объединение этих графов, а также построить $\overline{G_2}$.

Таблица 1

A	B	C	α
И	И	И	Л
И	И	Л	И
И	Л	И	Л
Л	И	И	Л
И	Л	Л	И
Л	И	Л	Л
Л	Л	И	Л
Л	Л	Л	И

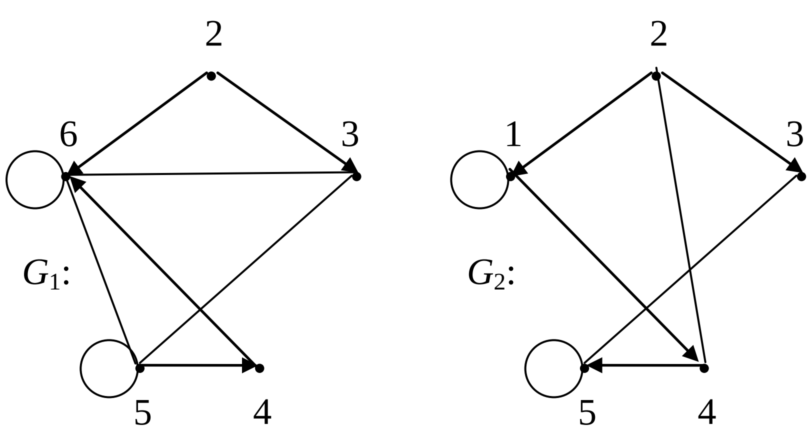

Рис. 2

Расчётно-графическая работа № 3

Задача 1 (по вариантам)

№ 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной: $y=2^x$, $y=e^{-x}$, $x=3$.

№ 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной: $y^2 = 2x^3$ и $x^2 = 2y$.

№ 3. Вычислить длину кривой: $r = 3\sin^2 \varphi$.

№ 4. Вычислить длину дуги кривой L, заданной параметрически:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 5\sin t + 4\cos t; \\ y = 4\sin t - 5\cos t; \end{array}\right| \text{ от } t_1 = 0 \text{ до } t_2 = \pi.$$

№ 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной: $x^2 = 9y$ *и* $y = 18/(x^2 + 9)$.

№ 6. Вычислить длину полукубической параболы $y = \sqrt{x^3}$ от точки $O\,(1,1)$ до точки $A\left(3,\, 3\sqrt{3}\right)$.

№ 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $r = 4\cos(2\varphi)$.

№ 8. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox астроиды: $x = 4\sin^3 t,\;\; y = 4\cos^3 t$.

№ 9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной трёхлепестковой розой:

$$r = 5\sin(3\varphi).$$

№ 10. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox одной полуволны синусоиды: $y = \sin x,\; 0 \le x \le \pi$.

№ 11. Вычислить площадь фигуры, ограниченной: $y = e^x,\;\; y = e^{-x}$ и $x = 1$.

№ 12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной: $y^2 = 3x$ и $x^2 = 3y$.

№ 13. Вычислить длину кривой, заданной в полярных координатах: $r = 3\sin\varphi$.

№ 14. Вычислить длину дуги кривой L, заданной параметрически:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 8\sin t + 6\cos t; \\ y = 6\sin t - 8\cos t; \end{array}\right| \text{ от } t_1 = 0 \text{ до } t_2 = \frac{\pi}{2}.$$

№ 15. Вычислить площадь фигуры, ограниченной: $x^2 = 4\,y$ и $y = 8/(x^2 + 4)$.

№ 16. Вычислить длину полукубической параболы $y=\sqrt{x^3}$ от точки O (0, 0**)** до точки $A\left(5,\ 5\sqrt{5}\right)$.

№ 17. Вычислить площадь фигуры, ограниченной: $x^2=4y$ и $y=5-x^2$.

№ 18. Вычислить площадь фигуры, ограниченной: $y=3^x$, $y=3^{-x}$ и $x=2$.

№ 19. Вычислить площадь фигуры, ограниченной: $y^2=4x^3$ и $x^2=4y^3$.

