

К.А. РЕЙТЕР

# ТЕРМОДИНАМИКА, ТЕПЛОПЕРЕДАЧА И ГИДРАВЛИКА

Часть 2  
ГИДРАВЛИКА

УЧЕБНИК

*Рекомендовано  
экспертным советом при Федеральном учебно-методическом объединении  
среднего профессионального образования по укрупненной группе профессий,  
специальностей 2.20.00.00 «Техносферная безопасность и природообустройство»  
в качестве учебника для профессиональных образовательных организаций*

Москва  
КУРС  
2019

**УДК 536.2**  
**ББК 31.3я73**  
**Р35**

ФЗ № 436-ФЗ	Издание не подлежит маркировке в соответствии с п. 1 ч. 4 ст. 11
----------------	---

**Рецензенты:**

*Аганов Сергей Алексеевич* — начальник 51 СПСЧ управления по CAO ГУ МЧС РФ по г. Москве;

*Гаврилин Сергей Николаевич* — начальник 29 ПСО ФПС ГУ МЧС по г. Москве.

**Рейтер К.А.**

**Р35** Термодинамика, теплопередача и гидравлика. Ч. 2. Гидравлика : учебник / К.А. Рейтер. М.: КУРС, 2019. 000 с. (Среднее профессиональное образование).

ISBN 978-5-907228-42-9

Учебник адресован учащимся пожарно-спасательных колледжей и образовательных организаций высшего образования МЧС России. Содержание учебника, а также вопросы для самопроверки позволяют использовать его для самостоятельной работы обучаемых.

В издании подробно изложены основные законы термодинамики и методы термодинамического расчета различных процессов и систем, теплопередачи и гидравлики, необходимые для подготовки учащихся, специализирующихся в области пожарной безопасности и защиты в чрезвычайных ситуациях, тематически подобранные задачи с решениями и комментариями, а также справочный материал, необходимый в практической деятельности.

Содержание учебного пособия соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

УДК 536.2  
ББК 31.3я73



ISBN 978-5-907228-42-9

© Рейтер К.А., 2019  
© КУРС, 2019

# РАЗДЕЛ 1

## ГИДРАВЛИКА

### Тема 1.1 ОСНОВЫ ГИДРОСТАТИКИ

#### 1.1.1. Общие сведения и краткая история развития

**Гидравликой** называется прикладная наука, в которой изучаются законы движения и равновесия жидкости и даются способы приложения этих законов к решению конкретных технических задач.

Гидравлика — одна из самых древних наук в мире. Результаты археологических исследований показывают, что еще за 5000 лет до н.э. в Китае и других странах Древнего мира уже существовали оросительные каналы и были известны простейшие устройства для подъема воды. В Риме сохранились остатки древнего водопровода, построенного за шесть веков до начала нашей эры.

Гидравлика (греч. «хюдор» — вода и «аулос» — труба, канал, струя) — прикладная наука, изучающая законы равновесия и движения жидкости и разрабатывающая на основе теории и эксперимента способы применения этих законов к решению различных задач инженерной практики. Первым научным трудом в области гидравлики считается написанный примерно за 250 лет до н.э. трактат Архимеда «О плавающих телах», в котором величайший ученый древности сформулировал закон о давлении жидкости на погруженное в нее тело. Особое развитие гидравлика получила в средние века. В XV в. Леонардо да Винчи написал труд «О движении и измерении воды в тесных сооружениях», опубликованный через 307 лет после его смерти, в 1826 г. В 1586 г. голландский ученый Симон Стевин опубликовал работу «Начало гидростатики». В XVI — XVII вв. Г. Галилей, Э. Торричелли, Б. Паскаль и И. Ньютон проводили исследования, позволившие разработать основы гидромеханики. В 1755—1756 г. выходят в свет работы Л.П. Эйлера, где впервые приводится полная система дифференциальных уравнений равновесия и движения идеальной жидкости. Основоположниками гидравлики как самостоя-

тельной науки являются члены Петербургской академии наук М.В. Ломоносов, Д.И. Бернулли, Л.П. Эйлер. В 1738 г. была опубликована работа Д. Бернулли «Гидравлика или записки о силах движения жидкости», в которой установлена зависимость между давлением и скоростью в элементарной струйке идеальной жидкости. Представляют интерес такие работы Шизе, Вентури, Вейсбаха, Дарси, Базена и Рейнольдса. Труды этих ученых посвящены главным образом изучению турбулентности потоков и установлению общих законов сопротивления движению вязких жидкостей, а также исследованию движения жидкости в трубах, каналах и на водосливах. Большое внимание уделено в них также разработке теории размерности и подобия и постановке лабораторных экспериментов.

В 1791 г. вышло в свет первое русское руководство по гидравлике А. Колмакова «Карманная книжка для вычисления количества воды, вытекающей через трубы, отверстие или по желобам, также и силы, какой они ударяют, стремясь с данной скоростью».

Большой вклад в развитие гидравлики принесли советские ученые А.Н. Колмогоров (теория турбулентности), Н.Н. Павловский (теория фильтрации, равномерное и неравномерное движение жидкости), И.Н. Куколевский (теория машиностроительной гидравлики), С.А. Христианович (неустановившиеся движения жидкости) и многие другие.

### 1.1.2. Основные физические свойства жидкостей и газов

Все вещества в природе имеют молекулярное строение. По характеру межмолекулярных связей жидкости занимают промежуточное положение между твердыми телами и газами. Свойства жидкостей при высоких температурах и низких давлениях ближе к свойствам газов, а при низких температурах и высоких давлениях — к свойствам твердых тел.

**Гипотеза сплошности.** Жидкость в целом рассматривают как сплошную среду, непрерывно заполняющую пространство, т.е. принимают, что в жидкости нет пустот или разрывов, что все характеристики жидкости являются непрерывными функциями, имеющими непрерывные частные производные по всем своим аргументам.

Рассмотрим следующие свойства и понятия:

- плотность;
- удельный вес;
- удельный объем;

- сжимаемость (модуль упругости, скорость звука);
- температурное расширение;
- вязкость (закон Ньютона, вискозиметр, текучесть);
- сопротивление растяжению;
- поверхностное натяжение (капиллярность);
- растворимость газов в жидкостях (закон Генри, кавитация);
- понятие об идеальной жидкости.

#### Замечание о системах единиц

Исторически сложилось так, что одновременно используются три системы единиц.

1. Международная система единиц измерения СИ (система интернациональная) рекомендована к применению, однако учебники, инструкции и приборы не всегда ей соответствуют. СИ (метр, килограмм массы, секунда).

2. Физическая — СГС (сантиметр, грамм, секунда).

3. Техническая — МКГСС (метр, килограмм силы, секунда).

1. **Плотность** — масса единицы объема.

Плотность характеризует распределение массы жидкости  $m$  по объему  $V$ .

В произвольной точке  $A$  жидкости плотность  $\rho_A = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$ ,

где  $\Delta m$  — масса, заключенная в объеме  $\Delta V$ , стягиваемом в точку  $A$ .

Плотность однородной жидкости равна отношению массы  $m$  жидкости к ее объему  $V$ :  $\rho = \frac{m}{V}$ . Единица измерения  $[\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ .

Все жидкости, кроме воды, характеризуются уменьшением плотности при увеличении температуры. Плотность воды максимальна при 4 °С ( $\rho_{\text{воды}} = 1000 \text{ кг/м}^3$ ) и уменьшается как с уменьшением, так и с увеличением температуры. В этом проявляется одно из аномальных свойств воды. В гидравлических расчетах можно принимать плотность воды неизменной и равной  $1000 \text{ кг/м}^3$ .

2. **Удельный вес:** вес единицы объема.

$$\gamma = \frac{G}{V} = \frac{mg}{V} = \rho g.$$

**Запомнить:**  $\gamma = \rho g$ .

Единица измерения в системе СИ  $[\gamma] = \text{н/м}^3$ .  $\gamma_{\text{воды}} = 9810 \text{ н/м}^3$ .

В гидравлических расчетах можно принимать  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ .

Точная константа для перевода единиц измерения — 9,80665.

3. **Удельный объем** — объем единицы массы:  $v = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho}$ .

По определению величина, обратная плотности; единица измерения  $[v] = \text{м}^3/\text{кг}$ .

4. **Сжимаемость** — способность жидкости изменять объем при изменении давления (рис. 1.1).

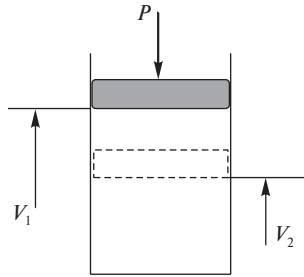


Рис. 1.1. Сжимаемость жидкости

Характеризуется коэффициентом объемного сжатия  $\beta_p$ ,  $\text{Па}^{-1}$ , представляющим относительное изменение объема жидкости  $V$  при изменении давления  $p$  на единицу (при постоянной температуре).

$$\beta_p = -\frac{dV}{V dp}.$$

Знак «минус» в формуле указывает, что при увеличении давления объем жидкости уменьшается.

Величина, обратная коэффициенту объемного сжатия, — модуль (объемной) упругости жидкости (не следует называть «жесткость», как в физике):

$$E = \frac{1}{\beta_p}. E_{\text{воды}} = 2,1 \cdot 10^3 \text{ МПа}; E_{\text{стали}} = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

Сжимаемость воды весьма незначительна. При увеличении давления на 100 кПа (примерно  $1 \text{ кг}/\text{см}^2$ ) объем воды уменьшится на  $1/20\,000$ . В гидравлических расчетах можно считать воду несжимаемой средой. Однако это справедливо лишь при небольших давлениях. Так, если бы вода в Мировом океане была абсолютно несжимаема, то уровень воды поднялся бы на 30 м. Учитывать сжимаемость надо в гидравлических следящих приводах и в теории гидроудара.

В безграничной однородной жидкости или в объеме, ограниченном абсолютно жесткими стенками, скорость распространения звука

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Для воды при  $10^\circ\text{C}$   $c = 1425 \text{ м}/\text{с}$ .

5. **Температурное расширение** — свойство жидкостей изменять объем при изменении температуры.

Характеризуется коэффициентом температурного расширения  $\beta_t$ ,  $^\circ\text{C}^{-1}$ , представляющим относительное изменение объема жидкости при изменении температуры на  $1^\circ\text{C}$  (при постоянном давлении):

$$\beta_t = \frac{dV}{V dt} \text{ (знак «плюс», так как при увеличении температуры объем увеличивается)}.$$

Величина  $\beta_t$  для воды меняется в зависимости от температуры. Из сказанного ранее следует, что для воды при  $0^\circ\text{C}$   $\beta_t = 0$ . Удельный объем воды при различных температурах и давлениях может быть подсчитан по специальным формулам и приводится в таблицах (см.: Ривкин, Александров)

6. **Вязкость** — свойство жидкости оказывать сопротивление относительному сдвигу ее слоев.

Вязкость проявляется в том, что при относительном перемещении слоев жидкости на поверхности их соприкосновения возникают силы сопротивления сдвигу, называемые **силами внутреннего трения** или **силами вязкости**.

Рассмотрим движение жидкости вдоль стенки (рис. 1.2). Слой жидкости, непосредственно прилегающий к стенке, прилипает к ней. Существует разность скоростей между соседними слоями,

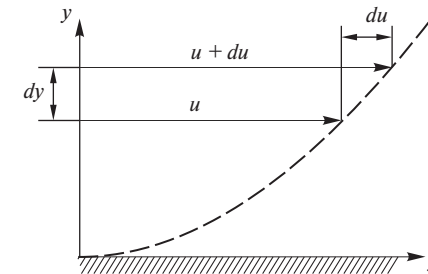


Рис. 1.2. Движение жидкости вдоль стенки

и возникает взаимное скольжение слоев, которое приводит к возникновению силы внутреннего трения.

Сила трения  $T = \pm \mu \frac{du}{dy} F$ . Касательное напряжение сдвига есть сила, отнесенная к площади действия. По закону Ньютона для вязкого трения касательное напряжение

$$\tau = \pm \mu \frac{du}{dy}, \text{ (закон внутреннего трения),}$$

где  $\frac{du}{dy}$  — градиент скорости в направлении, перпендикулярном движущимся слоям жидкости.

Напомним: напряжение — это сила, приходящаяся на единицу площади; следовательно, силу вязкого трения  $T$  между слоями жидкости площадью  $F$  можно найти:  $T = \tau F = F \mu \frac{du}{dy}$ .

Коэффициент пропорциональности  $\mu$  есть динамический коэффициент вязкости жидкости (иногда называют абсолютной вязкостью в отличие от кинематического коэффициента вязкости, который отнесен к плотности. Знак в формуле выбирают в зависимости от направления оси и знака градиента скорости так, чтобы касательное напряжение было положительным (ибо отрицательным оно быть не может — всегда тормозит слой с большей скоростью).

Единица измерения динамического коэффициента вязкости в системе СИ  $[\mu] = \text{Па} \cdot \text{с}$ .

Единица «пуаз» (в память французского ученого Пуазейля, обозначается П) в 10 раз меньше, т.е.  $1 \text{ Па} \cdot \text{с} = 10 \text{ П}$ .

$$\text{Для справки: } \text{Па} \cdot \text{с} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot \text{с} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}^2} \cdot \text{с} = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}; \text{ П} = \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}}.$$

В гидравлических расчетах кроме динамической вязкости широко используют кинематический коэффициент вязкости (обозначается буквой  $\nu$  — греч. «ню»), равную отношению динамической вязкости  $\mu$  к плотности жидкости  $\rho$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

Единица измерения кинематической вязкости в системе СИ  $[\nu] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ .

Единица «стокс» (в память английского ученого Стокса, обозначается Ст) равна  $\text{см}^2/\text{с}$ ; следовательно,  $1 \text{ м}^2/\text{с} = 10^4 \text{ Ст}$ . В справочниках используется «сантистокс»,  $100 \text{ сСт} = 1 \text{ Ст}$ .

С повышением температуры кинематическая вязкость газов увеличивается, а вязкость капельных жидкостей уменьшается (рис. 1.3).

Для воды и воздуха $\nu$ , Ст	Температура, °С	Вода	Воздух
	0 °С	0,0179	0,133
20 °С	0,0101	0,151	

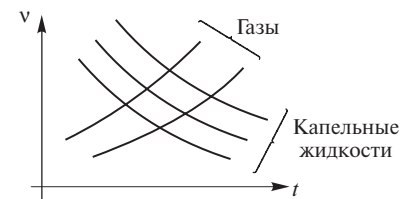


Рис. 1.3. Зависимость вязкости от температуры

Поэтому с целью уменьшения потерь при транспортировке вязкие жидкости, например мазут, нагревают, а воздуховоды и газопроводы охлаждают.

Для воды вязкость (до 60 °С)  $\mu = \frac{0,0178\rho}{1 + 0,0337t + 0,000221t^2}$  (Киселев, с. 13).

Измерение вязкости производят с помощью приборов различных типов и конструкций, называемых *вискозиметрами*.

**Вискозиметр Энглера** представляет термостат с сосудом объемом  $200 \text{ см}^3$  с отверстием в дне диаметром 3 мм. Вязкость измеряется в градусах Энглера (обозначается  $^\circ E$ ). Градусом Энглера называется отношение времени истечения  $200 \text{ см}^3$  исследуемой жидкости к времени истечения такого же объема дистиллированной воды (примерно 50 с) при температуре 20 °С. Для перехода от вязкости жидкости, выраженной в градусах Энглера, к кинематическому коэффициенту вязкости можно пользоваться эмпирической формулой Фогеля

$$\nu = \left( 0,0731^\circ E - \frac{0,0631}{^\circ E} \right), \text{ см}^2/\text{с}. \quad (-)$$

Со свойством вязкости связано свойство текучести.

*Текучесть* — способность существенно изменять форму под действием слабых внешних воздействий, в частности под действием силы тяжести.

Текучесть свойственна жидкостям и газам, в которых частицы легкоподвижны и нет касательных напряжений между слоями в состоянии покоя. Численно текучесть — величина, обратная вязкости.

**7. Сопротивление растяжению.** Жидкости не сопротивляются растягивающим напряжениям. При снижении давления до давления насыщенных паров при данной температуре в жидкости образуются пустоты, заполненные паром. Нарушается целостность жидкости. Если давление повысить, то пустоты исчезнут, пар снова перейдет в жидкость.

**8. Поверхностное натяжение.** Жидкость под действием внутренних сил стремится уменьшить свою поверхность, если ей в этом не препятствуют какие-либо силы. Коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$  (греч. «сигма») численно равен работе, которую нужно затратить для увеличения поверхности жидкости на единицу площади. Другое определение: коэффициент поверхностного натяжения численно равен силе поверхностного натяжения, действующей на единицу длины контура, ограничивающего поверхность.

Для воды  $\sigma = 0,074$  н/м.

Из-за поверхностного натяжения давление в капле воды радиуса  $r$  больше давления в окружающей среде на величину  $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$ . На ту же величину больше давление в пузырьке воздуха в толще жидкости.

**Капиллярность** — способность жидкости подниматься или опускаться под действием сил поверхностного натяжения в трубках малого диаметра.

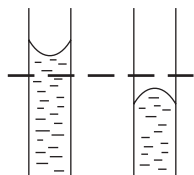


Рис. 1.4. Капиллярность

Жидкость может смачивать поверхность твердого тела (вода — стекло) или не смачивать (ртуть — стекло) (рис. 1.4).

Внутренний диаметр трубок пьезометров не должен быть меньше 5 мм, чтобы не было искажения показаний.

**9. Адгезия** — способность молекул жидкости прилипать к поверхности твердого тела.

**10. Растворимость газов в жидкостях** подчиняется закону Генри

$$\frac{V_{\text{г}}}{V_{\text{ж}}} = k \frac{p}{p_0},$$

причем  $k = f(t^\circ)$ .

Растворенный в воде при нормальных условиях воздух составляет 2% по объему.

Коэффициент растворимости воды  $k = 0,016$  при нормальных условиях (101 кПа, 15 °С), для масла  $k = 0,08$ .

**Кавитация** — процесс образования паровоздушных пузырьков в области пониженного давления и их захлопывания в области повышенного давления.

### Газ как сжимаемая жидкость

В газах расстояния между молекулами больше, а межмолекулярные силы меньше, чем в жидкостях и твердых телах, поэтому газы, в отличие от жидкостей и твердых тел, обладают большей сжимаемостью.

Плотность газов существенно зависит от температуры и давления и может быть определена с использованием закона Менделеева — Клапейрона:

$$pv = RT,$$

где  $p$  — абсолютное давление;  $v$  — удельный объем газа;  $R = 287,1$  Дж/кг °К — универсальная газовая постоянная;  $T$  — абсолютная температура °К ( $^\circ\text{C} + 273,15$ ). Учитывая, что  $\rho = 1/v$ , имеем

$$\rho = \frac{p}{RT}.$$

### Жидкость и основные понятия гидравлики

**Жидкость** — тело, обладающее свойством текучести, т.е. способное сколь угодно сильно изменять свою форму под действием сколь угодно малых сил. В отличие от газа весьма мало изменяет свою плотность при изменении давления.

**Жидкая частица** — выбранный для рассмотрения бесконечно малый объем жидкости, сохраняющий все ее свойства.

Жидкая частица — часть жидкости, малая по сравнению с объемом рассматриваемой жидкости, и в то же время объем частицы велик по сравнению с объемом молекулы жидкости.

Обычно в жидкости выделяют для рассмотрения прямоугольный параллелепипед («кубик») с ребрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , ориентированными по координатным осям (рис. 1.5).

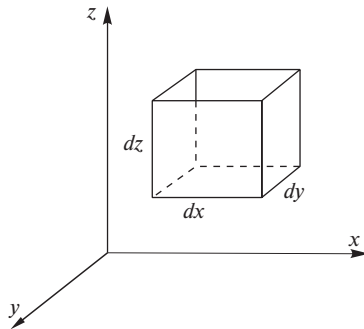


Рис. 1.5. Элементарная частица жидкости

Тогда объем жидкой частицы (элементарный объем)  $dV = dx dy dz$ , масса частицы  $dm = \rho dV = \rho dx dy dz$ .

Эти очевидные соотношения в дальнейшем будут неоднократно использоваться без пояснений.

**Идеальная жидкость** — это воображаемая жидкость абсолютно несжимаемая и невязкая (т.е. при движении не возникает касательных напряжений).

**Реальная жидкость** (вязкая жидкость) — жидкость действительная, обладающая всеми характерными для нее физическими свойствами (обычно противопоставляется термину «идеальная жидкость»).

**Капельная жидкость** — образует капли, так как на поверхности раздела жидкости и газа действуют силы поверхностного натяжения.

В гидравлике рассматриваются только капельные жидкости, т.е. обладающие свойством текучести, но в отличие от газа крайне мало изменяющие свою плотность при изменении давления.

### 1.1.3. Силы, действующие на жидкость

К покоящейся жидкости не могут быть приложены сосредоточенные силы, а только распределенные по объему (массовые) или по поверхности (поверхностные).

Плотность распределения **массовой силы** есть сила, отнесенная к массе.

**Сила тяжести** обусловлена земным притяжением

На элементарную массу  $dm$  действует сила  $dG$  (рис. 1.6).

Плотность распределения силы  $\frac{dG}{dm} = g$  (ускорение свободного падения).

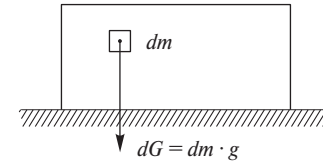


Рис. 1.6. Действие силы на элементарную массу

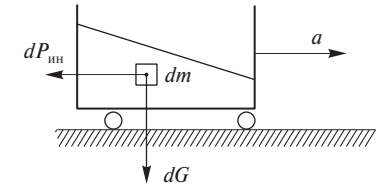


Рис. 1.7. Действие элементарной массы с ускорением

**Сила инерции** обусловлена движением с ускорением  $a \neq 0$ .  $dP_{ин} = dm \cdot a$  (рис. 1.7).

Плотность распределения силы инерции  $\frac{dP_{ин}}{dm} = a$  (ускорение).

Направление скорости безразлично.

**Центробежная сила** обусловлена движением с ускорением при вращении (фактически сила инерции):

$$dP_{цб} = dm \omega^2 r = dm \frac{u^2}{r},$$

где  $\omega$  — угловая скорость вращения;  $r$  — радиус, на котором находится масса  $dm$ ;  $u$  — линейная скорость (рис. 1.8).

Плотность распределения центробежной силы  $\frac{dP_{цб}}{dm} = \omega^2 r$  (ускорение).

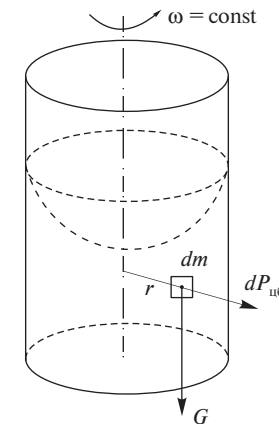


Рис. 1.8. Движение элементарной частицы с ускорением при вращении



### Поверхностные силы

Силы, действующие на каждый элемент поверхностей, ограничивающих жидкость, и на каждый элемент поверхностей, проведенных произвольно внутри жидкости, называют **поверхностными**.

Сила  $dR$ , действующая на площадку площадью  $\Delta F$ , представляется как сумма силы нормального напряжения  $\Delta P$  и силы касательного напряжения  $\Delta T$  (рис. 1.9).

Плотность распределения поверхностной силы есть сила, отнесенная к площади действия.

Плотность распределения нормальных сил  $p = \frac{\Delta P}{\Delta F}$  называют **нормальным напряжением** (давлением). Плотность распределения касательных сил  $\tau = \frac{\Delta T}{\Delta F}$  называют **касательным напряжением**.

Массовые и поверхностные силы могут быть внешними и внутренними.

**Внешние силы** действуют на рассматриваемую массу и поверхность жидкости извне и приложены соответственно к каждой частице жидкости, составляющей массу, и к каждому элементу поверхности, ограничивающей жидкость. **Внутренние силы** представляют собой взаимодействие частиц жидкости. Они являются парными, их сумма в данном объеме жидкости всегда равна нулю.

**Гидростатика** — раздел гидравлики, изучающий законы равновесия жидкостей в состоянии покоя.

**Абсолютный покой** — все частицы жидкости неподвижны относительно Земли (в общем случае — относительно неинерциальной системы отсчета)

**Относительный покой** — частицы жидкости неподвижны по отношению к резервуару, который движется с ускорением относительно Земли.