№ 20. Вычислить площадь фигуры, ограниченной: $r=3\cdot(\sin\varphi)^{3/2}$.

№ 21. Вычислить длину дуги кривой L, заданной параметрически:

$$\left.\begin{cases} x=8\sin^2 t; \\ y=8\cos^2 t; \end{cases}\right| \text{ от } t_1=0 \text{ до } t_2=\frac{\pi}{2}.$$

№ 22. Вычислить длину полукубической параболы $9y^2=4\cdot(3-x)^3$ от точки $B\left(0,\ \sqrt{12}\right)$ до точки $A(3,\ 0)$.

№ 23. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $r=4(\cos(2\varphi))^{3/2}$.

№ 24. Вычислить объём тела, образованного вращением кривой вокруг оси Ox: $x=4\sin^2 t$, $y=3\cos^2 t$.

№ 25. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией: $r=5(\sin(3\varphi))^{3/2}$.

№ 26. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox одной полуволны: $y=\sin^2 x$, $0\le x\le\frac{\pi}{2}$.

№ 27. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой: $r=(\cos(2\varphi))^{1/2}$.

№ 28. Вычислить объём тела, образованного вращением кривой вокруг оси Ox: $x=3(t-\sin t)$, $y=3(1-\cos t)$.

№ 29. Вычислить площадь фигуры, ограниченной: $r = \sin^2(3\varphi)$.

№ 30. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox одной полуволны: $y = \cos x,\ 0 \le x \le \pi$.

Задача 2. С помощью формулы Симпсона вычислить приближённое значение определённого интеграла $\int\limits_0^b f(x)\,dx$, разбив отрезок интегрирования на 10 частей (все вычисления производить с округлением до 10^{-3}), если $f(x) = \sqrt{g(x)}$, где функция $g(x)$ и число b заданы по вариантам:

№	***g* (*x*)**	***b***	**№**	***g* (*x*)**	***b***
1	$2 - \sin^2(3x)$	π/3	**16**	$1 + 2x^3$	1
2	$2 - x^3 + x$	1	**17**	$4 - x^3$	1
3	$3 + x^3 - x$	1	**18**	$2 - \cos x$	π
4	$1 - 0.1 \cdot \sin^3 x$	π/2	**19**	$x^3 + 1$	1
5	$2 + \sin^3 x$	π/2	**20**	$x^3 + 4$	1
6	$1 + 2x^3 - x^2$	1	**21**	$2 - \sin(2x)$	π/2
7	$4 - x^3 + x^2$	1	**22**	$2 - x^3 + x^2$	1
8	$2 - \cos^3 x$	π/2	**23**	$5 + x^3 - x^2$	1
9	$2x^3 + 1$	1	**24**	$0{,}5 - 0{,}1 \cdot \sin^2 x$	π/2
10	$2x^3 + 4$	½	**25**	$2 + \sin^2 x$	π/2
11	$2 - \sin x$	π	**26**	$1 + 2x^3 - x$	1
12	$2 - x^3$	1	**27**	$4 - x^3 + x$	1
13	$5 + x^3$	1	**28**	$2 - \cos^2 x$	π
14	$1 - 0.1 \cdot \sin^2 x$	π/2	**29**	$x^3 + 1$	0,5
15	$2 + \sin x$	π/2	**30**	$-x^3 + 4$	1

Задача 3. Вычислить с помощью тройного интеграла объём тела, ограниченного указанными поверхностями (данное тело и его проекцию на плоскость Oxy изобразить на чертежах):

№ 1. $z=0,\ z=4-y,\ y=x^2.$

№ 2. $z=0,\ x=0,\ y=0,\ x+y=2,\ z=x^2.$

№ 3. $z=0,\ z=x,\ x+y=3,\ x=\sqrt{\frac{y}{2}}.$

№ 4. $z=0,\ z=x^2,\ y=5x,\ x+y=9.$

№ 5. $z=0,\ x=0,\ y=0,\ z=1+y^2,\ x^2+y=1.$

№ 6. $z=0,\ z=4-x,\ y=2\sqrt{x},\ y=\frac{x^2}{16}.$

№ 7. $z=0,\ x=0,\ z=y^2,\ x+y=6.$

№ 8. $z=4-y,\ x^2+y^2=4y,\ z=0.$

№ 9. $z=0,\ z=4-x,\ x^2+y^2=4.$

№ 10. $z=0,\ z=(x-1)^3,\ x^3=y^2.$

№ 11. $z=0,\ z=\sqrt{1-y},\ y=x^2.$

№ 12. $z=0,\ x=0,\ y=0,\ x+y=1,\ z=x^2+3y^2.$

№ 13. $z=0,\ z=2x,\ x+y=3,\ x=\sqrt{\frac{y}{2}}.$

№ 14. $z=0,\ z=x^2,\ y=2x,\ x+y=9.$

№ 15. $z=0,\ x=0,\ y=0,\ z=1+y^2,\ x+y=1.$

№ 16. $z=0,\ z=2-x,\ y=2\sqrt{x},\ y=\frac{x^2}{4}.$

№ 17. $z=0,\ x=0,\ z=y^2,\ 2x+3y=6.$

№ 18. $z^2=4-y,\ x^2+y^2=4y.$

№ 19. $z=0,\ z=4-x^2,\ x^2+y^2=4.$

№ 20. $z=0,\ z=(x-1)^2,\ x=y^2.$

№ 21. $z=0,\ z=\sqrt{1-y},\ 2y=x^2.$

№ 22. $z=0,\ x=0,\ y=0,\ x-y=1,\ z=x^2+5y^2.$

№ 23. $z=0,\ z=2y,\ x+y=3,\ y=\sqrt{\dfrac{x}{2}}.$

№ 24. $z=0,\ z=y^2,\ y=\dfrac{x}{2},\ x+y=9.$

№ 25. $z=0,\ x=0,\ y=0,\ z=4+x^2,\ x+y=1.$

№ 26. $z=0,\ z=2-y,\ y=2\sqrt{x},\ y=\dfrac{x^2}{4}.$

№ 27. $z=0,\ y=0,\ z=x^2,\ 3x+2y=6.$

№ 28. $z^2=4-x,\ x^2+y^2=4x.$

№ 29. $z=0,\ z=4-y^2,\ x^2+y^2=4.$

№ 30. $z=0,\ z=(y-1)^2,\ x^2=y.$

Задача 4. Исследовать сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, если величина a_n задана по вариантам:

№	1	2	3	4	5
a_n	$\dfrac{3n^3+4}{\sqrt{n^3\cdot 3^n}}$	$\dfrac{1+n+n^2}{(n+1)\ln(n+1)}$	$\dfrac{25^n}{3^n\cdot(2n^4+1)}$	$\dfrac{n^3\cdot 4^n}{(2n)!}$	$\dfrac{n+2^n}{(3n)!}$

№	6	7	8	9	10
a_n	$\dfrac{4^n}{(2n+1)^2-1}$	$\dfrac{e^{-\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[3]{n^2}}$	$\dfrac{4^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$	$\dfrac{n^2+3n}{n^3+2}$	$\dfrac{3^n\cdot n^4}{n!}$

№	11	12	13	14	15
a_n	$\dfrac{3n+1}{\sqrt{n\cdot 3^n}}$	$\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$	$\dfrac{5^n}{3^n\cdot(2n+1)}$	$\dfrac{n^3}{(2n)!}$	$\dfrac{2^n}{3\cdot n!}$

№	16	17	18	19	20
a_n	$\dfrac{1}{(2n+1)^2-1}$	$\dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$	$\dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$	$\dfrac{n+3}{n^3+2}$	$\dfrac{n^4}{n!}$