**Нормальное напряжение** — плотность распределения нормальных сил:  $p = \frac{\Delta P}{\Delta F}$ .

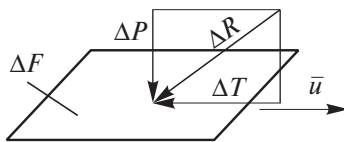


Рис. 1.9. Схема действия сил на площадку

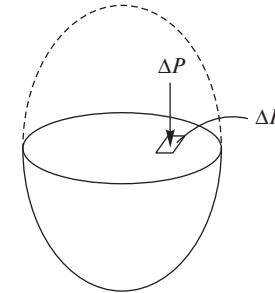


Рис. 1.10. К расчету нормального напряжения

Это нормальное усилие, отнесенное к величине этой площади (рис. 1.10):

$$\bar{p} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F}.$$

Нормальное напряжение — вектор.

### Свойства нормального напряжения

1. *Нормальное напряжение действует по внутренней нормали к площади действия (является сжимающим напряжением).*

*Доказательство.* Покажем, что сила  $\Delta P$  действует по внутренней нормали к площадке  $\Delta F$ . Доказательство от противного: а) если бы сила была направлена не по нормали, то ее можно было бы разложить на нормальную и касательную составляющие. Из-за текучести жидкости касательная составляющая привела бы жидкость в движение, т.е. в этом случае равновесие жидкости было бы невозможно. Значит, сила направлена по нормали; б) так как жидкость не сопротивляется растягивающим напряжениям, то сила  $\Delta P$  может быть только сжимающей.

2. *В покоящейся жидкости значение (модуль) нормального напряжения не зависит от ориентации площадки.*

*Доказательство.* Выделим в покоящейся жидкости элементарную частицу в форме тетраэдра с ребрами  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ , выбранными вдоль координатных осей. Площадь основания  $\frac{1}{2} \Delta x \Delta y$ , высота  $\Delta z$ , объем (одна треть площади основания на высоту)  $\Delta V = \frac{1}{6} \Delta x \Delta y \Delta z$ .

Отбросим окружающую тетраэдр жидкость и для сохранения равновесия приложим к каждой грани тетраэдра поверхностные силы  $\Delta P_x$ ,  $\Delta P_y$ ,  $\Delta P_z$  по направлениям осей и  $\Delta P_n$ , действующую на наклонную грань по направлению нормали к ней  $n$  (рис. 1.11). Кроме поверхностных сил на жидкость, заключенную в тетраэдре, действует массовая сила, проекции плотности распределения которой на оси координат обозначим  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ .

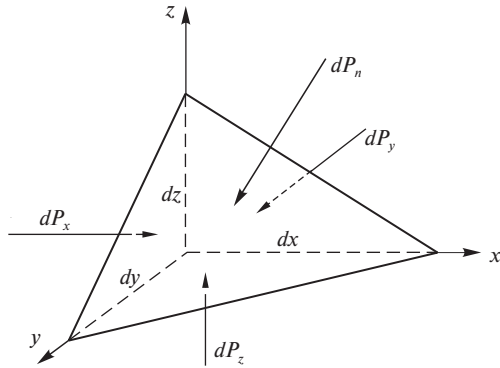


Рис. 1.11. Равновесие элементарной частицы

Массовая сила равна произведению массы на плотность распределения силы. В направлении оси  $x$  действует массовая сила  $\rho \Delta V X$ .

Уравнение равновесия жидкости, заключенной в тетраэдре (сумма сил равна нулю), в проекции на ось  $x$ :

$$\Delta P_x + \rho \Delta V X = \Delta P_n \cos(n, x),$$

где  $(n, x)$  — угол между нормалью к наклонной грани и осью координат.

Разделим обе части уравнения на площадь грани, перпендикулярной оси  $x$ :

$$\frac{\Delta P_x}{\Delta F_x} + \frac{\rho \Delta V X}{\Delta F_x} = \frac{\Delta P_n \cos(n, x)}{\Delta F_x}.$$

Упростим, учитывая что  $\Delta F_x = \Delta F_n \cos(n, x) = \frac{1}{2} \Delta y \Delta z$ :

$$\frac{\Delta P_x}{\Delta F_x} + \frac{\rho \Delta x X}{3} = \frac{\Delta P_n}{\Delta F_n}.$$

Стягиваем тетраэдр в точку, второе слагаемое обращается в ноль; имеем  $p_x = p_n$ . Проекция уравнения равновесия на другие оси приводят к следующим выводам:

$$p_y = p_n \text{ и } p_z = p_n.$$

Следовательно,  $p_x = p_y = p_z = p_n$ . Таким образом доказано, что величина нормального напряжения в любой точке покоящейся жидкости не зависит от направления действия.

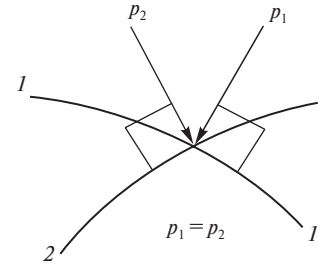


Рис. 1.12

Это позволяет характеризовать напряженное состояние покоящейся жидкости в каждой точке скалярной величиной, представляющей значение нормального напряжения в этой точке и называемой **гидростатическое давление** (в дальнейшем слово «гидростатическое» опускается).

Давление может быть неодинаковым в разных точках покоящейся жидкости:  $p = f(x, y, z)$ .

Единицы измерения давления:

$$[p] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па (Паскаль)}; 1 \text{ кПа} = 10^3 \text{ Па}; 1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па};$$

$$1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Па}$$

$$1 \frac{\text{кГс}}{\text{см}^2} = 1 \text{ ат} = 9,81 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

Единицы столба жидкости — мм рт. ст.; м вод.ст.

#### 1.1.4. Дифференциальные уравнения равновесия жидкости Эйлера<sup>1</sup>

Рассмотрим жидкость, находящуюся в покое относительно неинерциальной системы координат  $x, y, z$ . Выделим в этой жидкости элементарный параллелепипед с ребрами  $dx, dy, dz$ , параллельными соответствующим осям координат. Объем параллелепипеда  $dV = dx dy dz$ , масса  $dm = \rho dV = \rho dx dy dz$ .

Отбросим жидкость, окружающую параллелепипед, и заменим действие отброшенной жидкости силами. Это будут сжимающие поверхностные силы давления.

Кроме них на жидкость действуют массовые силы, проекции плотности распределения которых на оси координат —  $X, Y, Z$ .

Массовая сила в направлении оси  $x$  составит  $X dm = X \rho dx dy dz$ .

<sup>1</sup> Леонардо Эйлер (1707–1783) — академик Петербургской академии наук. Автор работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближенным вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и другим областям.

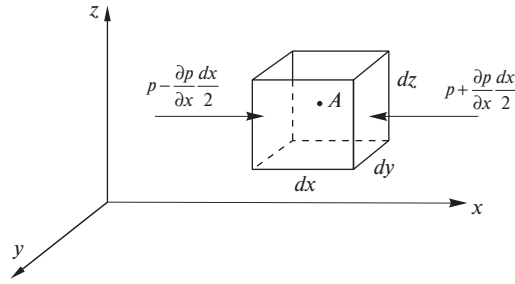


Рис. 1.13. Действие давления на выделенный объем жидкости

Пусть давление в центре выделенного объема равно  $p$ . Давление непрерывная функция координат, градиент давления в направлении оси  $x$  составит  $\frac{\partial p}{\partial x}$  (ограничимся первой производной). Тогда давление на левой грани  $p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}$ , давление на правой грани  $p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}$  (рис. 1.13). Составим уравнение равновесия жидкости, заключенной в параллелепипед (сумма сил равна нулю). В проекции на ось  $x$  получим

$$X \rho dx dy dz + \left( p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz = 0.$$

Раскроем скобки и разделим на массу  $dm = \rho dx dy dz$ . Тогда с учетом проекций на другие оси имеем:

$$\begin{cases} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad \text{— дифференциальные уравнения равновесия жидкости Эйлера.}$$

### Основное уравнение гидростатики

Умножим дифференциальные уравнения равновесия жидкости Эйлера на  $dx, dy, dz$  соответственно и сложим (по размерности имеем:  $X$  — сила, действующая на единичную массу;  $dx$  — путь; результат умножения — работа):

$$X dx + Y dy + Z dz - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = 0.$$

Давление  $p$  зависит от координат, т.е.  $p = f(x, y, z)$ .

Как известно из математики, полный дифференциал давления равен

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz.$$

Имеем  $dp = \rho(X dx + Y dy + Z dz)$  — уравнение равновесия жидкости Эйлера в объединенном виде.

Воспользуемся полученным уравнением для частного случая, когда из массовых сил на жидкость действует только сила тяжести. На элементарную массу  $dm$  действует сила веса  $G = dm g$  в направлении, противоположном оси  $z$ . Потенциал массовых сил (отношение сил к массе) в проекциях на оси координат:  $X = 0$ ;  $Y = 0$ ;  $Z = -g$ .

Подставляем в объединенное уравнение Эйлера  $dp = -\rho g dz$  или  $dz + \frac{dp}{\rho g} = 0$ .

После интегрирования получаем основное уравнение гидростатики. Для всех точек покоящейся жидкости сумма геометрического и пьезометрического напоров есть величина постоянная  $z + \frac{p}{\rho g} = \text{const} = H_r$  — **гидростатический напор**.

### 1.1.5. Давление абсолютное, избыточное и вакуумметрическое

На поверхности Земли действует атмосферное давление. Все тела находятся под действием давления столба воздуха. На поверхность жидкости в открытом сосуде всегда действует атмосферное давление, в закрытом сосуде давление может быть как больше атмосферного (избыточное давление), так и меньше атмосферного (вакуумметрическое давление).

На графике представим перечисленные случаи (рис. 1.14).

Ось абсцисс графика — абсолютный вакуум (нет давления).

На оси отметим атмосферное давление  $p_{\text{ат}}$

В точке  $A$  — абсолютное давление выше атмосферного, на величину избыточного давления, которое иногда называется **манометрическим**.

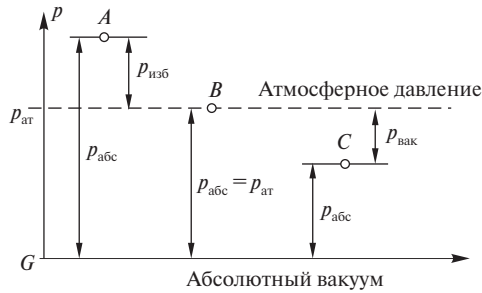


Рис. 1.14. Абсолютное, избыточное и вакуумметрическое давление

В точке  $B$  абсолютное давление равно атмосферному. Избыточное равно нулю.

В точке  $C$  абсолютное давление меньше атмосферного (вакуум). Вакуумметрическое давление характеризует, насколько абсолютное давление меньше атмосферного (избыточное давление отсутствует, формально оно отрицательно).

Итак, выделим следующие определения.

**Давление абсолютное** — характеризует интенсивность напряженного состояния жидкости, отсчитывается от абсолютного нуля давления. (редко: фактическое, реальное).

**Давление атмосферное** — давление воздуха на поверхности Земли. Принимается равным  $1 \text{ кг/см}^2$  — техническая атмосфера ( $98,0665 \text{ кПа}$ ,  $735,559 \text{ мм рт. ст.}$ ). Редко используется физическая атмосфера, равная  $760 \text{ мм рт.ст.}$

**Давление избыточное** (манометрическое) — превышение над атмосферным:

$$p_{\text{изб}} = p - p_{\text{ат}}$$

**Давление вакуумметрическое** (вакуум) — недостаток до атмосферного:

$$p_{\text{вак}} = p_{\text{ат}} - p.$$

### Формула для определения гидростатического давления в точке

На рис. 1.15 изображен сосуд с жидкостью в состоянии покоя.

Давление на свободной поверхности  $p_0$  равно атмосферному давлению:  $p_0 = p_{\text{ат}}$

Точка  $A$  выбрана на глубине  $h$ , а точка  $B$  — на свободной поверхности. Положение точек от плоскости сравнения —  $z$  и  $z_0$ . Давление

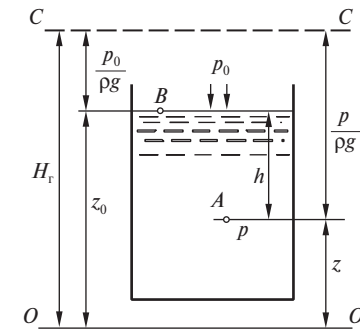


Рис. 1.15. Сосуд с жидкостью в состоянии покоя

в точке  $A$  равно  $p$ , а в точке  $B$  равно давлению на свободной поверхности  $p_0$ .

Запишем основное уравнение гидростатики для выбранных точек:

$$z + \frac{p}{\rho g} = z_0 + \frac{p_0}{\rho g}, \text{ или } p = p_0 + \rho g(z_0 - z).$$

Заметим, что  $z_0 - z = h$  — глубина погружения точки  $A$ .

Окончательно формула для определения гидростатического давления в точке примет вид

$$p = p_0 + \rho gh,$$

где  $p_0$  — абсолютное или избыточное давление на поверхности жидкости;  $p$  — соответственно абсолютное или избыточное давление в точке на глубине  $h$  жидкости плотности  $\rho$  в поле силы тяжести. Слагаемое  $\rho gh$  называют **весовым давлением**, так как это вес столба жидкости единичной площади высотой  $h$  и плотностью  $\rho$ . Повторим: если  $p_0$  взять абсолютное, то и  $p$  (результат) будет абсолютное, если избыточное, то и результат — избыточное. Так если в частном случае на поверхности жидкости давление равно атмосферному, то это значит, что избыточное давление на поверхности равно нулю.

Тогда избыточное давление в точке на глубине  $p = \rho gh$ .

### Геометрическое истолкование основного уравнения гидростатики

В сосудах находится жидкость (для определенности — вода) в состоянии покоя.

Рассмотрим три случая: давление на поверхности равно, больше и меньше атмосферного (рис. 1.16–1.18).



Рис. 1.16. Сосуд с жидкостью под атмосферным давлением

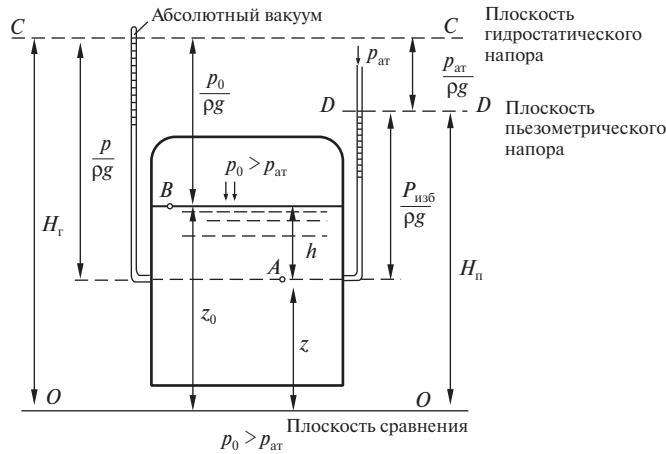


Рис. 1.17. Сосуд с жидкостью под давлением больше атмосферного

В первом случае (см. рис. 1.16) сосуд открыт, во втором и третьем случаях сосуда закрыты (см. рис. 1.17, 1.18).

Точка  $A$  везде выбрана на некоторой глубине  $h$  от поверхности воды, точка  $B$  на свободной поверхности. Положение точек  $A$  и  $B$  относительно плоскости сравнения  $0-0$  —  $z$  и  $z_0$ . На высоте точки  $A$  установлены водяные манометры — запаянные трубки, из которых удален воздух (на рисунках слева). Вода в них поднимается на высоту, определяемую абсолютным давлением  $\frac{p}{\rho g}$ . Эта высота плюс высота положения точки  $A$  составляют гидростатический напор  $H_г$ , который

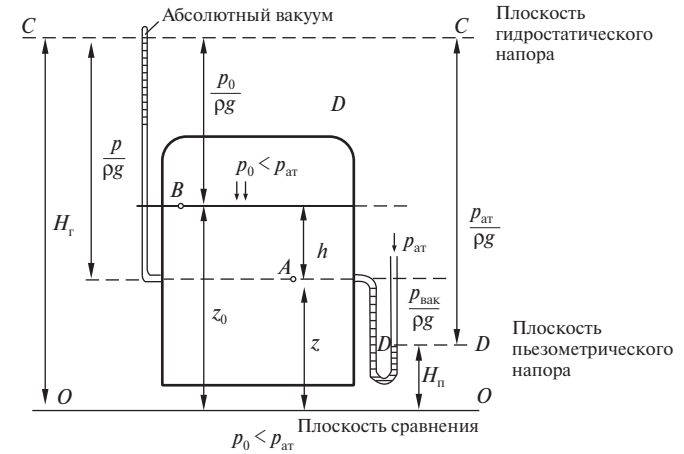


Рис. 1.18. Сосуд с жидкостью под давлением меньше атмосферного

постоянен для всех точек покоящейся жидкости (основное уравнение гидростатики):

$$z + \frac{p}{\rho g} = z_0 + \frac{p_0}{\rho g} = H_г.$$

Геометрическое место полученных высот есть плоскость гидростатического напора  $C-C$ .

На высоте точки  $A$  установлены также пьезометры — трубки с открытым верхним концом, так что на жидкость в них действует атмосферное давление (на рисунках справа). Вода в них поднимается на высоту  $\frac{p_{изб}}{\rho g}$  относительно точки  $A$  (если давление в точке  $A$  меньше

атмосферного, то уровень воды будет ниже на величину  $\frac{p_{вак}}{\rho g}$ ). Эта

высота называется **пьезометрической высотой**. Вместе с высотой положения она составляет **пьезометрический напор**. Геометрическое место полученных высот есть плоскость пьезометрического напора  $D-D$ , которая всегда расположена ниже плоскости гидростатического напора на высоту  $\frac{p_{ат}}{\rho g}$ .

Основное уравнение гидростатики может быть записано для абсолютного и для избыточного давлений. В обоих случаях геометрическая высота точек, отсчитанная от плоскости сравнения, называется **геометрическим напором**.

Рассматриваем абсолютные давления. Тогда второе слагаемое — высота, определяемая абсолютным давлением, условно назовем **абсолютный напор**. Оба слагаемых дают гидростатический напор.

Рассматриваем избыточные давления. Тогда второе слагаемое — **пьезометрическая высота**. В случае вакуума это **вакуумметрическая высота**. Вместе с геометрическим напором образуют «пьезометрический напор».

Выделим следующие определения.

**Плоскость сравнения** — горизонтальная плоскость для сравнения высот положения точек жидкости. Положение выбирается исходя из удобства измерений. Обязательное требование — горизонтальность.

**Геометрический напор** — высота точки от плоскости сравнения.

**Пьезометрический напор** — высота подъема воды в пьезометре. Определяется избыточным давлением.

**Геометрический смысл основного уравнения гидростатики:** для любой точки покоящейся жидкости:

- сумма геометрического напора и напора, соответствующего абсолютному давлению в этой точке, есть величина постоянная, равная гидростатическому напору;
- сумма геометрического напора и пьезометрической высоты есть величина постоянная, равная пьезометрическому напору.

#### *Энергетическое истолкование основного уравнения гидростатики*

Основное уравнение гидростатики  $z + \frac{p}{\rho g} = \text{const}$ . Слагаемые уравнения отнесены к весу единицы объема жидкости, т.е. поделены на  $\rho g$ . Поэтому их называют удельными, т.е. отнесенными к единице (в данном случае — к единице веса).

Чтобы перейти к величинам, отнесенным к элементарной частице жидкости, достаточно умножить на ее вес  $dmg$ :

$$dmg z + dm g \frac{p}{\rho g} = \text{const}.$$

Первое слагаемое есть сила веса частицы, умноженная на высоту ее положения, т.е. работа, необходимая для поднятия частицы на указанную высоту. Это потенциальная энергия положения.

Второе слагаемое после очевидных сокращений  $dVp$  есть работа, необходимая для «создания» частицы, т.е. высвобождения занимаемого ею объема  $dV$  при сопротивлении силы, обусловленной давлени-

ем жидкости. Второе слагаемое — потенциальная энергия давления.

(Подробно поясним это важное замечание: пусть объем частицы изменился от нуля до  $dV$ . Для этого граница частицы площадью  $dydz$  должна пройти против сил давления, равных произведению давления на ее площадь  $pdydz$ , путь  $dx$ ; совершенная работа есть произведение силы на путь  $pdydzdx = pdV$ . Эту работу иногда называют работа вытеснения).

Сумма двух слагаемых есть полная потенциальная энергия частицы.

Переходя вновь к удельным величинам, можно сделать вывод: удельная потенциальная энергия положения и удельная потенциальная энергия давления составляют полную удельную потенциальную энергию, называемую **гидростатический напор**.

#### 1.1.6. Закон Паскаля<sup>1</sup>

Сначала приведем полную формулировку закона.

**Внешнее давление, производимое на пограничную поверхность жидкости, находящейся в равновесии в замкнутом сосуде, передается во внутрь жидкости одинаково всем ее частицам.**

Другая формулировка (более общая).

**Изменение давления в любой точке покоящейся жидкости передается в остальные ее точки без изменений.**

Применим основное уравнение гидростатики к двум точкам покоящейся жидкости:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g}.$$

Изменим давление в первой точке на  $\Delta p_1$ , не нарушая равновесия жидкости. Тогда во второй точке давление должно измениться на некоторое значение  $\Delta p_2$ . Из основного уравнения гидростатики следует, что

$$z_1 + \frac{p_1 + \Delta p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2 + \Delta p_2}{\rho g}, \text{ или } \Delta p_1 = \Delta p_2, \text{ ч.т.д.}$$

<sup>1</sup> Блез Паскаль (1623–1662) — французский математик, физик, религиозный философ и писатель. Сформулировал одну из основных теорем проективной геометрии и основной закон гидростатики.

### Потенциал массовых сил

Уравнение равновесия жидкости Эйлера в объединенном виде

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz)$$

имеет смысл лишь в том случае, если правая его часть также есть полный дифференциал какой-то функции. Обозначим эту функцию через  $U = U(x, y, z)$ . Тогда полный дифференциал ее будет

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz.$$

Примем  $dp = -\rho dU$ .

Тогда имеем  $X = -\frac{\partial U}{\partial x}$ ,  $Y = -\frac{\partial U}{\partial y}$ ,  $Z = -\frac{\partial U}{\partial z}$ .

Функцию  $U = U(x, y, z)$  называют потенциальной функцией, а силы, для которых эта функция существует, — силами, имеющими потенциал.

Отсюда следует вывод: жидкость может находиться в равновесии только под действием массовых сил, имеющих потенциал, так как только такие силы удовлетворяют уравнениям равновесия Эйлера.

### Поверхности равного давления

Поверхностью равного давления называют такую выделенную в жидкости поверхность, гидростатическое давление во всех точках которой одно и то же. Очевидно, что для такой поверхности  $dp = 0$  и  $p = \text{const}$ . Учитывая  $dp = -\rho dU$ , получим  $dU = 0$  и  $U = \text{const}$ .

Поверхности равного давления и равного потенциала совпадают.

Для жидкости, находящейся в покое под действием силы тяжести, уравнение поверхностей равного давления имеет вид  $z = C$  (или  $h = C$ ).

### 1.1.7. Относительное равновесие

#### Относительный покой (равновесие жидкости в движущемся сосуде)

При равновесии в движущемся сосуде жидкость движется вместе с сосудом как единое целое, т.е. находится в состоянии *относительного покоя*.

### Сосуд, движущийся горизонтально и прямолинейно с постоянным ускорением

Рассмотрим равновесие жидкости, находящейся в сосуде, перемещающемся горизонтально с постоянным положительным ускорением  $a$  (рис. 1.19).

В этом случае из массовых сил действуют сила тяжести  $G = dm g$  и сила инерции  $P_{\text{ин}} = dma$ , направление которой противоположно направлению ускорения.

Проекция плотности распределения силы тяжести  $Z = -g$ , а силы инерции  $X = -a$ .