№	21	22	23	24	25
a_n	$\dfrac{8n^2+1}{\sqrt{n^3\cdot 3^n}}$	$\dfrac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$	$\dfrac{5^{n+2}}{3^n\cdot(2n+1)}$	$\dfrac{n^9}{2n!}$	$\dfrac{2^{n+2}}{(3n)!}$

№	26	27	28	29	30
a_n	$\dfrac{4^n}{(2n+1)^2-1}$	$\dfrac{e^{\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}}$	$\dfrac{n}{(n^2+1)\ln^4(n^2+1)}$	$\dfrac{n^4+3n}{n^3+21}$	$\dfrac{n^4}{(4n)!}$

Задача 5. Найти интервал сходимости (на границе указать, где ряд сходится абсолютно, а где условно) степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \cdot x^n$, если величина b_n задана по вариантам:

№	1	2	3	4	5
b_n	$\dfrac{n^3}{3n!}$	$\dfrac{(n+4)^8}{(2n)!}$	$\dfrac{1+2^n+n}{\sqrt{(2n+1)\cdot 5^n}}$	$\dfrac{n+3^n}{\sqrt[4]{n^3}}$	$\dfrac{(2n)!}{n^2}$

№	6	7	8	9	10
b_n	$\dfrac{\sqrt[5]{n}}{(5n)!}$	$\dfrac{n^3+4}{2^n\cdot(n^2+1)}$	$\dfrac{n^2+1}{n\cdot(n+1)}$	$\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$	$\dfrac{5^n+n}{n^5}$

№	11	12	13	14	15
b_n	$\dfrac{n^{10}}{n!}$	$\dfrac{(n+1)^3}{(2n)!}$	$\dfrac{2^n}{\sqrt{(2n-1)\cdot 3^n}}$	$\dfrac{3^n}{\sqrt[4]{n}}$	$\dfrac{n!}{n^{20}}$

№	16	17	18	19	20
b_n	$\dfrac{\sqrt{n}}{n!}$	$\dfrac{n+1}{2^n\cdot\left(n^2+1\right)}$	$\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$	$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$	$\dfrac{3^n\cdot n!}{n^5}$

№	21	22	23	24	25
b_n	$\dfrac{n^4}{(3n)!}$	$\dfrac{(n-1)^3}{2n!}$	$\dfrac{12^n}{\sqrt{(3n-1)\cdot 3^n}}$	$\dfrac{13^n}{\sqrt[4]{n^5}}$	$\dfrac{n+n!}{n^2}$

№	26	27	28	29	30
b_n	$\dfrac{\sqrt[3]{n}}{3^n\cdot n!}$	$\dfrac{2n^3+1}{2^n\cdot\left(n^2+1\right)}$	$\dfrac{3n+1}{n\cdot(n+1)}$	$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$	$\dfrac{8^{n^2}\cdot n!}{n^5}$

Задача 6. Вычислить определённый интеграл $\int_0^b f(x)dx$ с точностью до 0,0001. Для этого подынтегральную функцию $f(x)$ следует разложить в степенной ряд, который затем почленно проинтегрировать:

№	1	2	3	4	5
b	0,4	1	0,3	0,5	1
f **(*x*)**	$x^3 arctgx$	$e^{-x^2/5}$	$\dfrac{1}{x^2}\ln\left(1+x^2\right)$	$x\ln\left(1+x^4\right)$	$\cos\sqrt[3]{x}$

№	6	7	8	9	10
b	0,3	0,6	1	0,7	0,4
f **(*x*)**	$x^2\cdot e^{-x^3}$	$arctg\left(x^3\right)$	$\sin\left(x^3\right)$	$\dfrac{1}{x}\sin\left(x^2\right)$	$\sqrt[4]{1+x^3}$

№	11	12	13	14	15
b	0,5	1	0,5	0,5	1
f **(*x*)**	$x\, arctgx$	$e^{-x^2/3}$	$\dfrac{1}{x}\ln\left(1+x^2\right)$	$x\ln\left(1+x^2\right)$	$\cos\sqrt{x}$

№	16	17	18	19	20
b	0,5	0,5	1	0,5	0,5
f (x)	$x\cdot e^{-x^3}$	$arctg\left(x^2\right)$	$\sin\left(x^2\right)$	$\frac{1}{x^2}\sin\left(x^2\right)$	$\sqrt{1+x^3}$

№	21	22	23	24	25
b	0,5	1	0,5	0,5	1
f (x)	$x^2 arctgx$	$e^{\frac{-x^3}{3}}$	$\frac{1}{x^3}\ln\left(1+x^3\right)$	$x^4\ln\left(1+x^3\right)$	$\cos\sqrt[5]{x}$

№	26	27	28	29	30
b	0,5	0,5	1	0,5	0,5
f (x)	$x^3\cdot e^{-x^3}$	$arctg\left(x^4\right)$	$\sin^2\left(x^2\right)$	$\frac{1}{x^2}\sin\left(x^3\right)$	$\sqrt[3]{1+x^3}$

Задача 7. Заданы множества: $A=\{\,x\,|\,x=2k+5,\ k=-3,-2,-1,\,0,\,1\,\}$, $B=\{\,x\,|\,x=3m-4,\ m=-1,\,0,1,\ 2,\ 3\,\}$, $C=\{\,x\,|\,x=4p+1,\ p=-1,\,0,\,1,\,2,\,3\,\}$, $D=\{\,x\,|\,x=2n-7,\ n=1,\,2,\ 3,\,4,\,5\,\}$, $E=\{\,x\,|\,x=3t+5,\ t=-2,\,-1,\,0,1,\,2\,\}$.

Требуется найти объединение, пересечение, разность и прямое декартово произведение следующих множеств (по вариантам):

1. А и В. 2. А и С. 3. А и D. 4. А и Е. 5. В и С.

6. В и D. 7. В и Е. 8. С и D. 9. С и Е. 0. D и Е.

Задача 8. Для данной формулы α алгебры логики записать таблицу истинности. Формула α задана по вариантам:

1. $\alpha=\left[\left(A\sim\overline{C}\right)\vee\overline{B}\right]\vee\left[\left(\overline{A}\to B\right)\&C\right]$. 2. $\alpha=\left[\left(\overline{A}\sim\overline{C}\right)\&\overline{B}\right]\vee\left[\left(\overline{A}\to B\right)\vee C\right]$.

3. $\alpha=\left[\left(B\sim\overline{C}\right)\vee\overline{B}\right]\&\left[\left(\overline{A}\to\overline{B}\right)\&C\right]$. 4. $\alpha=\left[\left(\overline{A}\vee\overline{C}\right)\&\overline{B}\right]\vee\left[\left(\overline{A}\to B\right)\sim C\right]$.

5. $\alpha=\left[\left(A\&\overline{C}\right)\vee\overline{B}\right]\vee\left[\left(\overline{A}\to B\right)\sim C\right]$. 6. $\alpha=\left[\left(\overline{A}\&\overline{C}\right)\sim B\right]\vee\left[\left(\overline{A}\to\overline{B}\right)\vee\overline{C}\right]$.

7. $\alpha=\left[\left(B\sim\overline{C}\right)\vee\overline{B}\right]\&\left[\left(\overline{A}\to\overline{B}\right)\&C\right]$. 8. $\alpha=\left[\left(A\vee\overline{C}\right)\&\overline{B}\right]\vee\left[\left(\overline{A}\to B\right)\sim\overline{C}\right]$.

9. $\alpha=\left[\left(A\&C\right)\vee\overline{B}\right]\vee\left[\left(\overline{A}\sim\overline{B}\right)\to C\right]$. 0. $\alpha=\left[\left(\overline{A}\&\overline{C}\right)\sim B\right]\to\left[\left(\overline{A}\vee\overline{B}\right)\vee\overline{C}\right]$.

Задача 9. Дана табл. 2 (по вариантам) для формулы α алгебры логики. Требуется восстановить равносильную α формулу, составить для восстановленной формулы таблицу истинности и сравнить ее с исходной табл. 2 (по своему варианту).