Применим уравнение равновесия жидкости Эйлера в объединенном виде:

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz) \Rightarrow dp = \rho(-adx - g dz).$$

После интегрирования

$$p = -\rho ax - \rho g z + C$$

При  $x = y = z = 0$  имеем  $C = p_0$ , окончательно  $p = p_0 - \rho(ax + gz)$ .

**Уравнение поверхностей равного давления.** Из условия  $ax + gz = C$  получим

$$z = -\frac{a}{g}x + C.$$

Для свободной поверхности

$$z = -\frac{a}{g}x.$$

Тангенс угла наклона поверхностей равного давления

$$\text{tg } \theta = -\frac{a}{g} \text{ (не зависит от } \rho \text{)}.$$

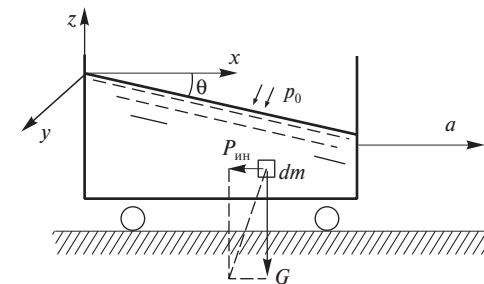


Рис. 1.19. Равновесие жидкости в сосуде

Как распределено давление по глубине? Обозначим через  $h$  глубину точки, отсчитанную по вертикали от свободной поверхности. Тогда

$$z = -\frac{a}{g}x - h.$$

Подставляя в выражение для давления, получим

$$p = p_0 - \rho(ax + gz) = p_0 - \rho\left(ax - \frac{ga}{g}x - gh\right) = p_0 + \rho gh.$$

Распределение давления по глубине подчиняется гидростатическому закону.

### Сосуд, движущийся вертикально с постоянным ускорением

В этом случае положительные значения ускорения  $a$  соответствуют ускорению, направленному вверх (по оси  $z$ ), а отрицательные – направленному вниз.

Уравнение поверхностей равного давления  $z = C$ .

Получим давление

$$p = p_0 + \rho(g + a)h.$$

### Цилиндрический сосуд, равномерно вращающийся относительно вертикальной оси

Рассмотрим цилиндрический сосуд, заполненный до некоторого уровня жидкостью плотностью  $\rho$  и приведенный во вращение с по-

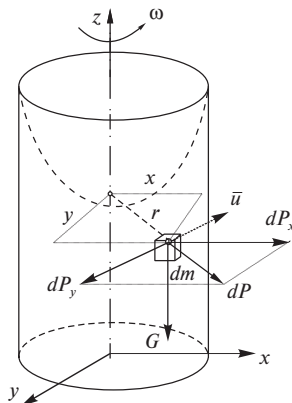


Рис. 1.20. Действия сил на элементарную массу при вращении сосуда с жидкостью

стоянной угловой скоростью  $\omega$  относительно вертикальной оси (рис. 1.20). Через некоторое время после начала вращения сосуда жидкость под действием сил трения будет вращаться с той же скоростью, что и сосуд.

На элементарную массу  $dm$ , расположенную от оси на расстоянии  $r$ , действуют силы веса  $G = dm g$  и центробежная сила инерции, направленная вдоль радиуса и равная  $dP_{цб} = dm\omega^2 r$ .

Ее проекции на оси координат (из подобия треугольников)

$$dP_{цбx} = dP_{цб} \frac{x}{r} = dm\omega^2 x, \quad dP_{цбы} = dP_{цб} \frac{y}{r} = dm\omega^2 y.$$

Проекции вектора плотности распределения массовых сил при этом:

- от силы тяжести  $X = 0, Y = 0, Z = -g$ ;
- от центробежной силы инерции  $X = \omega^2 x, Y = \omega^2 y, Z = 0$ .

Применим уравнение равновесия жидкости Эйлера в объединенном виде:

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz) \Rightarrow dp = \rho(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz).$$

Для нахождения формы поверхностей равного давления произведем интегрирование при условии  $dp = 0$ .

$$\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - gz = C \quad \text{или, поскольку } x^2 + y^2 = r^2,$$

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz = C.$$

Окончательно

$$z = \frac{\omega^2}{2g}r^2 + C_1.$$

Из полученной формулы ясно, что поверхности равного давления представляют собой семейство конгруэнтных параболоидов вращения с вертикальной осью. Свободная поверхность — частный случай поверхности равного давления, во всех точках которой давление равно внешнему давлению  $p_0$ . Координаты вершины параболоида  $x = 0, y = 0, r = 0, z = z_0, C_1 = z_0$ .

Уравнение свободной поверхности

$$z_{св} - z_0 = \frac{\omega^2}{2g}r^2.$$



**Закон распределения давлений.** Используем ранее полученное дифференциальное уравнение равновесия жидкости

$$dp = \rho(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz).$$

После интегрирования имеем

$$p = \rho \left( \frac{\omega^2 r^2}{2} - gz \right) + C_2.$$

Из условий на вершине параболоида  $r = 0$ ,  $z = z_0$ ,  $p = p_0$  найдем

$$C_2 = p_0 + \rho g z_0,$$

После подстановки получим

$$p = p_0 + \frac{\rho \omega^2 r^2}{2} + \rho g (z_0 - z).$$

Установим, как распределяется давление по вертикали. Для этого подставим в полученное уравнение выражение из уравнения свободной поверхности

$$\frac{\omega^2 r^2}{2g} = z_{св} - z_0.$$

$$p = p_0 + \rho g (z_{св} - z_0) + \rho g (z_0 - z) = p_0 + \rho g (z_{св} - z) = p_0 + \rho g h,$$

где  $h = z_{св} - z$  — глубина погружения точки под свободной поверхностью.

Таким образом, в жидкости, покоящейся в равномерно вращающемся сосуде, давление по вертикали распределяется по гидростатическому закону.

### 1.1.8. Приборы для измерения давления

Гидростатическое давление — модуль сжимающего напряжения, возникающего в покоящейся жидкости, обладают следующими свойствами:

- 1) направлено всегда по внутренней нормали к площадке, на которую оно действует;
- 2) в любой точке жидкости по всем направлениям одинаково.

#### Классификация приборов для измерения давления

По характеру измеряемой величины:

- барометры — для измерения атмосферного давления  $p_{ат}$ ;

- манометры — для измерения избыточного давления (разницы между абсолютным и атмосферным давлением, т.е.  $p_{изб} = p_{ат} - p_{ат}$ );
- вакуумметры — для измерения вакуумметрического давления (разницы между атмосферным давлением и абсолютным, т.е.  $p_{вак} = p_{ат} - p$ );
- дифференциальные манометры — для измерения разности давлений;
- микроманометры — для измерения малых давлений и малых перепадов давления.

По принципу действия: жидкостные, пружинные, поршневые, электрические, комбинированные и др.

По классу точности: образцовые, контрольные и рабочие.

Класс точности численно равен отношению допустимой абсолютной ошибки измерения прибора  $\Delta$  к верхнему пределу измерения  $p_{макс}$  в процентах:  $K = \Delta / p_{макс} \cdot 100$ .

- $K = 0,25; 0,4; 0,6$  — образцовые и контрольные;
- $K = 1,0; 1,5; 2,4; 4,0$  — рабочие.

К жидкостным приборам для измерения давления относятся пьезометры, манометры, вакуумметры, дифференциальные манометры.

Пьезометры применяются для измерения избыточного и вакуумметрического давления.

Верхний конец пьезометра (стеклянной трубки) сообщается с атмосферой. Избыточное давление определяется по формуле  $p_{изб} = \rho g h_p$ , где  $h_p$  — высота поднятия жидкости над измеряемой точкой (рис. 1.21).

U-образный манометр представляет собой U-образную стеклянную трубку, заполненную рабочей жидкостью. Обычно в качестве рабочих жидкостей используют воду, спирт, ртуть, тетрабромэтан, бромистый этилен, бромистый этил (глицерин, ЛР № 4) (рис. 1.22).

Давление на плоскости 0—0, называемой плоскостью сравнения, обозначим  $p^*$ . Тогда получим (см. рис. 1.22)

- слева  $p^* = p_{Аабс} + \rho g h$ ;
- справа  $p^* = p_{ам} + \rho_{pm} g h_{pm}$ .

Избыточное давление в сосуде

$$p_{Аабс} = p_{Аабс} - p_{ам} = \rho_{pm} g h_{pm} - \rho g h.$$

Здесь  $\rho$  — плотность жидкости в сосуде, заполняющей левое колено манометра. Если это воздух, плотность которого в 800 раз меньше плотности воды, то ею можно пренебречь. Тогда  $p_{Аабс} = \rho_{pm} g h_{pm}$ .

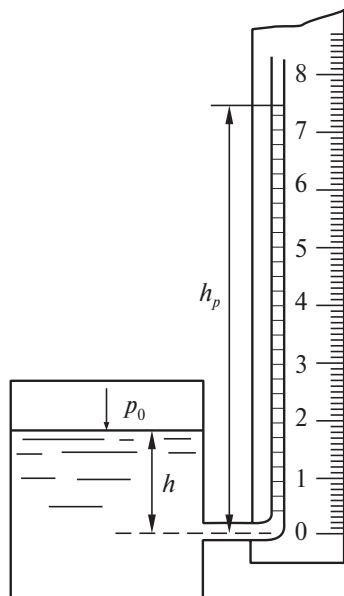


Рис. 1.21. Пьезометр

*Замечание.* Использование ртути запрещено не только в учебных учреждениях, но и на производстве.

*Дифференциальные манометры* (рис. 1.23) применяются для измерения разности давлений в двух точках покоящейся и движущейся жидкости.

- слева  $p_* = p_2 + \rho g h_2 + \rho_{рт} g h_{рт}$  ;
- справа  $p_* = p_1 + \rho g (h_{рт} + h_2 + z_1 - z_2)$ .

$$p_1 - p_2 = g h_{рт} (\rho_{рт} - \rho) - \rho g (z_1 - z_2).$$

Разность одинакова для абсолютных и избыточных давлений.

*Микроманометры* (рис. 1.24) с наклонной трубкой и наклонной шкалой позволяют измерять с большей точностью малые давления газов. Избыточное давление на поверхности жидкости в чашке равно

$$p_{изб} = \rho_{ж} g \ell \sin \alpha,$$

где  $\rho_{ж}$  — плотность жидкости;  $\alpha$  — угол наклона трубки к горизонту.

Основными преимуществами жидкостных приборов являются простота устройства и высокая точность измерений.

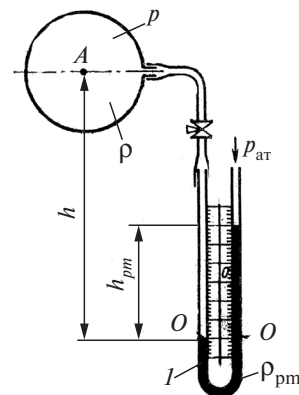


Рис. 1.22. U-образный манометр

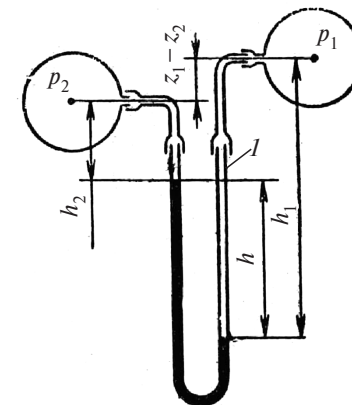


Рис. 1.23. Дифференциальный манометр

Принцип действия пружинных приборов основан на упругой деформации упругого элемента (трубчатой пружины, мембраны или сильфона) под действием давления. Деформация элемента пропорциональна величине измеряемого давления.

Из металлических приборов наиболее распространенным на практике является *пружинный манометр* (рис. 1.25), принцип действия которого следующий.

Под действием давления жидкости полая пружина 1 частично распрямляется и посредством зубчатого механизма 2 приводит в движение стрелку 3, перемещающуюся относительно шкалы 4. Принцип действия пружинного манометра основан на уравнивании силы давления жидкости упругой силой пружины. Пружинный манометр показывает избыточное давление.

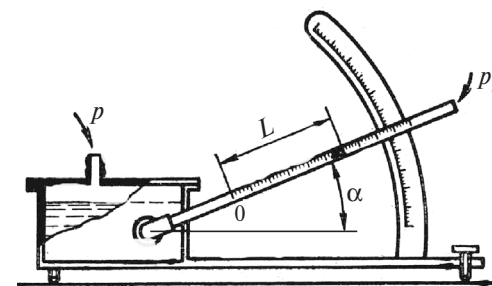
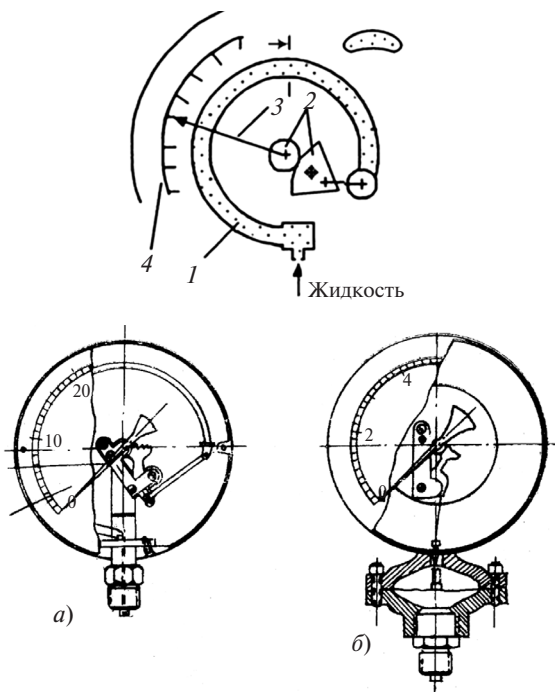


Рис. 1.24. Микроманометр



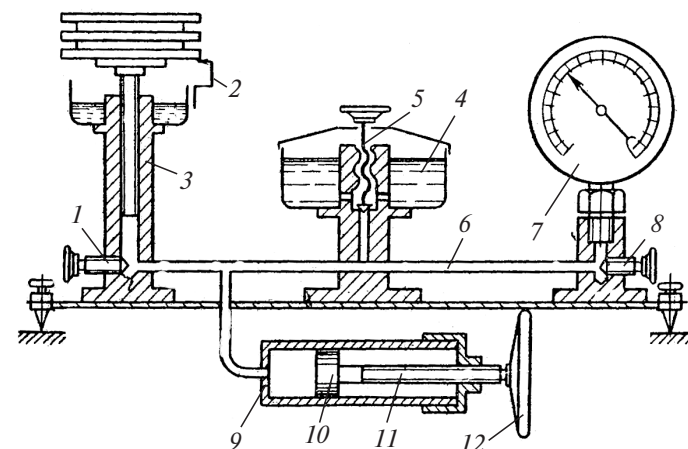
**Рис. 1.25.** Пружинный манометр:  
*а* — с трубчатой пружиной; *б* — с мембраной

Основной деталью прибора является согнутая по дуге окружности полая трубка, имеющая в сечении овальную форму (трубка Бурдона). Один из концов трубки запаян. Под действием давления свободный конец трубки поворачивается на некоторый угол, пропорциональный измеряемому давлению. При этом с помощью поводка поворачивается зубчатый сектор, который поворачивает шестеренку, с осью которой жестко связана стрелка.

Недопустимо подавать на манометры с упругим элементом давление больше максимально допустимого по паспорту прибора (и меньше — вакуум). Остаточная деформация упругого элемента неустранима, прибор испорчен.

В *грузопоршневых манометрах* (рис. 1.26) величина давления определяется по весу грузов, помещаемых на рабочей площадке поршня, под которым создано измеряемое давление.

Установка для проверки пружинных манометров по образцовому пружинному манометру вместо цилиндра 3 содержит устройство для



**Рис. 1.26.** Грузопоршневой манометр

присоединения образцового прибора. При проверке любого прибора сравнивают показания поверяемого прибора с показаниями образцового.

Приемным элементом *электрических манометров*, преобразующим величину деформации упругого элемента, пропорциональную давлению, в тот или иной электрический сигнал, является датчик давления.

Используются датчики:

- индуктивные (дифференциальный трансформатор с подвижным сердечником);
- емкостные;
- пьезоэлектрические;
- полупроводниковые;
- датчики сопротивления.

Точность механических и электрических манометров достигает  $\pm 0,1\%$  максимального значения шкалы.

### 1.1.9. Эпюры гидростатического давления

Эпюра гидростатического давления — графическое изображение закона распределения нормального гидростатического напряжения по поверхности (рис. 1.27). Давление можно рассматривать абсолютное, избыточное и весовое (только за счет жидкости). Если давление на поверхности жидкости совпадает с атмосферным давлением, то избыточное и весовое давления совпадают. Эпюры могут

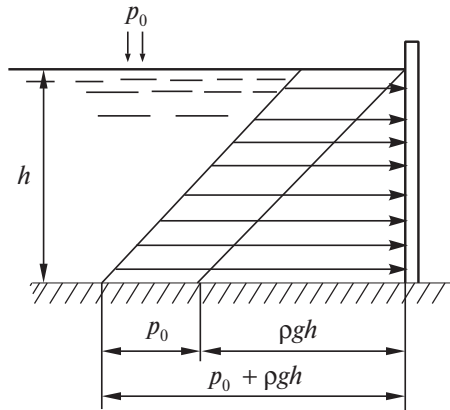


Рис. 1.27. Эюра гидростатического давления

быть построены для всех перечисленных давлений, однако на практике строят обычно эюры избыточного давления, принимая во внимание, что с другой стороны стенки также действует атмосферное давление.

Эюру всегда следует строить со стороны жидкости, помня о направлении действия нормальных напряжений в покоящейся жидкости (по внутренней нормали).

На свободной поверхности имеем

$$p_{абс} = p_0, p_{изб} = 0.$$

На глубине  $h$

$$p_{абс} = p_0 + \rho gh, p_{изб} = \rho gh.$$

### 1.1.10. Сила гидростатического давления жидкости на плоские поверхности

#### 1. Поверхность горизонтальна.

Все точки горизонтальной площадки находятся на одинаковой глубине и испытывают одинаковое давление со стороны покоящейся жидкости. Если свободная поверхность жидкости открыта в атмосферу ( $p_0 = p_{ат}$ ), то сила избыточного давления на площадку площади  $F$  определяется по формуле  $P_{изб} = \rho ghF$ , т.е. численно равна весу жидкости, заключенной в вертикальной призме с основанием  $F$  и высотой  $h$  (рис. 1.28).

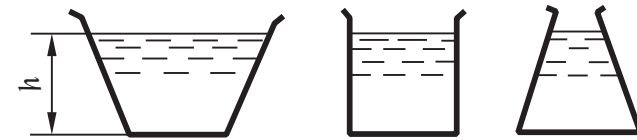


Рис. 1.28. Горизонтальная поверхность

Сила  $P_{изб}$  направлена со стороны жидкости перпендикулярно стенке. Линия действия силы пересекает площадку  $F$  в центре тяжести, так как давление распределено по площадке равномерно. При равенстве  $p_0$ , плотностей  $\rho$ , площадей оснований  $F$  и глубин  $h$  независимо от формы сосуда сила давления на горизонтальное дно будет одной и той же. Так, в расширяющихся кверху сосудах сила давления на дно меньше веса жидкости, в цилиндрических — они одинаковы, а в сужающихся кверху — сила давления больше веса заключенной в сосуд жидкости. Это явление, парадоксальное с точки зрения житейских представлений, носит название **гидростатический парадокс**. (Б. Паскаль).

#### 2. Поверхность наклонна.

Рассмотрим плоскую фигуру площадью  $F$  (часть наклонной стенки). На рис. 1.29 эта фигура условно развернута. Выделим элементарную площадку  $dF$ , расположенную на глубине  $h$ , на которую действует элементарная сила  $dP = p dF = (p_0 + \rho gh) dF$  со стороны жидкости по нормали к площадке. Сила, действующая на всю площадку  $F$ , направлена также по нормали:

$$P = \int_F dP = \int_F (p_0 + \rho gh) dF.$$

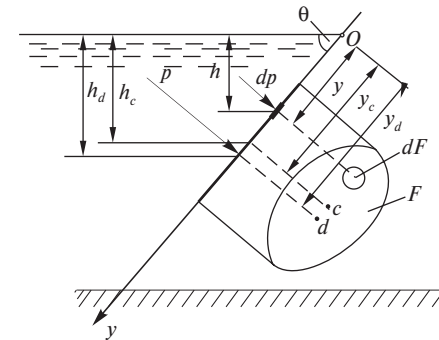


Рис. 1.29

Очевидно, что  $h = y \cdot \sin \theta$ , причем  $\sin \theta$  — величина постоянная, выносится за знак интеграла.

Известно, что интеграл  $\int_F y dF = S_{0x} = y_c F$  есть статический момент плоской фигуры относительно оси  $Ox$  и равен произведению координаты центра тяжести плоской фигуры на ее площадь:

$$P = \int_F p_0 dF + \int_F \rho g h dF = p_0 \int_F dF + \rho g \sin \theta \int_F y dF = p_0 F + \rho g \sin \theta y_c F.$$

Воспользуемся соотношениями  $y_c \sin \theta = h_c$  и  $p_c = p_0 + \rho g h_c$ :

$$P = (p_0 + \rho g h_c) F = p_c F.$$

То есть сила, действующая на плоскую стенку со стороны жидкости, равна произведению давления в центре тяжести на площадь. **Центр давления** — точка приложения равнодействующей силы давления жидкости на плоскую поверхность (точка  $d$ ).

Для нахождения координаты  $y_d$  воспользуемся теоремой Вариньона<sup>1</sup>, рассматривая момент сил относительно оси  $Ox$  (на рисунке точка 0).

$$y_d P = \int_F y dP.$$

Отсюда находим  $y_d$ :

$$y_d = \frac{\int_F y dP}{P} = \frac{\int_F y(p_0 + \rho g h) dF}{P} = \frac{p_0 \int_F y dF + \rho g \sin \theta \int_F y^2 dF}{P}.$$

Момент инерции плоской фигуры относительно оси  $Ox$   $J_{Ox} = \int_F y^2 dF$ , выразим через момент инерции плоской фигуры относительно оси, проходящей через центр тяжести (параллельный перенос оси)  $J_{Ox} = J_c + y_c^2 F$ .

Окончательно

<sup>1</sup> Пьер Вариньон (1654–1772) — французский механик и математик, член Парижской АН. Теорема Вариньона: если система сил  $F_i$  имеет равнодействующую  $R$ , то момент  $M_o(F_i)$  равнодействующей относительно любого центра  $O$  (или оси  $z$ ) равен сумме моментов  $M_o(F_i)$  составляющих сил относительно того же центра  $O$  (или той же оси  $z$ ).

$$y_d = \frac{p_0 y_c F + \rho g \sin \theta (J_c + y_c^2 F)}{(p_0 + \rho g h_c) F}.$$

Если стенка вертикальная, то формула упрощается, так как  $y_c = h_c$ ,  $\sin \theta = 1$ :

$$h_d = \frac{p_0 h_c F + \rho g (J_c + h_c^2 F)}{(p_0 + \rho g h_c) F}.$$

Если на поверхности жидкости избыточное давление равно нулю ( $p_0 = 0$ ), то формула упрощается:

$$y_d = \frac{\rho g \sin \theta J_c + \rho g \sin \theta y_c^2 F}{\rho g \sin \theta y_c F} = \frac{J_c}{y_c F} + y_c.$$

Окончательно координата центра давления

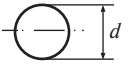
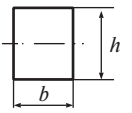
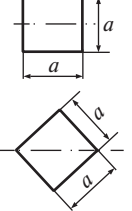
$$y_d = y_c + \frac{J_c}{y_c F}.$$

Величину  $\frac{J_c}{y_c F} \geq 0$  называют **эксцентриситетом**. Напомним:  $J_c$  — момент инерции плоской фигуры относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести.

Моменты инерции некоторых плоских фигур относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести, приведены в табл. 1.1).

Таблица 1.1

Моменты инерции плоских фигур

Круг		$d$ — диаметр	$J_c = \frac{\pi d^4}{64}$
Прямоугольник		$h$ — высота $b$ — ширина	$J_c = \frac{bh^3}{12}$
Квадрат		$a$ — сторона	$J_c = \frac{a^4}{12}$

### 1.1.11. Сила гидростатического давления жидкости на криволинейные стенки

Рассмотрим некоторую ограниченную часть твердой цилиндрической поверхности  $AB$ , которую назовем цилиндрической стенкой. Образующая стенки параллельна оси  $Jy$ .