Таблица 2

Вариант			1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
A	B	C	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α
И	И	И	И	Л	Л	Л	И	Л	Л	И	Л	Л
И	И	Л	Л	Л	И	И	Л	И	Л	И	Л	И
И	Л	И	И	Л	Л	Л	Л	И	Л	И	И	Л
Л	И	И	Л	И	Л	Л	И	Л	Л	Л	И	И
И	Л	Л	Л	Л	И	И	Л	Л	Л	Л	И	Л
Л	И	Л	Л	И	И	Л	И	Л	И	Л	Л	И
Л	Л	И	Л	Л	Л	Л	Л	Л	И	Л	Л	Л
Л	Л	Л	И	И	Л	И	Л	И	И	Л	Л	Л

Задача 10. Даны графы (рис. 3 и 4). Требуется построить пересечение и объединение следующих графов (по вариантам от 0 до 9):

1. $\overline{G}_2 \cap G_5$. 2. $G_3 \cap G_4$. 3. $G_3 \cap G_5$. 4. $G_4 \cap G_5$. 5. $\overline{G}_3 \cap G_4$.

6. $G_3 \cap \overline{G}_4$. 7. $\overline{G}_3 \cap G_5$. 8. $\overline{G}_5 \cap G_3$. 9. $\overline{G}_4 \cap G_5$. 0. $\overline{G}_5 \cap G_4$.

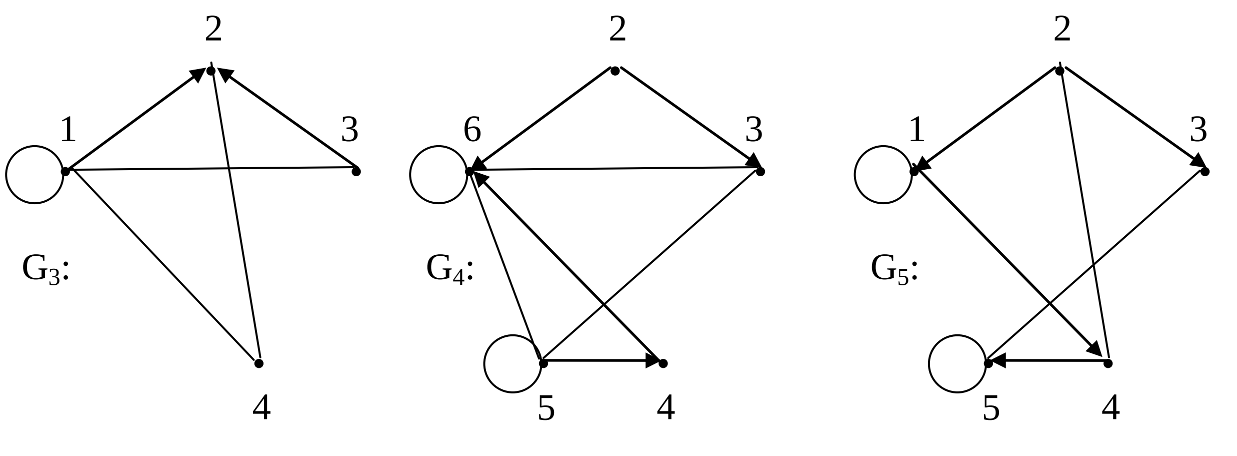

Рис. 3

Задача 11. Даны графы (рис. 3 и 4). Требуется построить дополнение к следующим графам и записать матрицу смежности для исходного графа и его дополнения (по вариантам от 0 до 9):

1. $\overline{G}_5 = ?$ 2. $\overline{G}_4 = ?$ 3. $\overline{G}_3 = ?$ 4. $\overline{G}_2 = ?$

5. $\overline{G}_6 = ?$, если $G_6 = \overline{G}_4 \cup G_3$.

6. $\overline{G}_7 = ?$, если $G_7 = \overline{G}_3 \cup G_5$.