Пусть рассматриваемая стенка находится под односторонним воздействием покоящейся жидкости.

Выделим элементарную площадку  $dF$ , ее проекции на координатные плоскости —  $dF_{xOy}$  и  $dF_{zOy}$ .

Нормально к площадке со стороны жидкости действует сила  $dP$ , ее проекции на оси —  $dP_x$  и  $dP_z$ .

Элементарная сила равна произведению давления на площадь:

$$dP = p dF = (p_0 + \rho gh) dF.$$

Проекция элементарной силы на ось  $x$ , учитывая, что  $dF_{zOy} = dF \cos \alpha$ ,

$$dP_x = dP \cos \alpha = (p_0 + \rho gh) dF \cos \alpha = (p_0 + \rho gh) dF_{zOy}.$$

Проекция элементарной силы на ось  $z$ , учитывая, что  $dF_{xOy} = dF \sin \alpha$ ,

$$dP_z = dP \sin \alpha = (p_0 + \rho gh) dF \sin \alpha = (p_0 + \rho gh) dF_{xOy}.$$

Интегрированием найдем проекции силы, действующей на всю площадь стенки  $F$ .

На ось  $x$ :

$$P_x = \int_F dP_x = \int_{F_{zOy}} (p_0 + \rho gh) dF_{zOy} = p_0 \int_{F_{zOy}} dF_{zOy} + \rho g \int_{F_{zOy}} h dF_{zOy}.$$

Учтем выражение для статического момента плоской фигуры  $dF_{zOy}$  относительно оси  $Oy$

$$S_{Oy} = \int_{F_{zOy}} h dF_{zOy} = h_c F_{zOy},$$

где  $h_c$  — глубина погружения центра тяжести проекции  $dF_{zOy}$ .

$$P_x = p_0 F_{zOy} + \rho g h_c F_{zOy} = (p_0 + \rho g h_c) F_{zOy}.$$

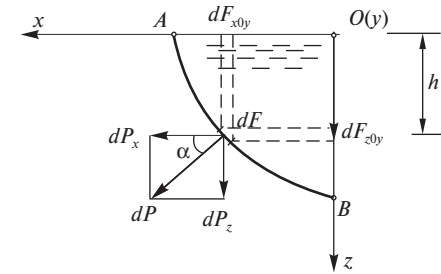


Рис. 1.30. Цилиндрическая стенка

На ось  $z$ :

$$P_z = \int_F dP_z = \int_{F_{xOy}} (p_0 + \rho gh) dF_{xOy} = p_0 \int_{F_{xOy}} dF_{xOy} + \rho g \int_{F_{xOy}} h dF_{xOy}.$$

Заметим, что  $h dF_{xOy} = dV_{т.д}$  — объем призмы высотой  $h$ , опирающейся на площадку  $dF$  и ограниченной сверху свободной поверхностью жидкости:

$$\int_{F_{xOy}} h dF_{xOy} = V_{т.д} \text{ — объем тела давления.}$$

**Определение. Тело давления** — призма, ограниченная снизу криволинейной поверхностью, с боков — вертикальными плоскостями, проходящими через крайние образующие поверхности, сверху — поверхностью жидкости (или ее продолжением) (рис. 1.31).

$$P_z = p_0 F_{xOy} + \rho g V_{т.д} = p_0 F_{xOy} + G_{т.д}.$$

Здесь  $G_{т.д}$  — вес жидкости в объеме тела давления.

Окончательно:

$$P_x = (p_0 + \rho g h_c) F_{zOy};$$

$$P_z = p_0 F_{xOy} + G_{т.д};$$

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2};$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{P_z}{P_x}.$$

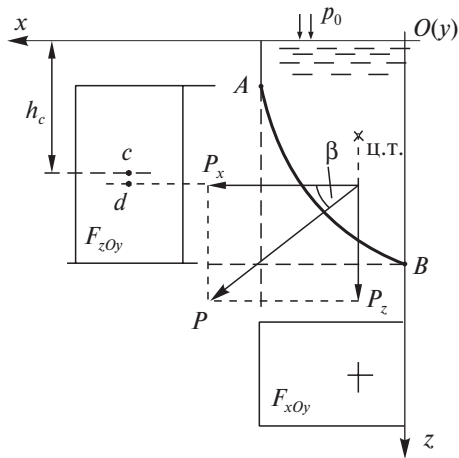


Рис. 1.31. Тело давления

Если давление на свободной поверхности равно атмосферному, то избыточное давление  $p_0 = 0$  и формулы упрощаются:

$$P_x = \rho g h_c F_{zOy};$$

$$P_z = G_{т.д.}$$

Линия действия  $P_x$  проходит через центр давления (точка  $d$ ) площади проекции  $F_{zOy}$ , а линия действия силы  $P_z$  проходит через центр тяжести тела давления.

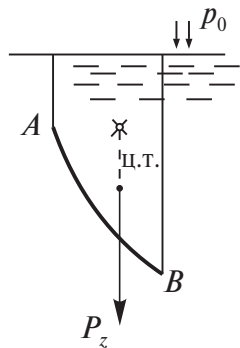


Рис. 1.32. Тело давления заполнено жидкостью

Если тело давления и жидкость находятся с одной стороны поверхности (жидкость заполняет тело давления), то сила  $P_z$  направлена вниз (рис. 1.32).

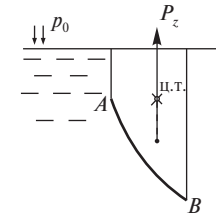


Рис. 1.33. Тело давления не заполнено жидкостью

Если тело давления и жидкость находятся с разных сторон поверхности (жидкость не заполняет тело давления), то сила  $P_z$  направлена вверх (выталкивающая сила).

### 1.1.12. Закон Архимеда

*Формулировка.* Сила давления покоящейся жидкости на тело, погруженное в нее, равна весу вытесненной телом жидкости, направлена вверх и приложена в центре тяжести вытесненного объема.

Доказательство проведем, используя вывод для силы давления на криволинейную стенку.

Рассмотрим тело, погруженное в жидкость. Условно разделим тело на верхнюю и нижнюю половины сечением  $AC$ . Сила давления на верхнюю половину направлена вниз и равна весу жидкости в теле давления  $ABCFE$  (рис. 1.34).

$$P_B = G_{ABCFE} \downarrow.$$

Сила давления жидкости на нижнюю половину направлена вверх и равна весу жидкости в теле давления  $ABCFE$ :

$$P_H = G_{ADCFE} \uparrow.$$

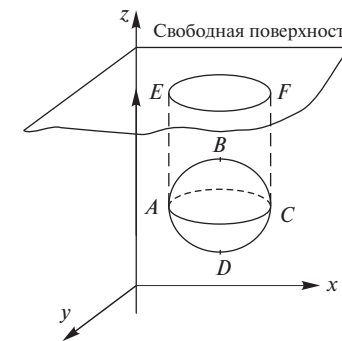


Рис. 1.34. Тело, погруженное в жидкость

$$P_A = P_H - P_B = G_{ABCD} \uparrow.$$

Сила Архимеда направлена вверх и равна весу жидкости в объеме  $ABCD$ , ч. и т.д.

#### Давление жидкости на стенки трубопровода и резервуара

В заключение раздела гидростатики рассмотрим напряжения, возникающие в стенке круглого трубопровода, находящегося под давлением жидкости.

Рассмотрим отрезок трубы длиной  $b$ . Сила давления жидкости на стенку трубопровода есть произведение давления  $p$  на площадь действия  $bd$ :  $P_{ж} = pbd$ .

Эта сила уравнивается нормальными растягивающими напряжениями в стенке трубопровода  $\sigma$ , действующими на площади  $2\delta b$ :  $P_{ст} = 2\sigma\delta b$  (рис. 1.35).

После очевидных преобразований получаем

$$\sigma = \frac{pd}{2\delta}.$$

Эта формула, связывающая нормальные напряжения в стенках трубопровода с давлением внутри него, называется *котельной формулой*. Из нее, зная допустимое напряжение на разрыв материала стенки  $[\sigma_p]$ , можно найти минимальную толщину стенки:

$$\delta_{\min} = \frac{pD}{2[\sigma_p]}.$$

При проектировании нужно учесть еще коэффициент запаса.

Выше рассматривались напряжения в стенках, направленные перпендикулярно оси трубопровода. Рассмотрим напряжения, направленные параллельно оси трубопровода.

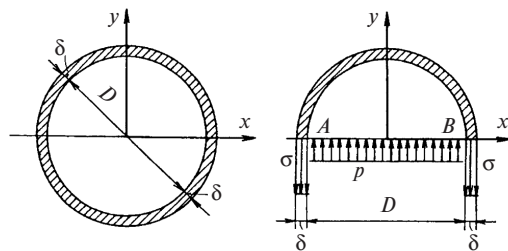


Рис. 1.35. Равновесие в стенке трубопровода

Давление вдоль оси действует на площадь  $\frac{\pi d^2}{4}$ , а напряжение в стенке распределено по площади  $\pi d \delta$ . Приравняв, получим

$$\sigma_l = \frac{pd}{4\delta}.$$

Значение напряжения в стенке, направленного вдоль оси, в 2 раза меньше, чем напряжение, направленное поперек оси. Именно поэтому сосиски при варке рвутся вдоль, а не поперек.



## Тема 1.2 ОСНОВЫ ГИДРОДИНАМИКИ

### 1.2.1. Общие сведения и краткая история развития

**Кинематика жидкости** — раздел гидромеханики, в котором изучают виды и характеристики движения жидкости, но не рассматривают силы, под действием которых это движение происходит.

**Модель жидкости** — совокупность жидких частиц, заполняющих объем без пустот и разрывов.

**Жидкая частица** — часть жидкости, малая по сравнению с объемом жидкости, но достаточно большая, чтобы пренебречь молекулярной структурой.

**Полос жидкой частицы** — центр тяжести. Движение рассматривается отдельно как движение полюса, вращение вокруг полюса и деформация частицы.

#### Методы описания движения жидкости

1. **Метод Лагранжа**<sup>1</sup> — рассматривается движение каждой частицы жидкости.

В начальный момент времени каждая частица имеет координаты  $x_0, y_0, z_0$  (рис. 1.36).

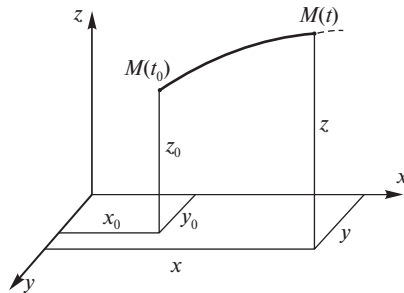


Рис. 1.36

<sup>1</sup> Лагранж Жозеф Луи (1736–1813) — французский математик и механик, член Парижской АН. Установил фундаментальный «принцип возможных перемещений» и завершил математизацию механики. Внес огромный вклад в математический анализ, теорию чисел, теорию вероятностей и численные методы; создал вариационное исчисление.

При движении частицы ее координаты зависят от времени:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y &= y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z &= z(x_0, y_0, z_0, t) \end{aligned} \right\}.$$

Здесь  $x_0, y_0, z_0, t$  — параметры Лагранжа.

Проекция скорости частицы  $u$  на оси:  $u_x = \frac{\partial x}{\partial t}$ ;  $u_y = \frac{\partial y}{\partial t}$ ;  $u_z = \frac{\partial z}{\partial t}$ .

Проекция ускорения на оси:  $a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ ;  $a_y = \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ ;  
 $a_z = \frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ .

Метод Лагранжа используется редко, только при решении специальных задач.

2. **Метод Эйлера** (метод описания движения жидкости).

Метод Эйлера изучает поля векторных или скалярных величин, оставляя в стороне вопрос о движении каждой частицы.

Движение жидкости описывается функциями, выражающими изменения скоростей в точках некоторой неподвижной области, выбранной в пределах потока. В данный момент времени в каждой точке этой области, определяемой координатами  $x, y, z$ , находится частица жидкости, имеющая скорость  $u$ . Эту скорость называют **мгновенной местной скоростью**. Совокупность мгновенных местных скоростей представляет векторное поле, называемое **полем скоростей**.

**Скалярное поле** — область пространства, каждой точке которой поставлено в соответствие значение некоторой скалярной величины. **Векторное поле** — область пространства, каждой точке которой поставлено в соответствие значение некоторой векторной величины. В общем случае оно может изменяться по времени и по координатам:

$$\bar{u} = u_x \bar{i} + u_y \bar{j} + u_z \bar{k};$$

$$\left. \begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z, t) \\ u_y &= u_y(x, y, z, t) \\ u_z &= u_z(x, y, z, t) \end{aligned} \right\}.$$

Переменные  $x, y, z, t$  называют переменными Эйлера.  
Ускорение жидкой частицы в проекциях на оси координат:

$$\frac{du_x}{dt}, \frac{du_y}{dt}, \frac{du_z}{dt}.$$

Из математики полный дифференциал функции нескольких переменных равен

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} dt + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz.$$

*Замечание.* В общем случае  $dx, dy, dz$  произвольны, однако будем полагать, что это проекции элементарного перемещения  $ds$  жидкой частицы на оси координат, тогда

$$\frac{dx}{dt} = u_x, \frac{dy}{dt} = u_y, \frac{dz}{dt} = u_z.$$

Полная производная скорости по времени (полное ускорение) в проекции на ось  $x$  и аналогично на другие оси:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z \\ \frac{du_y}{dt} &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} u_z \\ \frac{du_z}{dt} &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} u_z \end{aligned} \right\}$$

Здесь в каждой строке:

- первое слагаемое  $\frac{\partial u_x}{\partial t}$  — локальная производная (локальное ускорение);
- трехчленная сумма  $\frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z$  — конвективная производная (конвективное ускорение), поскольку она определяет ускорение частицы при изменении ее положения в поле скоростей (конвекции).

Полную производную иногда называют **субстанциальной** (от слова «субстанция») **производной**.

Если движение установившееся, т.е. не зависит от времени, то локальные производные равны нулю:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0.$$

Если движение плоское, т.е. скорости не зависят от  $z$  и установившееся, то

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y \\ \frac{du_y}{dt} &= \frac{\partial u_y}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} u_y \end{aligned} \right\}$$

Если движение одномерное, то имеем ускорение жидкой частицы (по обозначению  $u \equiv u_x$ ):

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} u.$$

Метод Эйлера описывает движение жидкости через поле скоростей, и поэтому ускорения жидкой частицы в нем выражаются специальной субстанциальной производной, а не как в технической механике.

### 1.2.2. Основные понятия кинематики

**Линия тока** — кривая, в каждой точке которой вектор скорости направлен по касательной к ней.

Для плоского движения на линии тока  $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$  из соотношения проекций скорости  $\frac{u_y}{u_x} = \operatorname{tg} \alpha$ .

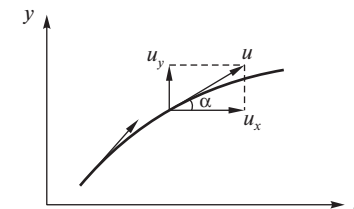


Рис. 1.37. Линия тока

Уравнение линии тока:

- на плоскости:

$$\frac{dx}{u_x(x, y, t)} = \frac{dy}{u_y(x, y, t)};$$

- для трехмерного движения

$$\frac{dx}{u_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{u_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{u_z(x, y, z, t)}.$$

Через произвольную точку потока может проходить лишь одна линия тока => Линии тока не пересекаются (исключение — особые точки потока).

**Траектория частицы** — геометрическое место последовательных положений элементарной жидкой частицы в пространстве.

Траектория частицы — это характеристика потока по методу Лагранжа, а линия тока — характеристика потока по методу Эйлера. В установившемся движении они совпадают.

**Трубка тока** — поверхность, образованная системой линий тока, проходящих через точки малого замкнутого контура.

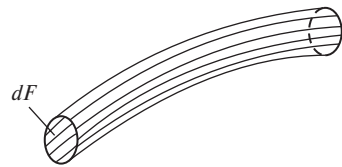


Рис. 1.38. Трубка тока

*Пояснение.* Если в сечении потока провести малый не пересекающий себя контур и через каждую точку его провести линию тока, то полученная поверхность называется трубкой тока (рис. 1.38). Если контур ограничивает бесконечно малую площадку, то получится элементарная трубка тока.

**Элементарная струйка** — жидкость, заключенная в элементарной трубке тока.

Свойства элементарной струйки.

1. При установившемся движении ее форма не меняется.
2. Является непроницаемой для жидкости.
3. Скорость в пределах сечения можно считать постоянной

**Поток жидкости** — совокупность элементарных струек, движущихся через площадь больших (конечных) размеров (с разными скоростями).

Бывают безнапорные, напорные потоки и гидравлические струи.

## Характеристики потока

1. **Живое сечение потока** — сечение, во всех точка которого линии тока, пересекающие его, нормальны к нему. Площадь живого сечения потока есть сумма площадей живых сечений составляющих его элементарных струек:  $F = \int dF$ .

2. **Смоченный периметр** — длина линии, по которой живое сечение потока соприкасается с твердыми поверхностями, ограничивающими поток. Обозначается  $\chi$  (греч. «хи»)

3. **Гидравлический радиус** — отношение площади живого сечения потока к смоченному периметру. Обозначается  $R_r$ .

Приведем примеры потоков.

*Напорный трубопровод круглого поперечного сечения* (внутренний радиус трубы  $r$ ):

- площадь живого сечения  $F = \pi r^2$ ;
- смоченный периметр  $\chi = 2\pi r$ ;
- гидравлический радиус  $R_r = \frac{F}{\chi} = \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2}$  (обратить внимание:

$$R_r = \frac{d}{4}.$$

*Открытое русло шириной  $b$  и глубиной  $h$ :*

- площадь живого сечения  $F = bh$ ;
- смоченный периметр  $\chi = b + 2h$ ;
- гидравлический радиус  $R_r = \frac{F}{\chi} = \frac{bh}{b + 2h}$ ;
- для широкого потока при  $b \gg h$  имеем  $R_r = h$ .

4. **Расход жидкости в потоке** — объемное количество жидкости, протекающее через живое сечение потока в единицу времени.

Расход через живое сечение элементарной струйки  $dQ = u dF$ .

*Пояснение.* Скорость в пределах живого сечения элементарной струйки можно считать одинаковой, равной  $u$ , площадь сечения —  $dF$ . За время  $dt$  сечение струйки переместится на  $ds = u dt$ . Прошедший через сечение объем  $dV = ds dF$ . Объемный расход

$$dQ = \frac{dV}{dt} = \frac{ds dF}{dt} = \frac{ds}{st} dF = u dF.$$

Чтобы найти расход по всему потоку, интегрируем по площади потока:

$$Q = \int_F u dF.$$

Единицы измерения объемного расхода  $[Q] = \text{м}^3/\text{с}$ , также используются л/с, м<sup>3</sup>/ч, см<sup>3</sup>/с. Очевидно:  $1 \frac{\text{л}}{\text{с}} = 1 \frac{\text{дм}^3}{\text{с}} = 10^3 \frac{\text{см}^3}{\text{с}}$ .

В гидравлике по умолчанию расход всегда объемный.

Если имеется в виду массовый расход, то это оговаривается особо. Массовый расход обозначается  $M$ , измеряется в кг/с.

Для газов (как сжимаемых жидкостей) используется массовый расход  $M = \rho Q = \rho v F$ .

5. **Средняя скорость в потоке** — частное от деления расхода на площадь живого сечения потока. Обозначается  $v$  (в отличие от местной скорости  $u$ ).

*Пояснение.* Средняя скорость в сечении представляет одинаковую для всех точек сечения воображаемую скорость, при которой через данное живое сечение проходит тот же расход, что и при действительных местных скоростях, разных в различных точках сечения.

### 1.2.3. Виды движения жидкости

1. **Неустановившееся (нестационарное)** — параметры меняются во времени:

$$u = u(x, y, z, t);$$

$$p = p(x, y, z, t).$$

При этом линии тока не совпадают с траекториями частиц.

Пример — истечение из отверстия при переменном напоре.

- 1-поток — в первый момент времени;
- 2-поток — в момент, когда точка частица из точки  $A_1$  переместилась в точку  $A_2$ .

Траектория частицы  $A_1 - A_2$ .

По характеру изменения скоростей во времени неустановившиеся движения подразделяются на быстро изменяющиеся и медленно изменяющиеся.

Медленно изменяющиеся часто называют также **квазиустановившимися** (квазистационарными). (*лат.* «квази» — якобы, почти, как бы).

2. **Установившееся (стационарное)** — параметры не меняются во времени.

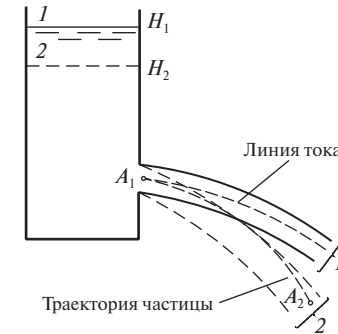


Рис. 1.39. Истечение из отверстия при переменном напоре

Локальные производные равны нулю.

$$u = u(x, y, z),$$

$$p = p(x, y, z).$$

Линии тока совпадают с траекториями частиц.

Пример — истечение из отверстия при постоянном напоре (1.40).

Установившееся движение по характеру изменения скоростей подразделяется на равномерное и неравномерное.

**Равномерное движение.** Линии тока параллельны и прямолинейны.

Размеры и форма живых сечений и средние скорости потока по его длине не меняются:

$$F_1 = F_2; v_1 = v_2 \text{ (рис. 1.41).}$$

Местные скорости в соответствующих точках живых сечений одинаковы. Ускорения при равномерном движении потока равны нулю.

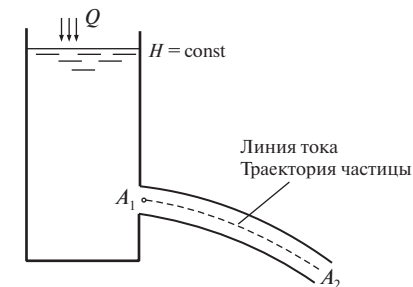


Рис. 1.40. Истечение из отверстия при постоянном напоре

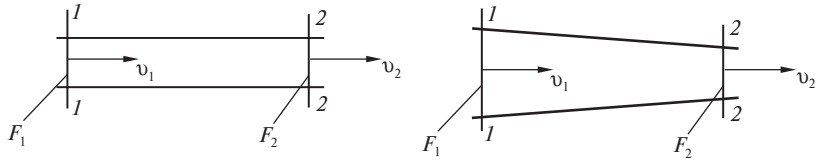


Рис. 1.41. Равномерное движение      Рис. 1.42. Неравномерное движение

**Неравномерное движение.** Линии тока не параллельны (рис. 1.42). Площади живых сечений и средние скорости переменны по длине потока. Такое движение бывает ускоренное и замедленное.

В зависимости от характера и сочетания ограничивающих поток поверхностей потоки делят на безнапорные, напорные и гидравлические струи.

**Безнапорные потоки** — ограничены частично твердой, частично свободной поверхностью.

**Напорные потоки** — ограничены твердой поверхностью, испытывающей давление потока, поток заполняет все сечение.

**Гидравлические струи** — ограничены только жидкостью или газом.

#### 1.2.4. Уравнение постоянства расхода для потока жидкости и газа

Рассмотрим установившееся движение потока жидкости или газа, ограниченного твердыми непроницаемыми стенками. Выделим в потоке два сечения 1–1 и 2–2. Массовый расход через выбранные сечения обозначим  $M_1$  и  $M_2$ .

В установившемся движении  $M_1 = M_2 = \text{idem}$ , так как в жидкости не образуется пустот и разрывов и масса не может вытекать через стенки.

*Замечание.* idem — неизменный, const — постоянный.

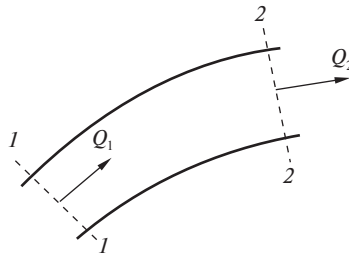


Рис. 1.43. Установившееся движение потока жидкости или газа, ограниченного твердыми непроницаемыми стенками

Вспомним, что  $M = \rho Q$  и  $Q = vF$ , и получим уравнение постоянства расхода для потока сжимаемой жидкости (газа)

$$\rho_1 v_1 F_1 = \rho_2 v_2 F_2 = \text{idem}.$$

Если жидкость несжимаема, то  $\rho_1 = \rho_2 = \rho = \text{const}$ . В этих условиях уравнение постоянства расхода для потока несжимаемой жидкости

$$v_1 F_1 = v_2 F_2 = \text{idem}.$$

Иногда эти уравнения называют **уравнениями неразрывности для потока жидкости или газа**.

#### 1.2.5. Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости в дифференциальной форме

Выделим в области, занятой движущейся жидкостью, неподвижный бесконечно малый параллелепипед (кубик), у которого ребра  $dx, dy, dz$  параллельны соответствующим осям координат (рис. 1.44).

Выделенный кубик неподвижен в пространстве, а через его грани протекает несжимаемая жидкость. Очевидно, что масса входящей за время  $dt$  жидкости равна массе выходящей за то же время жидкости.

Сначала рассмотрим грани, перпендикулярные оси  $x$ , левую и правую.

Их площадь одинакова:  $dy dz$ .

Скорость втекающей через левую грань жидкости  $u_x$  можно считать одинаковой по всей грани. Тогда за время  $dt$  через левую грань войдет масса  $dm_{\text{вх}} = \rho u_x dy dz dt$ .

По гипотезе сплошности скорость жидкости  $u_x$  есть непрерывная дифференцируемая функция своих аргументов. Тогда скорость жид-

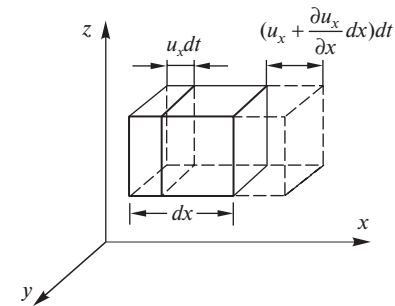


Рис. 1.44

кости на правой грани, которая отстоит от левой на расстоянии  $dx$ , составит

$$u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx.$$

Выходящая за время  $dt$  через правую грань масса

$$dm_{\text{хвых}} = \rho \left( u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx \right) dy dz.$$

Изменение массы жидкости в объеме параллелепипеда за счет входа и выхода жидкости через левую и правую грани:

$$dm_x = dm_{\text{хвх}} - dm_{\text{хвых}} = -\rho dx dy dz dt \frac{\partial u_x}{\partial x}.$$

Аналогичные выражения могут быть получены по двум другим осям, т.е. по двум другим парам граней. Общее изменение массы следует приравнять нулю:

$$dm = dm_x + dm_y + dm_z = 0;$$

$$-\rho dx dy dz dt \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0.$$

Понятно, что левая часть равна нулю, только если выражение в скобках равно нулю.

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости в дифференциальной форме имеет вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Из математики известно, что  $\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \text{div } \bar{u}$ , где  $\text{div } \bar{u}$  — дивергенция (расходимость) векторного поля в данной точке.

*Определение.* Предел отношения потока  $\Pi$  поля через некоторую замкнутую поверхность  $S$  к объему, ограниченному поверхностью  $S$ , когда  $S$  стягивается в точку  $M$ , называется *дивергенцией*, или *расходимостью*, поля в точке  $M$ .

Другая форма записи уравнения неразрывности:  $\text{div } \bar{u} = 0$ .

Попытаемся найти геометрический смысл слагаемых вида  $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ .

Рассмотрим грань  $dx$  (ребро кубика). Скорость левого ее конца —  $u_x$ , а скорость правого конца  $u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx$ . За время  $dt$  ребро не только переместится в пространстве, но и за счет разности скоростей его концов удлинится (деформируется) на величину  $\frac{\partial u_x}{\partial x} dx dt$ . Скорость удлинения ребра составит  $\frac{\partial u_x}{\partial x} dx$ , а относительная скорость деформации ребра можно найти, если поделить эту скорость на длину грани  $dx$ . Получим  $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ .

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости в дифференциальной форме можно истолковать так: сумма скоростей относительной деформации ребер жидкой частицы равна нулю. Жидкость движется так, что данная масса все время занимает один и тот же объем.

Гидродинамика изучает движение жидкости с учетом сил, вызывающих это движение.

Массовые внешние силы, действующие на жидкость, как правило, известны и заданы проекциями плотности распределения равнодействующей на оси координат  $X, Y, Z$ .

Плотность жидкости полагается постоянной и известной.

Задача гидродинамики — определить кинематические характеристики движения и возникающие напряжения, т.е. найти зависимость величин  $u_x, u_y, u_z$  и давления  $p$  от координат  $x, y, z$  и времени.

### 1.2.6. Дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости Л. Эйлера

Рассмотрим элементарный параллелепипед (кубик) жидкости с ребрами  $dx, dy, dz$ , параллельными осям координат. Эта жидкая частица движется относительно неподвижной системы координат. Точка  $A$  — полюс (в центре тяжести) (рис. 1.45).

Воспользуемся вторым законом Ньютона применительно к жидкой частице. Произведение массы частицы на ускорение ее центра масс равно сумме всех внешних сил, действующих на частицу. Силы и ускорение будем рассматривать в проекции на оси координат (на ось  $x$  рассмотрим, на остальные — аналогично).

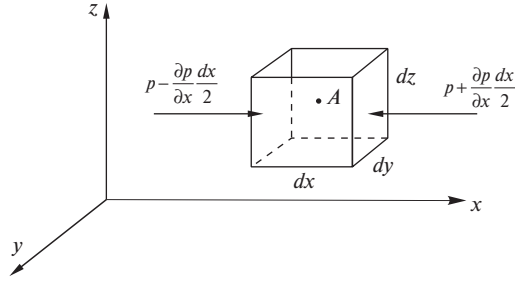


Рис. 1.45. Движение элементарной жидкой частицы

Масса частицы равна  $\rho dx dy dz$ .

Ускорение в проекции на ось  $x$  составляет  $\frac{du_x}{dt}$ .

**Поверхностные силы** — это силы нормального давления окружающей частицу жидкости. Они равны произведению давления на площадь грани. Рассмотрим грани, перпендикулярные оси  $x$ , их площадь  $dy dz$ . Пусть в полюсе давление равно  $p$ .

Давление на левую грань будет равно  $p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}$ , на правую грань —  $p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}$ .

Сила на левую грань  $\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dy dz$ , на правую грань  $\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dy dz$ .

Равнодействующая поверхностных сил в проекции на ось  $x$  составит

$$-\rho dx dy dz \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Массовые силы в проекции на ось  $x$ :  $X dm = X \rho dx dy dz$ .

Сумма сил равна произведению массы на ускорение (в проекции на ось  $x$ ):

$$X \rho dx dy dz - dx dy dz \frac{\partial p}{\partial x} = \rho dx dy dz \frac{du_x}{dt}.$$

Разделим на массу  $\rho dx dy dz$  и аналогично запишем проекции на другие оси:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{du_x}{dt} \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{du_y}{dt} \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{du_z}{dt} \end{aligned} \right\} \text{— дифференциальные уравнения движения невязкой жидкости Л. Эйлера (1755 г.).}$$

Можно развернуть выражение для ускорения, учитывая, что скорость есть функция не только времени, но и координат. При описании метода Эйлера было получено выражение (например, в проекции на ось  $x$ )

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z.$$

Дифференциальные уравнения движения невязкой жидкости в развернутом виде запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} u_z \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} u_z \end{aligned} \right\}$$

В задачах динамики неизвестными являются:

- давление  $p = p(x, y, z, t)$ ;
- проекции скорости  $u_x = u_x(x, y, z, t)$ ,  $u_y = u_y(x, y, z, t)$ ,  $u_z = u_z(x, y, z, t)$ ;
- плотность  $\rho = \rho(x, y, z, t)$ .

Для определения неизвестных используется система уравнений Эйлера. Поскольку число неизвестных превышает число уравнений, к системе добавляют уравнение неразрывности и уравнение состояния среды (зависимость плотности от давления).

Для несжимаемой жидкости уравнение состояния  $\rho = \text{const}$  и уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Общего решения полученной системы уравнений нет, существуют только частные решения для специальных задач.

### 1.2.7. Уравнение Бернулли<sup>1</sup>

1. Для элементарной струйки идеальной жидкости при установившемся движении.

В качестве исходных возьмем дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости Эйлера:

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{du_x}{dt};$$

$$Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{du_y}{dt};$$

$$Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{du_z}{dt},$$

умножим их соответственно на  $dx, dy, dz$  и сложим:

$$Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = \frac{du_x}{dt} dx + \frac{du_y}{dt} dy + \frac{du_z}{dt} dz.$$

Произведем упрощение полученного выражения.

1. Полный дифференциал давления (движение установившееся)

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz.$$

2. Преобразуем правую часть:

$$\begin{aligned} \frac{du_x}{dt} dx + \frac{du_y}{dt} dy + \frac{du_z}{dt} dz &= u_x du_x + u_y du_y + u_z du_z = \\ &= d \left( \frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}{2} \right) = d \frac{u^2}{2}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Даниил Бернулли (1700–1782) — швейцарский физик, механик и математик, один из создателей кинетической теории газов, гидродинамики и математической физики.

Окончательно получим

$$Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho} dp - d \frac{u^2}{2} = 0.$$

Первые три слагаемых называют полным дифференциалом силовой функции и обозначают  $d\Pi = Xdx + Ydy + Zdz$ . Получим

$$d\Pi - \frac{1}{\rho} dp - d \frac{u^2}{2} = 0.$$

Рассмотрим частный случай: из массовых сил действует только сила тяжести.

Следовательно,  $X = Y = 0$   $Z = -g$ .

$$-g dz - \frac{1}{\rho} dp - d \frac{u^2}{2} = 0.$$

Проинтегрируем и разделим на  $g$ :

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = C.$$

Для двух сечений элементарной струйки можно записать уравнение Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости в установившемся движении:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g}.$$

Энергетически это выражает закон сохранения полной удельной (отнесенной к единице веса) энергии жидкости в элементарной струйке.

2. Для элементарной струйки вязкой жидкости в установившемся движении.

При движении вязкой жидкости происходят потери энергии, которые должны быть учтены в уравнении Бернулли:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + \Delta h_{1-2},$$



где  $\Delta h_{1-2}$  — потери удельной энергии при перемещении из сечения 1 в сечение 2.

### 3. Для всего потока реальной жидкости.

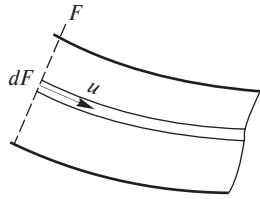


Рис. 1.46. Элементарная струйка жидкости

Выделим в сечении потока  $F$  элементарную струйку (скорость  $u$ , сечение  $dF$ ) (рис. 1.46).

Полная удельная энергия элементарной струйки в данном сечении

$$e = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}.$$

Это удельная энергия, т.е. отнесенная к единице веса.

Если ее умножить на весовой расход через рассматриваемое сечение, то получим полную энергию, протекающую через поперечное сечение струйки в единицу времени,  $dE$ .

Объемный расход  $dQ = u dF$ , весовой расход  $\rho g dQ = \rho g u dF$ .

$$dE = e \rho g u dF.$$

Полная энергия, протекающая в единицу времени через все сечение потока,

$$E = \int_F dE.$$

Удельная энергия для всего сечения потока (полная энергия отнесена к весовому расходу)

$$E_{\text{уд}} = \frac{E}{\rho g Q}.$$

Вычислим

$$E_{\text{уд}} = \frac{E}{\rho g Q} = \frac{\int_F e \rho g u dF}{\rho g Q} = \frac{\int_F \left( z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} \right) u dF}{Q}.$$

*Замечания.* 1. При установившемся движении плавно изменяющегося потока жидкости давление распределяется согласно гидростатическому закону, т.е.  $z + \frac{p}{\rho g} = \text{const}$ .

2. По определению  $\int_F u dF = Q = v F$ .

$$E_{\text{уд}} = \frac{\int_F \left( z + \frac{p}{\rho g} \right) u dF + \int_F \frac{u^2}{2g} u dF}{Q} = \frac{Q \left( z + \frac{p}{\rho g} \right) + \frac{1}{2g} \int_F u^3 dF}{Q} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{\int_F u^3 dF}{v^3 F}.$$

Окончательно

$$E_{\text{уд}} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g},$$

где  $\alpha = \frac{\int_F u^3 dF}{v^3 F}$  — коэффициент Кориолиса:

$$\alpha = \frac{\int_F u^3 dF}{v^3 F} = \frac{\int_F u^3 dF \cdot \frac{\rho}{2}}{v^3 F \cdot \frac{\rho}{2}} = \frac{\int_F \frac{u^2}{2} \cdot \rho u dF}{\frac{v^2}{2} \cdot \rho v F} = \frac{\int_F \frac{u^2}{2} dm}{\frac{m v^2}{2}} = \frac{E_{\text{кин}}^{\text{д}}}{E_{\text{кин}}^{\text{ср}}}.$$

(здесь масса жидкости, проходящая за единицу времени через поперечное сечение элементарной струйки обозначена  $dm$ ; всего потока —  $m$ ).

Коэффициент Кориолиса есть отношение кинетической энергии, протекающей в единицу времени через поперечное сечение потока при действительном распределении скоростей, к такой же энергии, посчитанной по средней по сечению скорости.

Характеризует неравномерность распределения скоростей по сечению потока и равен:

- при ламинарном режиме  $\alpha = 2$ ;
- при турбулентном режиме  $\alpha = 1,05 \div 1,15$ .

В практических расчетах обычно принимают  $\alpha \approx 1$ .

### 4. Для всего потока вязкой жидкости.

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{w1-2},$$

где  $h_{w1-2}$  — потери полной удельной энергии потока между сечениями 1 и 2. Эти потери называются *потери на трение* и обозначаются  $h_{тр}$ . Забегая вперед, отметим, что в гидравлике потери на трение в потоке рассматриваются как сумма потерь на трение по длине трубы и потерь в местных сопротивлениях:

$$h_{тр} = h_l + h_m.$$

Слагаемые уравнения Бернулли имеют размерность длины (высоты)  $L$ . Они представляют собой энергию потока (потенциальную и кинетическую), отнесенную к единице веса жидкости, так называемую удельную энергию.

Вспомним последовательность вывода уравнения Бернулли. Величина  $X$  — проекция на ось  $x$  плотности распределения равнодействующей массовых сил — имеет размерность ускорения, т.е. силы, отнесенной к единице массы. После умножения на  $dx$  (сила на путь) получили работу внешних сил (энергию), отнесенную к единице массы. При выводе разделили на  $g$  (ускорение свободного падения) и получили энергию, отнесенную к единице веса ( $G = mg$ ).

Сказанное означает, что если каждое слагаемое уравнения Бернулли умножить на вес  $mg$ , то получим ту или иную энергию элемента жидкости массы  $m$ .

1. *Геометрическая высота*  $z$  — измеряется по вертикали от плоскости сравнения до любой точки живого сечения потока (для определенности — до центра тяжести живого сечения). Очевидно  $mgz = E_{потз}$  — потенциальная энергия положения.

Вывод:  $z$  — удельная потенциальная энергия положения.

2. *Пьезометрическая высота*  $\frac{p}{\rho g}$  — высота поднятия жидкости в пьезометре. Измеряется от центра тяжести живого сечения до уровня воды в пьезометре. В лабораторных работах определяется непосредственно по шкале пьезометра, обычно проградуированном в см. При умножении на вес рассматриваемого объема жидкости, учитывая  $m = \rho V$ , имеем  $\frac{p}{\rho g} mg = pV = E_{потр}$  — потенциальная энергия давления (работа вытеснения)

Вывод:  $\frac{p}{\rho g}$  — удельная потенциальная энергия давления.

Скоростной напор  $\frac{\alpha v^2}{2g}$  — расчетная величина, определяемая по средней скорости потока. При умножении на вес рассматриваемого

объема жидкости, учитывая физический смысл коэффициента Кориолиса, имеем  $\frac{\alpha v^2}{2g} mg = \frac{E_{кин}^л}{E_{кин}^{ср}} \frac{mv^2}{2} = E_{кин}^л$  — кинетическая энергия рассматриваемого объема жидкости. Для элементарной струйки аналогично  $\frac{u^2}{2g} mg = \frac{mu^2}{2}$ .

Вывод:  $\frac{\alpha v^2}{2g}$  — удельная кинетическая энергия.

Потери  $h_{тр}$  ( $\Delta h$  для элементарной струйки) измеряются в метрах (см, мм) и представляют собой потери удельной энергии при перемещении из одного сечения в другое.

### Геометрическое и энергетическое истолкование уравнения Бернулли (рис. 1.47, табл. 1.2)

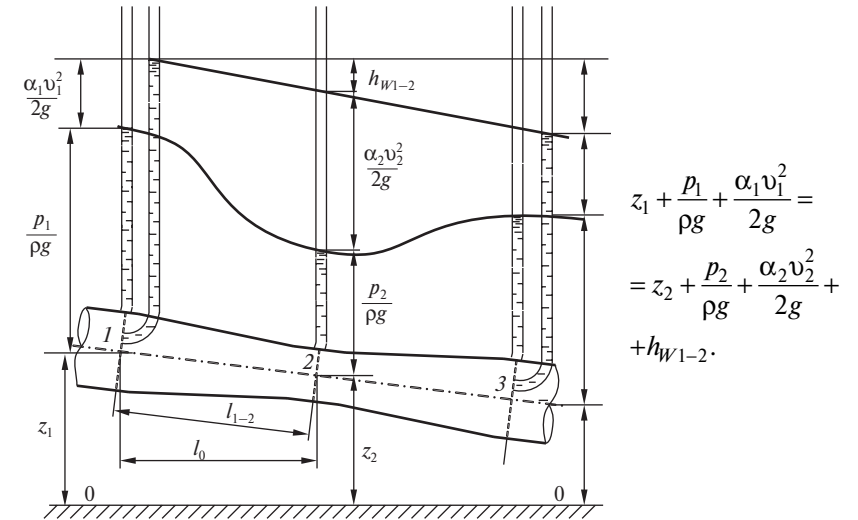


Рис. 1.47.

Таблица 1.2

#### Истолкование уравнения Бернулли

Величина	Геометрически	Энергетически
$z$	Геометрический напор = = Высота центра тяжести сечения от плоскости сравнения = = Образует геометрический уклон	Удельная потенциальная энергия положения (т.е. удельная это отнесенная к весу)

Величина	Геометрически	Энергетически
$\frac{p}{\rho g}$	Пьезометрическая высота = = Высота уровня жидкости в пьезометре от центра тяжести сечения	Удельная потенциальная энергия давления
$z + \frac{p}{\rho g}$	Пьезометрический напор = = Высота уровня жидкости в пьезометре от плоскости сравнения = = Образует пьезометрическую линию = = Образует пьезометрический уклон	Полная удельная потенциальная энергия потока в данном сечении
$\frac{\alpha v^2}{2g}$	Скоростной напор = насколько полный напор выше пьезометрического = = расстояние по вертикали между линией полного напора и пьезометрической линией = = для равномерного течения постоянен, а линии параллельны	Удельная кинетическая энергия. Кинетическая энергия $E_k = \frac{mv^2}{2}$ Вес $G = mg$ $\frac{E_k}{G} = \frac{v^2}{2g}$
$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v^2}{2g}$	Полный гидродинамический напор = уровень в трубке полного напора, отсчитанный от плоскости сравнения = образует линию полного напора = образует гидравлический уклон	Полная удельная энергия потока в данном сечении
$h_{w1-2}$	Снижение линии полного напора при переходе от сечения 1 к сечению 2. Для идеальной жидкости линия полного напора горизонтальна	Потери полной удельной энергии потока за счет вязкости (диссипация энергии). Складываются из потерь по длине и потерь в местных сопротивлениях: $h_{w1-2} = h_l + h_m$

## 1.2.8. Понятие об уклонах

**Уклон** — изменение величины по длине потока. Может быть определен в данном сечении или средний по длине.

Рассматриваем средние уклоны при переходе от сечения 1 к сечению 2.

**Геометрический уклон** (геодезический) — изменение геометрической высоты по длине потока:

$$J_{\text{геом}} = \frac{z_1 - z_2}{l_0}$$

**Пьезометрический уклон** — изменение пьезометрической высоты по длине потока. Может менять знак:

$$J_{\text{пъез}} = \frac{\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g}\right)}{l_{1-2}}$$

**Гидравлический уклон** — изменение полного напора по длине потока. Не может быть отрицателен (потери не отрицательны). Для идеальной жидкости равен нулю:

$$J = \frac{\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}\right)}{l_{1-2}} = \frac{h_{w1-2}}{l_{1-2}}$$

**Правила написания уравнения Бернулли при решении задач.**

1. Определить, для элементарной струйки или для всего потока записывается уравнение.

2. Указать, для идеальной или для вязкой жидкости записывается уравнение.

3. Выбрать и указать на чертеже два сечения, для которых записывается уравнение. Векторы местных скоростей в них должны быть параллельны.

4. Выбрать и обозначить на чертеже плоскость сравнения — горизонтальную плоскость, обычно совпадающую с центром тяжести нижерасположенного сечения.

5. Записать полную форму уравнения Бернулли и затем, если возможно, приравнять к нулю отдельные члены.

### 1.2.9. Дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости Навье–Стокса

**Напряжения в движущейся вязкой жидкости.** В невязкой жидкости действуют только нормальные напряжения.

При движении вязкой жидкости в ней возникают не только нормальные, но и касательные напряжения, так как вязкая жидкость обладает способностью оказывать сопротивление относительному сдвигу своих слоев. Эти напряжения зависят не только от координат точки, но и от ориентации площадки действия.

Рассмотрим элементарный параллелепипед с ребрами  $dx, dy, dz$ , выделенный в движущейся жидкости (рис. 1.48).

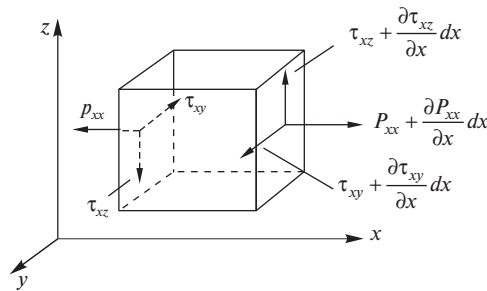


Рис. 1.48. Элементарный параллелепипед в движущейся жидкости

Обозначим сопротивления на гранях. Первый индекс — направление оси, к которой перпендикулярна данная грань. Второго индекса — направление действия напряжения. Считая напряжение непрерывным, используя разложение в ряд Тейлора, определим напряжения на гранях, удаленных от начала координат (табл. 1.3). На рисунке показаны только напряжения, действующие на левую и правую грани.

Таблица 1.3

Напряжения на гранях элементарного параллелепипеда

Грань	Нормальное напряжение	Касательное напряжение	
Левая	$p_{xx}$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$
Правая	$p_{xx} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} dx$	$\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx$	$\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx$
Задняя	$p_{yy}$	$\tau_{yx}$	$\tau_{yz}$

Грань	Нормальное напряжение	Касательное напряжение	
Передняя	$p_{yy} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} dy$	$\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$	$\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy$
Нижняя	$p_{zz}$	$\tau_{zx}$	$\tau_{zy}$
Верхняя	$p_{zz} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} dz$	$\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz$	$\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz$

Отметим без доказательства, что касательные напряжения на взаимно перпендикулярных площадках, направленные по нормали к линии пересечения этих площадок, равны друг другу:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{xz} = \tau_{zx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

Составим уравнение движения массы жидкости, заключенной в элементарном параллелепипеде. Сумма сил, действующих на жидкую частицу, равна произведению ее массы на ускорение. Силы — массовые и поверхностные.

Проекция суммарной массовой силы на ось  $x$  есть произведение плотности распределения равнодействующей массовых сил  $X$  на массу частицы  $\rho dx dy dz$ :

$$X \rho dx dy dz.$$

Поверхностные силы действуют на все шесть граней. Они равны произведению соответствующего напряжения (нормального или касательного) на площадь грани. Запишем только силы, проекция которых на ось  $x$  не равна нулю.