7. $\overline{G}_8 = ?$, если $G_8 = \overline{G}_5 \cup G_3$.

8. $\overline{G}_{11} = ?$, если $G_{11} = \overline{G}_2 \cup G_5$.

9. $\overline{G}_9 = ?$, если $G_9 = \overline{G}_4 \cup G_5$.

0. $\overline{G}_{10} = ?$, если $G_{10} = \overline{G}_5 \cup G_4$.

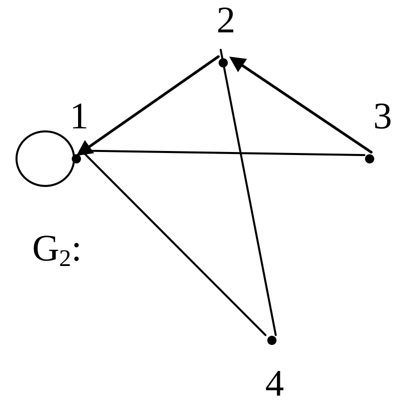

Рис. 4

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мартынов, Г.П. Интеграл в примерах и задачах [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / Г.П. Мартынов, Н.В. Комиссарова. – Москва, «ИНФОРМИО», 2018 – 44 с. // Свидетельство о публикации в СМИ «ИНФОРМИО» от 09.01.2018, серия А № 000007/2018 / www.informio.ru.
2. Мартынов, Г.П. Ряды в примерах и задачах, учебно-методическое пособие [Электронный ресурс] / Г.П. Мартынов. –Москва, «ИНФОРМИО», 2020 – 35 с. // Свидетельство о публикации в СМИ «ИНФОРМИО» от 23.03.2020, серия А № 000294/2020 / www.informio.ru.
3. Мартынов, Г.П. Введение в дискретную математику в примерах и задачах, учебно-методическое пособие [Электронный ресурс] / Г.П. Мартынов. – Москва, «ИНФОРМИО», 2020 – 21 с. // Свидетельство о публикации в СМИ «ИНФОРМИО» от 24.03.2020, серия А № 000303/2020 / www.informio.ru.
4. Вербная, В.П. Математика для дистанционного изучения [Электронный ресурс]: учебное пособие для вузов (Рекомендовано СибРУМЦ) / В.П. Вербная, Г.П. Мартынов, Е.С. Плюснина. – М.: ИНФОРМРЕГИСТР, 2013. – 230 с. Режим доступа: http//www.lib/ssga.ru/
5. Мартынов, Г.П. Учебно-методический комплекс дисциплины «Математика» для экологов и картографов [Электронный ресурс]: учебно-методический комплекс / Г.П. Мартынов. – М.: ИНФОРМРЕГИСТР, 2014. – 1,61 МБ. Режим доступа: http//www.lib/ssga.ru/

6. Мартынов, Г.П. Рабочая программа дисциплины Б1.Б.05 Математика [Электронный ресурс]: методический документ / Г.П. Мартынов. –Москва, «ИНФОРМИО», 2017 – 34 с. // Свидетельство о публикации в СМИ «ИНФОРМИО» от 09.10.2017, серия А № 001525/2017 / www.informio.ru.
7. Мартынов, Г.П. «Фонд оценочных средств дисциплины «Математика» [Электронный ресурс]: методическая разработка / Г.П. Мартынов. – Москва, «ИНФОРМИО», 2016 – 14 с. // Свидетельство о публикации в СМИ «ИНФОРМИО» от 15.11.2016, серия А № 002150/2016 / www.informio.ru.
8. Мартынов, Г.П. Организация самостоятельной работы студентов направления подготовки «Картография и геоинформатика» при изучении дисциплины «Математика» [Электронный ресурс]: методическая разработка / Г.П. Мартынов. – Москва, «ИНФОРМИО», 2016 – 7 с. // Свидетельство о публикации в СМИ «ИНФОРМИО» от 26.07.2016, серия А № 001637/2016 / www.informio.ru.