Левая грань и правая:

$$-p_{xx} dy dz + \left( p_{xx} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} dx \right) dy dz = \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} dx dy dz.$$

Задняя грань и передняя:

$$-\tau_{yx} dx dz + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy dx dz.$$

Нижняя грань и верхняя:

$$-\tau_{zx} dx dy + \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz dx dy.$$

Масса на ускорение:

$$\rho dx dy dz \frac{du_x}{dt}.$$

После сокращения и деления на массу получим

$$X + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) = \frac{du_x}{dt}.$$

Без доказательства укажем: в вязкой жидкости сумма нормальных напряжений по трем взаимно перпендикулярным граням не зависит от ориентации этих площадок. Введем понятие давления в движущейся жидкости, численно равное среднему нормальному напряжению:

$$p = \frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3}.$$

Выразим нормальные напряжения на грань через давление и добавочное вязкое напряжение:

$$p_{xx} = -p + p_{xxv}.$$

По закону Ньютона, распространяя его на пространственное движение, вязкое напряжение составит:

$$p_{xx2} = 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right); \quad \tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right).$$

Произведем необходимые подстановки. Упростим, используя уравнение неразрывности в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0;$$

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) = \frac{du_x}{dt}.$$

Учтем, что  $\frac{\mu}{\rho} = \nu$  и по аналогии запишем проекции на другие оси.

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) &= \frac{du_x}{dt} \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) &= \frac{du_y}{dt} \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) &= \frac{du_z}{dt} \end{aligned} \right\} \text{— уравнения Навье—} \\ \text{Стокса для неустановившегося движения} \\ \text{несжимаемой вязкой} \\ \text{жидкости.}$$

Упростим запись, используя оператор Лапласа

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u_x &= \frac{du_x}{dt} \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 u_y &= \frac{du_y}{dt} \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 u_z &= \frac{du_z}{dt} \end{aligned} \right\}.$$

Субстанциальное ускорение в правой части можно раскрыть как сумму локального и конвективного:

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z$$

(аналогично по другим осям).

Эти уравнения совместно с уравнением неразрывности и уравнением состояния образуют замкнутую систему, которая, однако, не имеет общих решений.

### 1.2.10. Общая интегральная форма уравнения количества движения и момента количества движения

В основу гидродинамики как раздела гидромеханики положены четыре основных закона механики:

- закон сохранения массы;
- закон изменения количества движения (импульса);
- закон изменения момента количества движения;
- закон изменения кинетической энергии.

Эти законы формулируются для объемов жидкости конечных размеров.

**Закон сохранения массы.** При движении жидкого объема его масса остается неизменной:  $\frac{dm}{dt} = 0$ . Из этого вытекают уравнения неразрывности в дифференциальной форме и для потока жидкости.

**Закон изменения количества движения.** Изменение количества движения жидкого объема за единицу времени равно сумме всех приложенных к нему внешних (массовых и поверхностных) сил.

В векторной форме  $d(m\vec{v}) = \vec{P}dt$  или  $\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{P}$ .

**Закон изменения момента количества движения.** Изменение момента количества движения жидкого объема относительно некоторой неподвижной точки за единицу времени равно сумме моментов всех внешних (массовых и поверхностных) сил, действующих на этот объем.

**Закон изменения кинетической энергии.** Изменение кинетической энергии жидкого объема за единицу времени равно мощности всех внешних и внутренних (поверхностных и массовых) сил, действующих на этот объем жидкости.

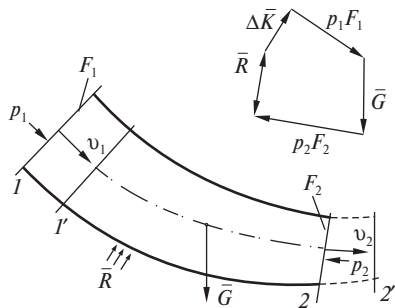


Рис. 1.49. Многоугольник сил

Рассмотрим закон изменения количества движения применительно к потоку жидкости.

Жидкость несжимаема:  $\rho_1 = \rho_2$ .

Движение установившееся:  $Q_1 = Q_2$ .

На выделенный объем действуют массовая сила веса, поверхностные силы давления  $P_1 = p_1F_1$ ,  $P_2 = p_2F_2$  и реакция стенок канала  $\vec{R}$ .

За время  $dt$  жидкость из сечения 1 переместится в сечение 1', а из сечения 2 — в сечение 2' (рис. 1.49).

Изменение количества движения

$$\Delta \vec{K} = \vec{K}_{1'2'} - \vec{K}_{12} = (\vec{K}_{1'2'} + \vec{K}_{22'}) - (\vec{K}_{11'} + \vec{K}_{1'2}) = \vec{K}_{22'} - \vec{K}_{11'}.$$

Изменение количества движения равно разности количества движения вышедшей массы и вошедшей массы.

Входящая масса  $dm_1 = \rho dV_1 = \rho F_1 v_1 dt = \rho Q dt$ .

Выходящая масса  $dm_2 = \rho dV_2 = \rho F_2 v_2 dt = \rho Q dt$ .

Изменение количества движения за единицу времени

$$\Delta \vec{K} = dm_1 v_1 - dm_2 v_2 = \rho Q (v_2 - v_1).$$

Закон изменения количества движения:

$$\Delta \vec{K} = \vec{P}_1 + \vec{G} + \vec{P}_2 + \vec{R}.$$

При изображении многоугольника сил (см. рис. 1.49) следует правильно выбирать их направления. Вес действует вниз, силы давления нормальны к сечениям и действуют внутрь объема,  $\Delta \vec{K} = \vec{K}_{22'} - \vec{K}_{11'}$ , следовательно  $\Delta \vec{K} + \vec{K}_{11'} = \vec{K}_{22'}$ , а направления векторов количества движения совпадают с направлениями скоростей, сила реакции обеспечивает поворот.

Как правило, неизвестной является реакция стенок канала  $\vec{R}$ . Векторное уравнение решается обычно через проекции на оси координат.

### 1.2.11. Приборы для измерения скорости и расхода

Для измерения местных скоростей применяются гидродинамические трубки, термоанемометры и гидрометрические вертушки.

Определение скоростей с помощью гидродинамических трубок основано на измерении скоростного напора  $u^2/2g$ , равного разности полного  $P_2/\rho g$  и статического напоров в потоке. Полный напор из-

меряется трубкой полного напора, представляющей собой изогнутую под прямым углом трубку, обращенную своим открытым концом против потока (рис. 1.50).

Из уравнения Бернулли, записанного для 1-го и 2-го сечений элементарной струйки, следует

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g},$$

откуда  $u = \sqrt{\left(\frac{p_2}{\rho g} - \frac{p_1}{\rho g}\right) 2g} = \sqrt{2g\Delta h}$ .

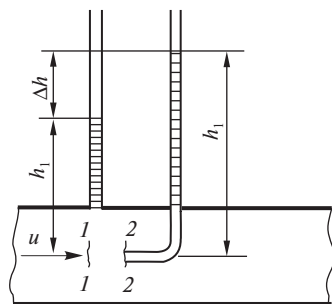


Рис. 1.50. Трубки полного и статического напоров

Трубка полного напора и статического напора, конструктивно объединены в одном приборе и представляют собой гидродинамическую трубку. Пито–Прандтля (рис. 1.51). Приемником полного давления  $P_2 = P_1 + ((\rho u^2)/2)$  является отверстие 1 осевого канала цилиндра, сообщающееся через трубку полного напора 6, помещенную в державке, со штуцером 9. Для приема статического давления  $P_1$  на боковой поверхности цилиндра выполнены канавки 7, закрытые кожухом 4 с прорезями 3.

Используются также гидродинамические трубки иного конструктивного оформления. Местная скорость (скорость в точке) определяется по формуле

$$u = \xi \sqrt{2g\Delta h},$$

где  $\xi$  — поправочный коэффициент, определяемый путем тарирования трубки.

Гидродинамические трубки применимы для измерения скоростей более 1 м/с.

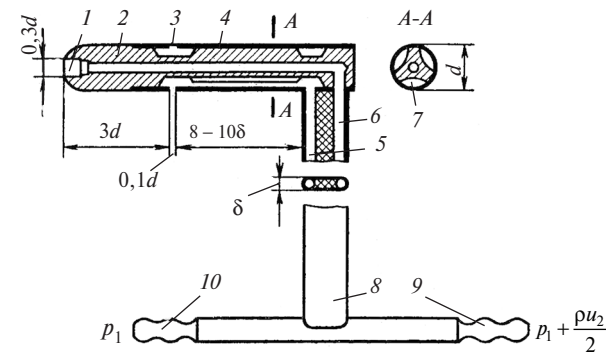


Рис. 1.51. Гидродинамическая трубка Пито–Прандтля со сферическим носком

### Термоэлектрические анемометры

Действие термоанемометров основано на использовании зависимости между электрическим сопротивлением проводников и их температурой. Термоанемометр представляет собой проволоку из инертного металла (платины, вольфрама, никеля), припаянную к двум электродам, закрепленным в державке. Толщина проволоки 0,005–0,01 мм, длина 1–3 мм. Проволока помещается в поток и нагревается электрическим током. Поток, обтекающий проволоку, охлаждает ее, электрическое сопротивление проволоки при этом изменяется на некоторую величину в зависимости от скорости потока; фиксируя это изменение с помощью соответствующих электрических схем, можно определить величину местной скорости потока, нормальной к проволоке (рис. 1.52).

Гидрометрическая вертушка (рис. 1.52) представляет собой лопастное колесо, помещенное в поток и приводимое им во вращение.

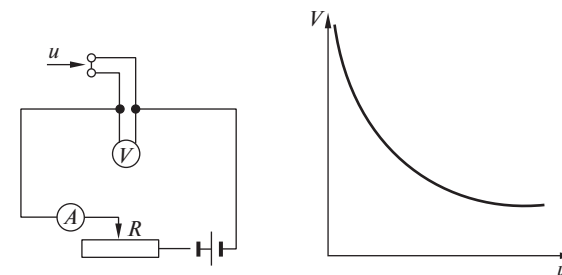


Рис. 1.52. Схема электрической цепи и тарировочная кривая термоанемометра, работающего по методу постоянной силы тока:  $u$  — скорость потока;  $V$  — напряжение тока

В процессе измерения фиксируется скорость набегающего потока. Вертушка предварительно тарируется и снабжается тарировочным графиком  $u = f(h)$ .

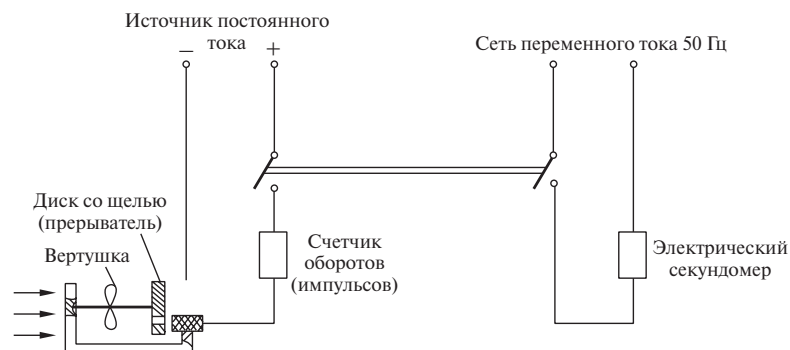


Рис. 1.53. Гидрометрическая вертушка

### Приборы для измерения расхода и количества жидкости

Средство измерения расхода или количества жидкости называется преобразователем расхода. Различают следующие преобразователи расхода.

#### 1. По измерению расхода или количества среды:

- расходомер — прибор, измеряющий мгновенный расход вещества (т.е. массу или объем вещества, протекающую через сечение в единицу времени);
- счетчик количества (или просто счетчик) — устройство, измеряющее массу или объем вещества, прошедшие по трубопроводу за определенный интервал времени (аналог — бытовые электросчетчики);
- расходомер-счетчик — устройство для измерения расхода и количества вещества.

2. По типу измеряемой среды различают расходомеры жидкостные, газа и пара. Одна и та же модель расходомера не может использоваться для измерения разных сред — слишком различны физические параметры.

Под *жидкостью* понимаются любые типы капельных жидкостей (вода, мазут, нефть и др. технические жидкости)

Под *газом* понимается природный (метан) или технический (кислород, водород и т.п.) газ, а также сжатый воздух.

Пар может использоваться сухой насыщенный или перегретый. Для влажного пара корректное измерение расхода невозможно. Особо оговариваются максимальные давление и температура пара.

#### 3. По измеряемым параметрам:

- объемные — измеряют объемный расход — таких подавляющее большинство;
- массовые — измеряют массовый расход непосредственно без пересчета по плотности (пример — кориолисовые);
- объемно-массовые — массовый расход рассчитывается по измеренному объемному расходу через плотность жидкости, рассчитанную по давлению и температуре.

4. По выходному сигналу — с аналоговым, импульсным или цифровым выходом.

#### 5. По принципу действия:

- мерные емкости (тарированный резервуар, бак);
- мерные водосливы (поплавковые расходомеры);
- с переменной площадью сечения — ротаметры;
- переменного перепада давления — диафрагмы, сопла и трубы Вентури;
- тахометрические;
- электромагнитные (индукционные);
- ультразвуковые;
- вихревые;
- кориолисовые.

**Мерные емкости.** При объемном способе измерения расхода жидкости жидкость поступает в тщательно тарированный резервуар (мерник), при этом фиксируется время наполнения  $t$  определенного объема  $V$ . Объемный расход равен

$$Q = \frac{V}{t}.$$

Способ измерения расхода с помощью мерного резервуара является наиболее точным. Он широко применяется в лабораторной практике для опытных исследований и проверок измерителей расхода.

**Мерные водосливы** служат для измерения расхода воды в лабораториях и на оросительных системах. Пример — треугольный водослив с тонкой стенкой в лабораторных работах.

**Ротаметр** (рис. 1.54)) представляет собой коническую прозрачную стеклянную трубку 1 (угол конусности от  $35'$  до  $5^\circ 35''$ ) с помещенным внутри нее поплавком 2.



Ротаметр устанавливается на вертикальном участке трубопровода. Если сила, действующая на поплавок, превышает вес поплавка, то поплавок всплывает, увеличивая площадь щели для протекания жидкости; при этом сила, действующая на поплавок со стороны жидкости, уменьшается. Когда гидродинамическая сила становится равной весу поплавка, его всплывание прекращается.

Измерение расхода ротаметром основывается на использовании связи между расходом и положением поплавка. Характер этой связи зависит от угла конусности трубки, формы и веса поплавка, вязкости жидкости и обычно устанавливается путем индивидуального тарирования ротаметров.

Ротаметры применяют для измерения расходов жидкости и газа в широком диапазоне, начиная от малых, порядка  $0,1 \text{ см}^3/\text{с}$ . Погрешность измерений не превышает 6%. Недостатком их является зависимость показаний от физических свойств жидкости и невозможность измерять переменные во времени расходы.

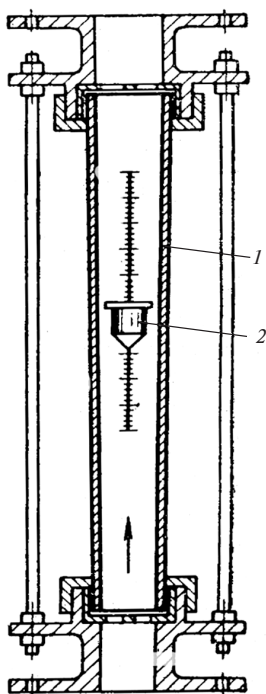


Рис. 1.54. Ротаметр

**Расходомерами переменного перепада давления** называются измерительные комплексы, основанные на зависимости перепада давления, создаваемого устройством, установленным в трубопроводе, от расхода жидкости или газа.

Состав комплекса:

- 1) Первичный преобразователь расхода (гидравлические сопротивления, трубка Пито);
- 2) Первичные линии связи — соединительные трубки и вспомогательные устройства на них (отстойные сосуды, воздухоотборники);
- 3) Первичный измерительный прибор — дифманометр;
- 4) Вторичные линии связи (электрические провода);
- 5) Электронный преобразователь (записывающий, показывающий)

Существуют различные расходомеры переменного перепада давления:

- с сужающим устройством — стандартные — диафрагма, сопло, труба Вентури — не требуют индивидуальной градуировки;
- с гидравлическим сопротивлением — например, шариковая набивка;
- с напорным устройством — принцип действия основан на измерении перепада давления, возникающего при переходе кинетической энергии в потенциальную. Пример — трубка Пито—Прандтля или осредняющие напорные трубки, установленные поперек трубопровода;
- центробежные расходомеры — основаны на зависимости расхода от перепада давления, образующегося на закругленном элементе трубопровода (колоне) под действием центробежных сил.

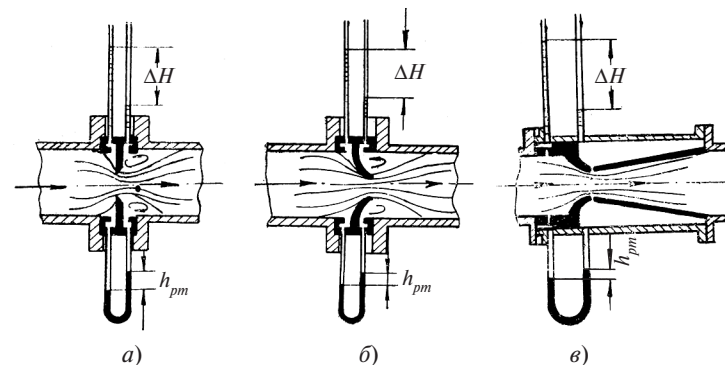


Рис. 1.55. Расходомеры переменного перепада давления:  
а — диафрагма; б — сопло; в — труба Вентури

Расход жидкости определяется по формуле

$$Q = \mu F \sqrt{2g\Delta H} \text{ или } Q = \mu F \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}},$$

где  $\mu$  — коэффициент расхода;  $F$  — площадь проходного сечения сужающего устройства;  $\Delta H$  — разность статических напоров;  $\Delta p$  — разность давлений до и после сужающего устройства;  $\rho$  — плотность измеряемой среды (зависит от температуры и давления)

**Скоростные счетчики** чаще всего применяют для контроля количества воды, расходуемой в системах водоснабжения. Различают скоростные счетчики с вертикальной крыльчаткой (крыльчатые) и с винтовыми вертушками (турбинные).

Крыльчатый счетчик состоит (рис. 1.56) из крыльчатки 1 и передаточного механизма 8, связанного со счетным механизмом 9. Передаточный и счетный механизм представляет собой ряд последовательно зацепленных шестерен.

Расход жидкости определяется отношением прошедшего через счетчик объема жидкости  $V$  за определенное время к времени  $t$ .

$$Q = \frac{V}{t}.$$

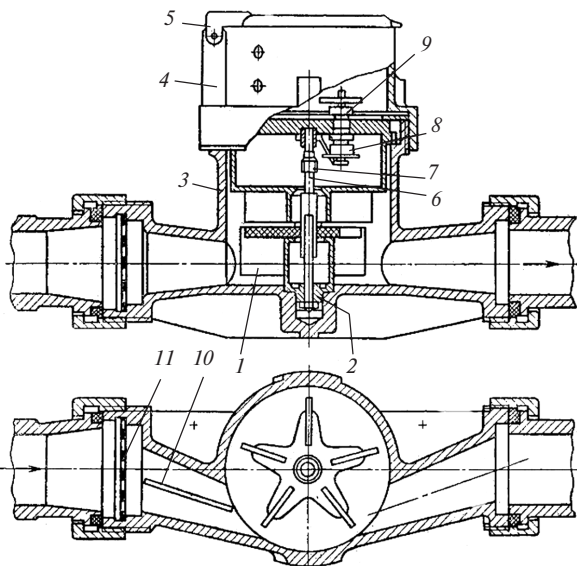


Рис. 1.56. Счетчик с вертикальной крыльчаткой

## Тема 1.3

# ДВИЖЕНИЕ РЕАЛЬНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

### 1.3.1. Гидравлические сопротивления

Рассмотрим трубопровод, состоящий из нескольких прямых участков постоянного диаметра и местных сопротивлений: обратного клапана, задвижки и двух плавных поворотов на  $90^\circ$ .

Для сечений  $1-1$  и  $2-2$  потока (рис. 1.57) может быть записано уравнение Бернулли, из которого выразим потери полного напора:

$$h_{W1-2} = \left( z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} \right) - \left( z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} \right).$$

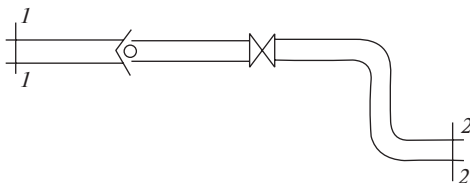
Это общие потери от сечения  $1-1$  до сечения  $2-2$ , которые могут рассматриваться как сумма потерь по длине прямолинейных участков постоянного диаметра и потерь в местных сопротивлениях:

$$h_{W1-2} = h_{l-2} + h_m.$$

Такое разделение — основное допущение при расчете потерь в трубопроводах.

Забегая вперед, отметим, что эти два типа потерь рассчитываются отдельно.

Потери по длине по экспериментальной формуле Дарси–Вейсбаха<sup>1</sup>



**Рис. 1.57.** Трубопровод постоянного диаметра с местными сопротивлениями

<sup>1</sup> Юлиус Людвиг Вейсбах (1806–1871) — саксонский математик и механик-гидравлик. Вывел эмпирическую формулу, определяющую потери напора или потери давления при развитом турбулентном течении несжимаемой жидкости на гидравлических сопротивлениях.

$$h_i = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g},$$

где  $\lambda$  — коэффициент гидравлического сопротивления (коэффициент Дарси).

Потери в местных сопротивлениях есть сумма отдельных потерь, каждая из которых вычисляется по формуле Вейсбаха:

$$h_M = \sum_{i=1}^n \zeta_i \frac{v^2}{2g},$$

здесь  $\zeta_i$  — коэффициент местного сопротивления номер  $i$ , определяется из справочников ( $\zeta$  — «дзета», не путать  $\xi$  — «кси»).

**Местные сопротивления** — места потока, в которых происходит резкая его деформация, скорость изменяется по величине и по направлению.

Для того чтобы измерить потери напора в местном сопротивлении поступают следующим образом:

1) производят замер потерь напора  $\Delta h_1$  на местном сопротивлении, причем пьезометры устанавливают не рядом с ним, а на расстоянии не менее  $10d$ , где поток невозмущенный (рис. 1.58, а);

2) производят замер потерь  $\Delta h_2$  на участке того же трубопровода длиной  $L-l$  без местного сопротивления (рис. 1.58, б);

3) вычисляют  $h_M = \Delta h_1 - \Delta h_2$ .

Учитывая, что  $h_M = \zeta \frac{v^2}{2g}$ , находят коэффициент местного сопротивления:

$$\zeta = h_M \frac{2g}{v^2}.$$

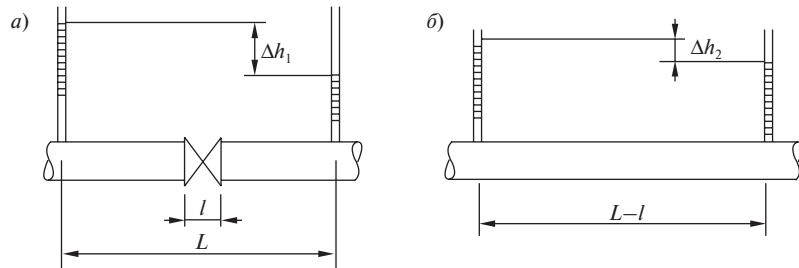


Рис. 1.58. Потери напора в местном сопротивлении

Такой способ замера позволяет выделить отдельно влияние местного сопротивления.

Расчетным путем найти коэффициент местного сопротивления не удастся, единственное исключение — **внезапное расширение потока**.

Рассмотрим внезапное расширение круглого трубопровода, выделим сечения 1-1 и 2-2 (рис. 1.59).

Площади живых сечений потока  $F_1$  и  $F_2$ , скорости  $v_1$  и  $v_2$ .

Составим уравнение Бернулли для сечений 3-3 и 2-2, принимая скорость потока в сечении 3-3 равной  $v_1$  и учитывая, что  $z_1 = z_2 = 0$ :

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{в.р.},$$

где  $h_{в.р.}$  — потери напора на внезапном расширении.

Принимаем  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ , находим потери  $h_{в.р.} = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g}$ .

Применим к массе жидкости, заключенной между сечениями 3-3 и 2-2, теорему о количестве движения, согласно которой изменение количества движения в единицу времени равно сумме внешних сил. Допускаем, что во всем сечении 3-3 действует давление  $p_1$ :

$$\rho F_2 v_2 (v_2 - v_1) = (p_1 - p_2) F_2.$$

Отсюда выразим  $\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{v_2(v_2 - v_1)}{g}$  и подставим в выражение

для потерь:

$$h_{в.р.} = \frac{v_2(v_2 - v_1)}{g} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} = \frac{2v_2^2 - 2v_2v_1 + v_1^2 - v_2^2}{2g} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}.$$

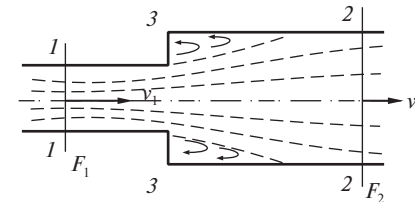


Рис. 1.59

Мы получили формулу Борда, устанавливающую, что потери напора при внезапном расширении потока пропорциональны квадрату «потерянной» скорости<sup>1</sup>.

Приведем это выражение к виду формулы Вейсбаха для местных сопротивлений:

$$h_{в.р} = \frac{v_1^2}{2g} \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g}.$$

По уравнению неразрывности для потока  $v_1 F_1 = v_2 F_2$  т.е.  $\frac{v_2}{v_1} = \frac{F_1}{F_2}$ .

Коэффициент сопротивления (отнесенный к скорости до расширения)

$$\zeta_1 = \left(1 - \frac{F_1}{F_2}\right)^2.$$

В предельном случае, когда  $F_2 \gg F_1$ , имеем выход из трубопровода в резервуар больших размеров,  $\zeta_{вых} = 1$ .

Так как скорость до расширения  $v_1$  не равна скорости после него  $v_2$ , то для данного местного сопротивления существует два различных значения коэффициента сопротивления, расчет потерь напора с использованием которых, разумеется, приводит к одинаковому результату:

$$h_{в.р} = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g}.$$

Легко показать, что  $\zeta_2 = \left(\frac{F_2}{F_1} - 1\right)^2$ .

### Взаимное влияние местных сопротивлений

**Плавный поворот потока.** При изменении направления потока появляются центробежные силы, направленные от центра кривизны к внешней стенке трубы (рис. 1.60).

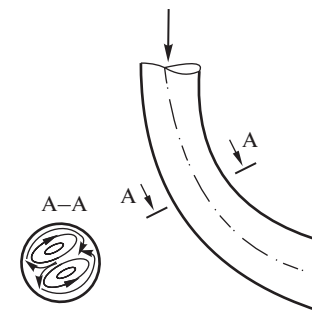


Рис. 1.60. Плавный поворот потока

Давление в пределах поворота у внешней стенки больше, чем у внутренней. Соответственно, скорости у внешней стенки меньше, чем у внутренней. Вследствие этого вдоль боковых стенок трубы, вблизи поверхности которых скорость невелика, будет происходить движение жидкости от внешней стенки к внутренней, т.е. возникает поперечная циркуляция в потоке.

В результате образуется так называемый парный (двойной) вихрь, который накладывается на поступательное движение. Линии тока становятся винтообразными. Эпюра скоростей в связи с этим перестраивается.

Если местные сопротивления расположены на близком расстоянии друг от друга, то они влияют друг на друга.

Так например, при последовательном соединении двух отводов (отвод-поворот на 90°, рис. 1.61) суммарный коэффициент сопротивления:

- в случае а)  $\zeta_{сум} = 1,4\zeta_{90}$ ;
- а в случае б)  $\zeta_{сум} \approx 3\zeta_{90}$ .

Здесь  $\zeta_{90}$  — коэффициент сопротивления изолированного поворота на 90°, зависящий от отношения радиуса поворота  $R$  к диаметру трубопровода  $d$ . В справочниках приводятся коэффициенты сопро-

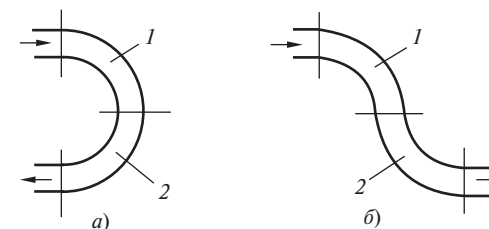


Рис. 1.61. Последовательное соединение двух отводов

<sup>1</sup> Жан Шарль Борда (1733–1799) — французский физик и геодезист, член Парижской АН. Участвовал в разработке метрической системы мер. Предложил особую насадку, названную его именем, для увеличения расхода жидкости, вытекающей из сосуда, при заданном сечении выходного отверстия. Доказал носящую его имя теорему в гидравлике об ударе струи жидкости или газа.

тивления для отвода без учета потерь по длине трубы, которые рассчитываются дополнительно, причем длина считается по средней линии потока.

**Длина зоны влияния** опреляется по формуле

$$l_{\text{вл}} = 0,5d \frac{\zeta_{\text{м.кв}}}{\lambda},$$

где  $d$  — диаметр трубопровода;  $\zeta_{\text{м.кв}}$  — коэффициент потерь для данного местного сопротивления в квадратичной области;  $\lambda$  — коэффициент Дарси.

В обычных условиях длина прямолинейного участка трубопровода между сопротивлениями, равная  $10d$ , оказывается достаточной для стабилизации потока. В ответственных случаях, например при установке расходомерных устройств, эта длина определяется правилами установки и составляет  $(12-20)d$ .

**Эквивалентная длина.** Для упрощения расчета трубопроводов часто используют понятие об эквивалентной длине местного сопротивления, т.е. об участке данного трубопровода такой длины, на которой потери напора по длине равны местной потере напора:

$$h_{\text{м}} = h_{\text{дл.экв}} \Rightarrow \zeta_{\text{м}} \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{l_{\text{экв}}}{d} \frac{v^2}{2g} \Rightarrow \frac{l_{\text{экв}}}{d} = \frac{\zeta_{\text{м}}}{\lambda}.$$

В гидравлически длинных трубопроводах (или просто длинных) потери по длине настолько превышают потери в местных сопротивлениях, что последние не вычисляют, а принимают как некоторую часть потерь по длине (добавляют 5–10%).

### 1.3.2. Основное уравнение равномерного движения жидкости

Рассмотрим установившееся напорное движение несжимаемой жидкости в трубе круглого сечения постоянного диаметра.

Из постоянства диаметра следует

$$F_1 = F_2 = F.$$

Средняя скорость потока по определению есть отношение объемного расхода к площади живого сечения. Расход в рассматриваемых сечениях одинаков, значит,  $v_1 = v_2 = v$ .

$z_1$  и  $z_2$  — ординаты центров тяжести выделенных сечений, отсчитанные от плоскости сравнения (рис. 1.62).

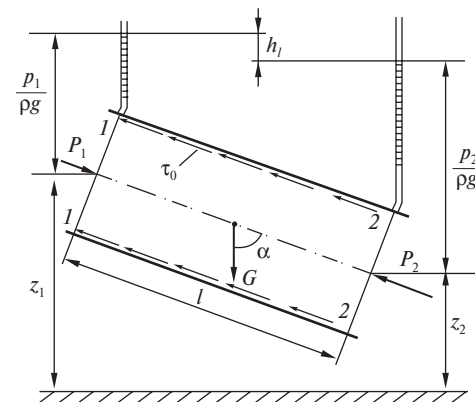


Рис. 1.62. Равномерное движение жидкости

Запишем уравнение Бернулли для сечений 1–1 и 2–2 потока вязкой жидкости.

Плоскость сравнения обозначена на чертеже 0–0.

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_l.$$

Допустим, что распределение скоростей в сечениях одинаково ( $\alpha_1 = \alpha_2$ ), тогда

$$\left( z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left( z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right) = h_l.$$

Сумма действующих на выделенный объем сил равна произведению его массы на ускорение. В данном случае жидкость движется без ускорения; значит, сумма сил, действующих на выделенный объем, равна нулю.

На объем жидкости между сечениями 1–1 и 2–2 действуют:

- массовые силы — сила веса  $G = \rho g V = \rho g F l$ ;
- поверхностные силы:
- давление слева  $P_1 = p_1 F$ ;
- давление справа  $P_2 = p_2 F$ ;
- силы нормального давления стенок (взаимно уравновешиваются);
- сила вязкого трения, обусловленная касательными напряжениями  $\tau_0$ , действующими на площади  $F_{\text{тр}} = l \chi$  (длина участка трубы, умноженная на смоченный периметр).

Сумма сил в проекции на ось трубы равна нулю:

$$G \cos \alpha + P_1 - P_2 - \tau_0 F_{\text{тр}} = 0,$$

где  $\tau_0$  — касательное напряжение между неподвижным слоем на стенке (гипотеза прилипания) и соседним подвижным слоем.

Подставим выражения для сил. Из (рис. 1.62) очевидно

$$\cos \alpha = \frac{z_1 - z_2}{l};$$

$$\rho g F (z_1 - z_2) + p_1 F - p_2 F - \tau_0 \chi l = 0.$$

Разделим на  $\rho g F$  и сгруппируем:

$$\left( z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left( z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right) = \tau_0 \frac{\chi l}{F \rho g}.$$

Заметим, что разность в левой части полученного выражения по уравнению Бернулли равна  $h_l$ .

Учтем, что по определению  $R_r = \frac{F}{\chi}$ ,  $\gamma = \rho g$  получим

$$h_l = \tau_0 \frac{l}{\gamma R_r}.$$

Гидравлический уклон  $J = \frac{h_l}{l}$ . Окончательно получим

$$\tau_0 = \gamma R_r J \quad \text{— основное уравнение равномерного движения (как ламинарного, так и турбулентного)}$$

Распределение касательных напряжений по толщине потока. В движущемся потоке радиуса  $r$  выделим цилиндрический объем радиуса  $y \leq r$ , (рис. 1.63)

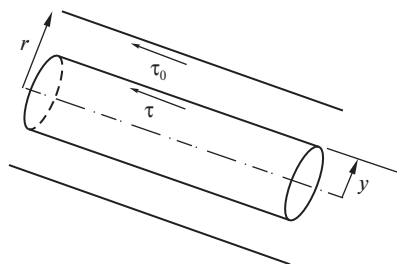


Рис. 1.63

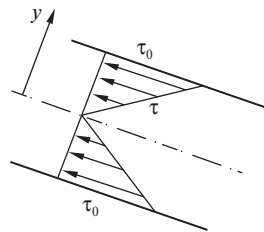


Рис. 1.64. Распределение касательных напряжений

Применим к выделенному объему основное уравнение движения. Гидравлический радиус для круглого потока равен половине (!) геометрического радиуса:

$$\tau = \gamma \frac{y}{2} J.$$

Следовательно, распределение касательных напряжений:

- по радиусу потока линейное;
- на оси потока  $y = 0$  и  $\tau = 0$ ;
- у стенки  $y = r$  и  $\tau = \tau_0$  (рис. 1.64).

*Повторим:* полученные выводы справедливы для любого равномерного движения — как для ламинарного, так и для турбулентного.

### 1.3.3. Режимы движения жидкости. Опыты Рейнольдса<sup>1</sup>. Число Рейнольдса

Многочисленные экспериментальные исследования показали, что потери энергии при движении жидкости существенно зависят от особенностей движения частиц жидкости в потоке, от режима движения.

Наглядно особенности режимов движения можно наблюдать на специальной опытной установке, схема которой показана на (рис. 1.65)

К баку  $B$  достаточно больших размеров, наполненному жидкостью, присоединена стеклянная труба  $T$ ; вход в трубу сделан плавным;

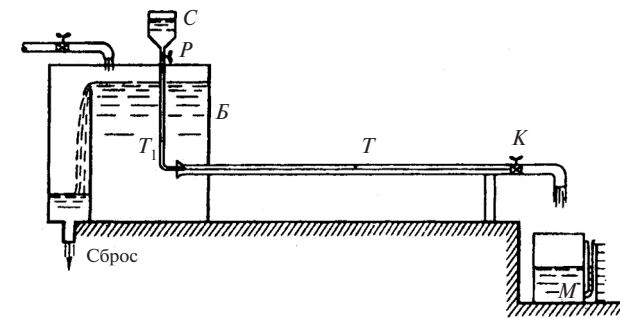


Рис. 1.65. Схема опытной установки Рейнольдса

<sup>1</sup> Осборн Рейнольдс (1842–1912) — английский механик, физик и инженер, специалист в области гидромеханики и гидравлики. Экспериментально установил критерий перехода ламинарного режима движения жидкости, текущей в цилиндрической трубе, в турбулентный режим.

в конце трубы установлен кран  $K$  для регулирования расхода потока. Расход измеряют с помощью мерного бака  $M$  и секундомера.

Над баком расположен сосуд  $C$ , наполненный раствором краски, плотность которой близка к плотности жидкости в потоке. По тонкой трубке  $T_1$  краска водится в жидкость, движущуюся по трубе  $T$ . Расход краски регулируется краном  $P$ .

При открытом кране  $K$  в трубе  $T$  установится некоторая скорость потока (высота уровня жидкости в баке поддерживается постоянной). Если открыть кран  $P$ , то в трубу  $T$  начнет поступать краска. При малой скорости потока  $v$  в трубе  $T$  краска образует прямолинейную и резко выделяющуюся, не смешивающуюся с окружающей жидкостью струйку. Заметного обмена частицами между окрашенной струйкой и окружающей ее жидкостью не происходит. Если ввести в жидкость краску несколькими струйками, все они будут двигаться не смешиваясь с остальной массой жидкости. Это свидетельствует о том, что в прямой стеклянной трубе  $T$  при данном открытии крана жидкость движется отдельными, не перемешивающимися между собой слоями. Линии тока при этом прямолинейны и устойчивы. Это **ламинарный режим движения** (от лат. lamina — слой) — частицы жидкости движутся параллельными слоями, не перемешиваясь (рис. 1.66,  $a$ ).

При некотором большем открытии крана (увеличении скорости  $v$ ) окрашенная струйка начинает искривляться и становится волнообразной. Это может происходить только в результате изменений во времени (пульсаций) векторов местных скоростей в потоке. Такой режим называется **переходным**.

При дальнейшем увеличении скорости потока в трубе  $T$  струйка распадается на отдельные хорошо видимые вихри, окрашенные струйки перемешиваются со всей массой текущей жидкости. Это **турбулентный режим движения** (от лат. turbulentus — беспорядочный) — в потоке существуют пульсации местных скоростей, давлений и касательных напряжений, приводящие к хаотическому, беспорядочному движению частиц и перемешиванию жидкости (рис. 1.66,  $b$ ).

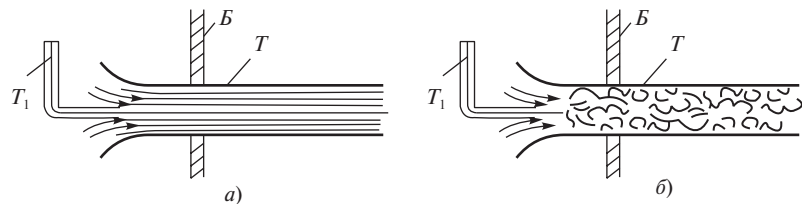


Рис. 1.66. Ламинарный ( $a$ ) и турбулентный ( $b$ ) режимы движения жидкости

При постепенном закрытии крана явление повторяется в обратном порядке. Однако переход от турбулентного режима к ламинарному происходит при скорости, меньшей той, при которой произошел переход от ламинарного режима к турбулентному.

**Критическая скорость потока** — скорость, при которой меняется режим движения. При этом имеют место две критические скорости: верхняя  $v_{кр.в}$ , которая соответствует смене ламинарного режима турбулентным, и нижняя  $v_{кр.н}$ , при которой происходит смена турбулентного режима ламинарным. При чем всегда  $v_{кр.н} < v_{кр.в}$ . В интервале между этими скоростями режим движения может быть и ламинарным, и турбулентным, эта зона называется переходной. В переходной зоне ламинарный режим неустойчив и легко переходит в турбулентный. Для оценки состояния потока выбрана нижняя критическая скорость, при ней и при меньших скоростях режим всегда ламинарный. Опытами Рейнольдса было установлено, что нижняя критическая скорость для потока в круглой трубе пропорциональна кинематической вязкости  $\nu$  и обратно пропорциональна диаметру трубы  $d$ :  $v_{кр.н} = k\nu / d$ . Коэффициент пропорциональности  $k$  оказался одинаковым для различных  $\nu$  и  $d$ :  $k = v_{кр.н} d / \nu = 2320$ . В честь Рейнольдса этот коэффициент был назван **критическим числом Рейнольдса** и обозначен  $Re_{кр}$ . Верхней критической скорости соответствует  $Re \approx 4000$ , однако это значение существенно зависит от условий опыта.

Скорость	0	$\leftarrow v_{кр.н} \leftarrow$	$\rightarrow v_{кр.н} \rightarrow$
Ламинарный режим	Возможен, устойчив	Возможен, неустойчив	Невозможен
Турбулентный режим	Невозможен	Возможен, устойчив	Возможен, устойчив
Число $Re$	0	2320	4000

В общем случае режим движения жидкости определяется безразмерным комплексом  $Re = \frac{vl}{\mu/\rho} = \frac{vl}{\nu}$ . Этот комплекс называют **числом Рейнольдса** и обозначают  $Re$ .

**Число Рейнольдса** — критерий подобия при доминирующих силах инерции.

Число Рейнольдса характеризует отношение сил инерции к силам трения (вязкости). Силы инерции имеют порядок:



$$F_{\text{ин}} \approx ma \approx \rho V \cdot l / t^2 \approx \rho l^2 v^2,$$

а силы вязкого трения

$$F_{\text{тр}} \approx \tau F \approx \mu \frac{v}{l} l^2 \approx \rho \nu l v.$$

Тогда

$$\frac{F_{\text{ин}}}{F_{\text{тр}}} \approx \frac{\rho l^2 v^2}{\rho \nu l v} = \frac{l v}{\nu} = \text{Re},$$

где  $l$  — характерный поперечный размер живого сечения.

При выводе учтено, что динамическая вязкость  $\mu = \rho \cdot \nu$ , объем  $V = l^3$ , скорость  $v = l / t$ , ускорение  $a = l / t^2$ .

Поскольку характерный размер живого сечения выбирают произвольно, то число Рейнольдса имеет индекс, указывающий выбранную характерную линейную величину. Чаще всего в качестве характерных линейных величин принимают диаметр трубы  $d$ , или гидравлический радиус  $R_r$  или глубину жидкости в открытом русле (канале)  $h$ .

Тогда

$$\text{Re}_d = \nu d / \nu; \text{Re}_{R_r} = \nu R_r / \nu; \text{Re}_h = \nu h / \nu.$$

Число  $\text{Re}_d$  обычно обозначают без индекса  $\text{Re}$ . В расчетах для цилиндрических круглых труб обычно принимают  $\text{Re}_{\text{кр}} = 2320$ . Для открытых русел  $\text{Re}_{\text{кр}R_r} = 580$ , так как  $R_r = d / 4$ .

Определив число Рейнольдса для любого потока и сравнив его с критическим, можно узнать характер движения, который, в свою очередь, определяет зависимость потерь напора от скорости. В общем случае потери напора  $h_f = k v^n$ , где  $k$  — некоторый постоянный коэффициент. В случае ламинарного режима  $n = 1$ , т.е. потери пропорциональны скорости. При турбулентном режиме  $n = 1,75 - 2,0$  в зависимости от степени турбулентности потока. При развитом турбулентном режиме потери напора пропорциональны квадрату средней скорости.

В природе и технике турбулентное движение наблюдается чаще, чем ламинарное. Области ламинарного движения — движение вязких жидкостей типа масел по трубам и в механизмах, движение грунтовых вод, движение в капиллярах (в том числе и движение крови в живом организме).

### 1.3.4. Ламинарный режим движения жидкости

Рассмотрим распределение скоростей по сечению и потери напора по длине трубы при установившемся ламинарном движении.

Движение равномерное, следовательно эпюра скоростей постоянна по длине трубы. Дополнительное условие: движение изотермическое, т.е. температура не меняется, а значит, плотность и вязкость — тоже,  $\text{Re} \leq 2320$ .

Выделим цилиндрический объем движущейся жидкости радиусом  $y$  и применим к нему основное уравнение равномерного движения жидкости

$$\tau = \gamma R_3 J$$

где  $\tau$  — касательное напряжение;  $R_3 = \frac{y}{2}$  — гидравлический радиус;

$J = \frac{h_f}{l}$  — гидравлический уклон.

По закону Ньютона  $\tau = -\mu \frac{du}{dy}$ , «минус» потому, что производная отрицательна, т.е. вдоль оси  $y$  скорость падает, а всегда  $\tau > 0$ :

$$-\mu \frac{du}{dy} = \gamma \frac{y}{2} J \Rightarrow (\mu = \rho \nu; \gamma = \rho g) \Rightarrow du = -\frac{gJ}{2\nu} y dy.$$

Интегрируем:

$$u = -\frac{gJ}{4\nu} y^2 + C.$$

Постоянную интегрирования  $C$  находим из условия, что на стенке при  $y = r$  имеем  $u = 0$  (гипотеза прилипания) (рис. 1.67):

$$C = \frac{gJ}{4\nu} r^2.$$

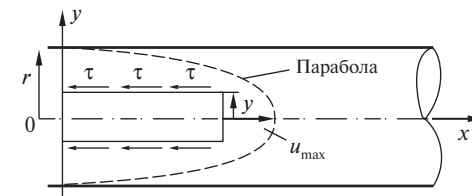


Рис. 1.67. Потери напора по длине трубы при ламинарном движении

Окончательно распределение скоростей по сечению в ламинарном режиме будет следующим:

$$u = \frac{gJ}{4\nu}(r^2 - y^2).$$

Это парабола, максимум при  $y = 0$ . Максимальная скорость

$$u_{\max} = \frac{gJ}{4\nu}r^2 = \frac{gJ}{16\nu}d^2.$$

Определение расхода жидкости. Рассмотрим концентрический слой жидкости радиуса  $y$  толщиной  $dy$  (рис. 1.68).

Расход через этот слой  $dQ = u dF$ , где  $dF = 2\pi y dy$ .

$$dQ = \frac{gJ}{4\nu}(r^2 - y^2) \cdot 2\pi y dy.$$

Интегрируем по всему сечению по  $y$ :

$$Q = \frac{\pi gJ}{2\nu} \int_0^r (r^2 - y^2) y dy = \frac{\pi gJ}{2\nu} \left( \frac{r^4}{2} - \frac{r^4}{4} \right) = \frac{\pi gJ}{8\nu} r^4.$$

Учитывая, что  $r = \frac{d}{2} \Rightarrow r^4 = \frac{d^4}{16}$ ,

$$Q = \frac{\pi gJ}{128\nu} d^4.$$

*Заметим:* расход в ламинарном режиме при заданном гидравлическом уклоне  $J$  пропорционален четвертой степени диаметра.

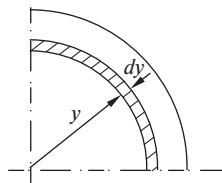


Рис. 1.68

Определение средней скорости. Средняя скорость (по определению отношение объемного расхода к площади)  $v = \frac{Q}{F}$ :

$$v = \frac{\pi gJ}{128\nu} d^4 \frac{4}{\pi d^2} = \frac{gJ}{32\nu} d^2.$$

Учитывая  $d^2 = 4r^2$ , получим  $v = \frac{gJ}{8\nu} r^2$ .

Средняя скорость ровно в два раза меньше максимальной:

$$v_{\max} = \frac{gJ}{4\nu} r^2; \quad v = \frac{v_{\max}}{2}.$$

Коэффициент Кориолиса для ламинарного режима движения равен

$$\alpha = \frac{\int u^3 dF}{v^3 F} = \dots = 2.$$

Определение потери напора по длине трубы. Из выражения для средней скорости выразим гидравлический уклон

$$v = \frac{gJ}{32\nu} d^2 \Rightarrow J = \frac{32\nu}{d^2} v.$$

С другой стороны, гидравлический уклон (по определению)  $J = \frac{h_l}{l}$ , следовательно,

$$h_l = \frac{32\nu l}{d^2} v \quad \text{— формула Пуазейля}^1.$$

Из формулы видно, что потери напора по длине трубы пропорциональны средней скорости потока в первой степени.

Для определения потерь напора по длине трубы обычно используется формула Дарси

$$h_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g},$$

<sup>1</sup> Жан Луи Мари Пуазейль (1799–1869) — французский врач и физик; экспериментально установил закон истечения жидкости через тонкую цилиндрическую трубку.

где  $\lambda$  — коэффициент сопротивления Дарси.

Чтобы найти коэффициент Дарси  $\lambda$ , используем только что полученную формулу Пуазейля

$$\lambda \frac{l v^2}{d 2g} = \frac{32 \nu l}{d^2 g} v.$$

Отсюда  $\lambda = \frac{64 \nu}{v d}$ .

Заметим, что  $Re = \frac{v d}{\nu}$ .

Следовательно, в ламинарном режиме коэффициент Дарси  $\lambda = \frac{64}{Re}$ .

*Замечание.* Формула Дарси справедлива в ламинарном режиме, однако это не означает, что потери напора в этом случае пропорциональны квадрату скорости. Сам коэффициент Дарси пропорционален скорости в степени минус один (скорость входит в число  $Re$ ). Следовательно, как и утверждалось ранее, потери напора по длине трубы при ламинарном режиме движения пропорциональны средней скорости потока в первой степени.

### Начальный участок ламинарного течения

**Начальный участок течения** — участок от начала трубы, на котором формируется параболический профиль скоростей (рис. 1.69). За пределами этого участка имеем стабилизированное ламинарное течение, параболический профиль скоростей остается неизменным, как бы

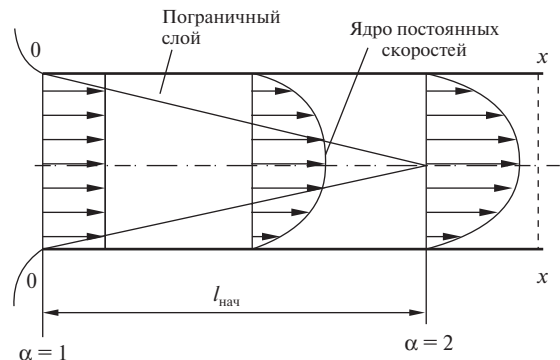


Рис. 1.69. Профиль скоростей на начальном участке

ни была длинна труба, при условии сохранения ее прямолинейности и постоянства сечения.

**Длина начального участка** — расстояние от входа в трубопровод до сечения, в котором скорость распределена по параболическому закону с точностью 1%:

$$l_{нач} = (0,03 - 0,04) d Re$$

$$l_{нач, max} = 60d.$$

Потери на начальном участке больше примерно на 9%.

На начальном участке происходит стабилизация профиля скоростей, а производные  $\frac{du}{dy}$  выше, чем в основном участке трубы. В практических расчетах увеличением потерь на начальном участке обычно пренебрегают, однако учитывают потери на вход из бака в трубу  $\zeta_{вх} = 0,5$ .

### Ламинарное течение в узких щелях (зазорах)

Рассмотрим плоский зазор между неподвижными пластинами (рис. 1.70).

Толщина (величина) зазора  $s$ , длина зазора по направлению движения жидкости  $l$ , ширина зазора  $b$ . Жидкость движется через зазор под действием перепада давления  $\Delta p = p_1 - p_2$ . Полагаем, что течение установившееся и изотермическое (температура жидкости не меняется) и вязкость жидкости постоянна.

Рассмотрим малый слой жидкости высотой  $2y$ , расположенный симметрично по центру зазора (рис. 1.71).

На этот слой действует тормозящее касательное напряжение, по закону Ньютона

$$\tau = -\mu \frac{du}{dy},$$

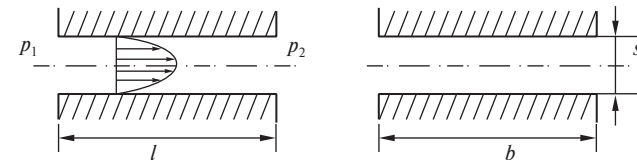


Рис. 1.70. Движение жидкости в узкой щели

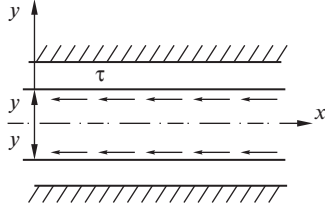


Рис. 1.71

где  $\mu$  – динамическая вязкость жидкости;  $\frac{du}{dy}$  – градиент скорости слоистого движения в направлении оси  $y$ , величина отрицательная, так как местная скорость потока  $u$  уменьшается при увеличении  $y$ , поэтому в формуле знак «минус».

Запишем основное уравнение равномерного движения для выделенного фрагмента:

$$\tau = \gamma R_r J,$$

где  $\tau$  – касательное напряжение;  $R_r$  – гидравлический радиус, по определению  $R_r = \frac{F}{\chi} = \frac{2by}{2b+4y}$ , так как  $y \ll b$ , то  $R_r = y$ ;  $J$  – гидравлический уклон, по определению  $J = \frac{h_l}{l}$ .

Приравняем выражения для  $\tau$ :

$$-\mu \frac{du}{dy} = \gamma y J,$$

откуда

$$du = -\frac{\gamma J}{\mu} y dy.$$

Интегрируем:

$$u = -\frac{\gamma J}{2\mu} y^2 + C.$$

Для нахождения постоянной интегрирования воспользуемся граничным условием, вытекающим из гипотезы прилипания: при  $y = \frac{s}{2}$

имеем  $u = 0$ , откуда  $C = \frac{\gamma J}{2\mu} \frac{s^2}{4}$ .

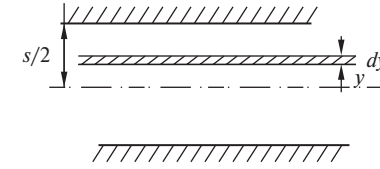


Рис. 1.72

Скорость при движении в щели

$$u = \frac{\gamma J}{2\mu} \left( \frac{s^2}{4} - y^2 \right).$$

Это уравнение параболы, скорость максимальна при  $y = 0$ :

$$u_{\max} = \frac{\gamma J s^2}{8\mu}.$$

Для определения расхода жидкости через щель выделим в ней элементарный слой толщиной  $dy$ , отстоящий от оси потока на расстоянии  $y$  (рис. 1.72).

Площадь выделенного слоя  $dF = b dy$ , скорость  $u = \frac{\gamma J}{2\mu} \left( \frac{s^2}{4} - y^2 \right)$ ,

расход  $dQ = u dF = \frac{\gamma J}{2\mu} \left( \frac{s^2}{4} - y^2 \right) b dy$ .

Проинтегрируем по всему потоку; вследствие симметрии потока при интегрировании от 0 до  $\frac{s}{2}$  результат нужно удвоить:

$$Q = \int_F dQ = 2 \int_0^{s/2} \frac{\gamma J}{2\mu} \left( \frac{s^2}{4} - y^2 \right) b dy = \frac{\gamma J b}{\mu} \left( \frac{s^3}{8} - \frac{s^3}{24} \right) = \frac{\gamma J b}{12\mu} s^3.$$

Вспомним, что  $J = \frac{h_l}{l}$  и  $\gamma h_l = \Delta p$ .

В результате окончательно получим расход жидкости через узкую щель:

$$Q = \frac{\Delta p b}{12\mu l} s^3.$$

*Замечание.* Утечки через зазор пропорциональны ширине в третьей степени, т.е. при увеличении зазора в 2 раза утечки возрастают в 8 раз.

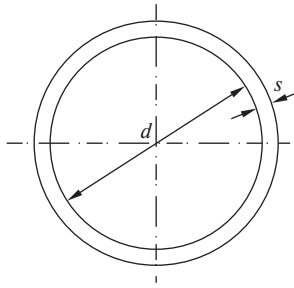


Рис. 1.73. Утечки через зазор в поршневой паре

Рассмотрим утечки через зазор в поршневой паре (диаметр поршня  $d$ , величина зазора  $s$ ) (рис. 1.73):

$$Q_{\text{ут}} = \frac{\Delta p \pi d}{12 \mu l} s^3.$$

При несимметричном расположении поршня в зазоре (при наличии эксцентриситета) расход увеличивается и при максимальном эксцентриситете  $Q_{\text{макс}} = 2,5 Q_{\text{ут}}$ .

### 1.3.5. Турбулентный режим движения

При турбулентном режиме движения в потоке существуют пульсации местных скоростей, давлений и касательных напряжений, приводящие к хаотическому, беспорядочному движению частиц и перемешиванию.

Измерение местных скоростей турбулентного потока показало, что поле скоростей такого потока изменяется беспорядочно, хаотично, однако изменение местных скоростей имеет ярко выраженный пульсационный характер — значения составляющих скорости пульсируют около некоторых осредненных значений.

Обозначим через  $\vec{u}$  — местная скорость, а через  $u_x, u_y, u_z$  — ее проекции на оси координат (рис. 1.74).

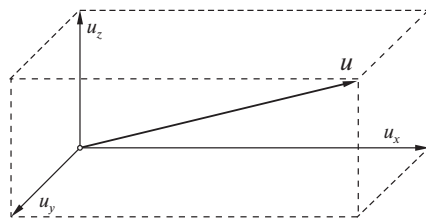


Рис. 1.74. Разложение местной скорости по осям координат

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k},$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — единичные векторы, направленные по осям координат.

Местная скорость меняется по величине и направлению, а ее проекции — по величине и знаку около некоторого среднего значения.

Проекция скорости — функция времени  $u_x = u_x(t)$ .

Таким образом турбулентное движение является по своей природе движением типично неустановившимся. Изменение скорости имеет вид случайных беспорядочных отклонений. Однако, несмотря на кажущуюся беспорядочность, среднее значение за достаточно длительный промежуток времени остается все-таки постоянным и не зависит от времени.

За осредненную скорость  $\bar{u}_x$  в данной точке принимается такая постоянная за период осреднения  $T$  скорость, при которой через элементарную площадку  $d\omega$  за период  $T$  проходит объем жидкости, равный истинному ее объему, проходящему через  $d\omega$  за время  $T$ , т.е.

$$d\omega \bar{u}_x T = d\omega \int_0^T u_x dt, \text{ откуда } \bar{u}_x T = \int_0^T u_x dt \text{ (рис. 1.75).}$$

Предполагается, что период осреднения  $T$  достаточно велик, так что осредненное значение не изменится, если выполнить повторное осреднение.

Мгновенные значения параметров турбулентного режима принято рассматривать в виде суммы *осредненных* (во времени) значений и *пульсационных* составляющих.

Договоримся осредненные параметры обозначать с чертой, пульсационные — со штрихом. При этом мгновенные значения скорости и напряжений запишутся в виде

$$u_x = \bar{u}_x + u'_x, \quad u_y = \bar{u}_y + u'_y, \quad u_z = \bar{u}_z + u'_z;$$

$$p = \bar{p} + p', \quad \tau = \bar{\tau} + \tau'.$$

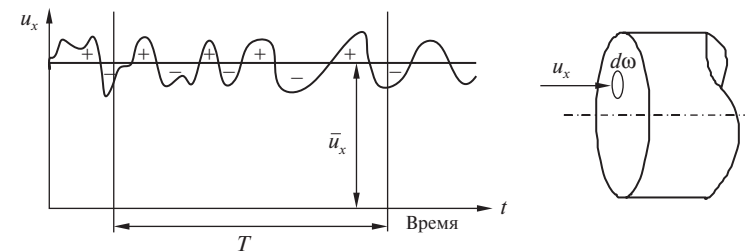


Рис. 1.75. Осреднение скорости

Необходимо различать осредненную скорость  $\bar{u}$  (по времени, в данной точке) и среднюю скорость в данном живом сечении потока  $v = \frac{Q}{F}$ .

Пульсационные составляющие скоростей характеризуются амплитудой и частотой. Заметим, что величина осредненной пульсационной составляющей всегда равна нулю.

Для оценки степени пульсаций используют среднее квадратичное отклонение пульсационных добавок  $\sigma_{u_x} = \sqrt{\overline{(u'_x)^2}}$  (корень из осредненного значения квадрата пульсационной составляющей).

Степень турбулентности потока

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}(\overline{(u'_x)^2} + \overline{(u'_y)^2} + \overline{(u'_z)^2})}}{\bar{u}},$$

где  $\bar{u} = \sqrt{\bar{u}_x^2 + \bar{u}_y^2 + \bar{u}_z^2}$  — осредненная местная скорость.

### Структура турбулентного потока

Основной особенностью турбулентного потока является интенсивное перемешивание частиц жидкости. Отметим, что имеется в виду именно перемешивание частиц, а не молекул. Интенсивность перемешивания растет с ростом  $Re$ .

Рассмотрим поток жидкости в прямолинейной цилиндрической трубе круглого сечения (осесимметричный поток). Структуру потока в трубе представим в виде приближенной двухслойной схемы (модели) (рис. 1.76).

На твердой стенке (внутренняя поверхность трубы) скорости равны нулю.

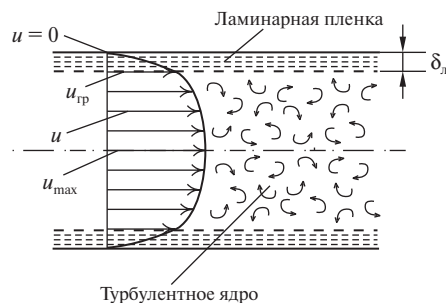


Рис. 1.76. Поток жидкости в прямолинейной цилиндрической трубе

Вблизи твердой стенки находится очень тонкий слой  $\delta_l$ , в котором преимущественное значение имеют силы вязкого трения, рассчитываемые по закону Ньютона, и жидкость движется без перемешивания.

Эта область называется **вязкий подслоя** потока.

В пределах вязкого подслоя скорость линейно увеличивается от нуля на стенке до некоторого значения  $u_b$ .

Толщина вязкого подслоя (без вывода)

$$\delta_{в.п} = \frac{30d}{Re\sqrt{\lambda}}.$$

При увеличении  $Re$  толщина вязкого подслоя уменьшается.

### 1.3.6. Возникновение дополнительных касательных напряжений. Теория турбулентности Прандтля

Теория турбулентности Л. Прандтля, предложенная в 1925 г., основана на том, что количество движения массы, переносимой в потоке за счет поперечной пульсационной составляющей скорости, остается неизменным на некотором пути, а затем изменяется скачком. Длина этого пути  $l$  — так называемая **длина пути перемешивания**. Предполагается, что это расстояние моль жидкости проходит без взаимодействия с другими молями и сохраняя постоянным свое осредненное количество движения. После прохождения этого пути моль жидкости смешивается с жидкостью другого слоя, отдавая ей разницу количества движения.

Рассмотрим простейший случай плоскопараллельного осредненного турбулентного потока. Так как поток принят плоскопараллельным, то очевидно  $\bar{u}_y = 0$ .

Покажем, что в таком потоке за счет пульсаций скоростей будет возникать дополнительное касательное напряжение, равное  $\bar{\tau} = -\rho \overline{u'_x u'_y}$ , где  $\overline{u'_x u'_y}$  — осредненное значение произведения пульсаций скорости по осям.

Рассмотрим два соседних слоя жидкости, разделенных площадкой  $\Delta\omega$  (рис. 1.77). Пусть вблизи верхней площадки имеют место пульсации скоростей  $u'_x$  и  $u'_y$ . В этом случае можно сказать, что верхний слой движется относительно нижнего с какой-то относительной скоростью  $u'_x$ .

Под действием вертикальной пульсации скорости  $u'_y$  через площадку  $\Delta\omega$  за время  $\Delta t$  протечет масса жидкости  $\Delta m = \rho u'_y \Delta\omega \Delta t$ .

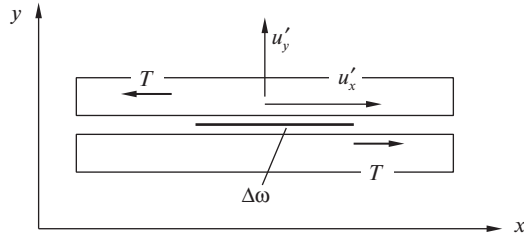


Рис. 1.77. Два слоя жидкости разделенных площадей

Верхнем слое эта масса приобретет ускорение в направлении оси  $x$ . При ускорении этой поступающей снизу массы верхний слой затормаживается. Этот эффект торможения равносителен приложению к верхнему слою на поверхности раздела слоев по площадке  $\Delta\omega$  некоторой касательной силы инерции  $T$ , направленной противоположно движению, или касательного напряжения  $\tau$ . Эту силу можно легко подсчитать.

Изменение количества движения жидкости, прошедшей из нижнего слоя в верхний, будет равно

$$\Delta m(\bar{u}_x + u'_x) - \Delta m \bar{u}_x = \Delta m u'_x = \rho u'_x u'_y \Delta\omega \Delta t.$$

Это изменение количества движения равно импульсу касательной силы  $T$ :

$$T \Delta t = -\rho u'_x u'_y \Delta\omega \Delta t.$$

Знак «минус» поставлен потому, что сила инерции всегда направлена против ускорения.

Учитывая, что  $\tau = \frac{T}{\Delta\omega}$ , получим  $\tau = -\rho u'_x u'_y$  или осредненное за период  $T$ :

$$\bar{\tau} = -\overline{\rho u'_x u'_y}.$$

Это и есть выражение для турбулентного касательного напряжения в функции от пульсационных скоростей.

Величина  $\bar{\tau}$  по закону независимости действия сил и напряжений должна быть добавлена к тому чисто вязкому напряжению, которое действует между слоями турбулентного, в среднем установившегося потока:

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_{\text{лам}} + \bar{\tau}_{\text{турб}} = \mu \frac{d\bar{u}_x}{dy} - \overline{\rho u'_y u'_x}.$$

### 1.3.7. Общее уравнение касательного напряжения

Придадим уравнению для касательного напряжения такой вид, чтобы дополнительные напряжения  $\bar{\tau}_{\text{турб}} = -\overline{\rho u'_y u'_x}$  были выражены не через пульсационные составляющие скорости, а через осредненные значения.

Рассмотрим два слоя жидкости. Первый слой движется со скоростью  $\bar{u}_x$ , второй находится от него на расстоянии  $l$  и движется со скоростью  $\bar{u}_x + \frac{d\bar{u}_x}{dy}l$ . Для двумерных равномерных потоков скорость  $\bar{u}_x$  зависит только от  $y$ ; значит

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} = \frac{d\bar{u}_x}{dy}.$$

Пусть некоторая масса жидкости перенеслась из нижнего слоя в верхний благодаря вертикальному импульсу скорости. Смешиваясь со вторым слоем, эта масса приобретает его скорость. При этом в верхнем слое наблюдается пульсация скорости  $u'_x \approx \frac{d\bar{u}_x}{dy}l$ . Прандтль предположил, что величины  $u'_x$  и  $u'_y$  одного порядка, тогда  $u'_y \approx \frac{d\bar{u}_x}{dy}l$ .

*Повторим:* Прандтль предположил, что пульсации скорости в потоке по разным осям одного порядка и что величина этих пульсаций пропорциональна градиенту средней скорости.

Подставим выражения для пульсационных составляющих в формулу для касательного напряжения:

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_{\text{лам}} + \bar{\tau}_{\text{турб}} = \mu \frac{d\bar{u}_x}{dy} + \rho l^2 \left( \frac{d\bar{u}_x}{dy} \right)^2.$$

Здесь  $l$  — длина пути перемешивания (см. теорию турбулентности Прандтля).

Величина  $\frac{d\bar{u}_x}{dy}$  приблизительно пропорциональна средней скорости потока. При больших скоростях в развитом турбулентном движении второе слагаемое существенно больше первого и первым можно пренебречь.

*Вывод:* при развитом турбулентном движении касательные напряжения растут пропорционально квадрату скорости (квадратичная область сопротивления).

Когда значения  $\bar{\tau}_{\text{лам}}$  сопоставимы со значениями  $\bar{\tau}_{\text{турб}}$ , общее касательное напряжение зависит от средней скорости в степени меньшей, чем вторая.

### Распределение скоростей в круглой трубе при турбулентном режиме

Как было отмечено ранее, структура турбулентного потока представляет ламинарный пограничный слой (ламинарная пленка) толщиной  $\delta_{\text{вп}}$ , в котором скорость нарастает по мере удаления от стенки (парабола), и ядро потока, в котором скорость распределена по логарифмическому закону (см. рис. 1.76).

Выведем закон распределения скорости в круглой трубе для турбулентного ядра потока. Пренебрегаем напряжением от молекулярной вязкости, тогда инерционное касательное напряжение определится по формуле

$$\tau_{\text{турб}} = \rho l^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2,$$

где  $l$  — длина пути перемешивания при переходе жидкости из одного слоя в другой.

Примем допущение: эта длина пропорциональна расстоянию от стенки (по Прандтлю)  $l = \chi y$ , где  $\chi$  — коэффициент пропорциональности, определяемый из опыта:

$$\tau_{\text{турб}} = \rho \chi^2 y^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2 \quad \text{или} \quad \sqrt{\frac{\tau_{\text{турб}}}{\rho}} = \chi y \frac{du}{dy}.$$

Введем новый параметр движения — «динамическую скорость»  $u_* = \sqrt{\frac{\tau_{\text{турб}}}{\rho}}$ . По основному уравнению равномерного движения, справедливому и для турбулентного режима,  $\tau_{\text{турб}} = \gamma R_T J = \rho g R_T J$ . Тогда  $u_* = \sqrt{g R_T J}$  и имеет размерность скорости:

$$u_* = \chi y \frac{du}{dy}.$$

Отсюда  $du = \frac{u_*}{\chi} \frac{dy}{y}$ . Интегрируем:

$$u = \frac{u_*}{\chi} \ln y + C.$$

Следовательно, скорость меняется по логарифмическому закону. Постоянную интегрирования найдем из условия  $u = u_{\text{max}}$  при  $y = r_0$  (в центре трубы).

$$u_{\text{max}} = \frac{u_*}{\chi} \ln r_0 + C.$$

После вычитания

$$\frac{u_{\text{max}} - u}{u_*} = \frac{1}{\chi} \ln \frac{r_0}{y}.$$

Переходим к десятичным логарифмам и подставляем значение ( $\chi = 0,4$  для гладких труб,  $\chi = 0,435$  для шероховатых):

$$\frac{u_{\text{max}} - u}{u_*} = 5,75 \cdot \ln \frac{r_0}{y}, \quad \text{или} \quad u = u_{\text{max}} - 5,75 \cdot u_* \ln \frac{r_0}{y}.$$

Для нахождения средней скорости турбулентного потока можно воспользоваться эмпирическим соотношением

$$\frac{u_{\text{max}} - u_{\text{ср}}}{u_*} = 3,75.$$

### 1.3.8. Понятие о гидравлически гладких и шероховатых поверхностях

Экспериментально установлено, что шероховатость внутренней поверхности трубы влияет на потери напора при движении жидкости. Однако это влияние проявляется не всегда.

Труба называется **гидравлически гладкой**, если средняя высота выступов шероховатости  $\Delta$  меньше толщины ламинарной пленки  $\delta_{\text{вп}}$  (вязкий подслой). В этом случае величина шероховатости не влияет на потери напора. Напомним:  $\delta_{\text{вп}} = \frac{30d}{\text{Re} \sqrt{\lambda}}$ .

Если абсолютная шероховатость больше толщины ламинарной пленки:  $\Delta > \delta_{\text{вп}}$ , то труба называется **гидравлически шероховатой**. В этом случае шероховатость существенно влияет на движение жидкости.



Итак, относительная шероховатость  $\varepsilon = \frac{\Delta}{d}$ .

Величина, обратная относительной шероховатости, называется относительной гладкостью:  $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{d}{\Delta}$ .

### 1.3.9. Формула гидравлического сопротивления по длине трубопровода

Потери напора по длине трубопровода определяются по формуле Дарси–Вейсбаха

$$h = \lambda \frac{l v^2}{d 2g},$$

где  $\lambda$  — коэффициент гидравлического трения (коэффициент Дарси).

Потери существенно зависят от диаметра труб, вязкости жидкости, скорости ее движения и шероховатости стенок труб. Из формулы можно сделать вывод, что потери пропорциональны длине трубы, обратно пропорциональны диаметру и пропорциональны квадрату средней скорости потока. Однако такой вывод будет справедлив только при неизменном коэффициенте Дарси. Фактически коэффициент Дарси в общем случае зависит от относительной шероховатости стенок трубопровода  $\frac{\Delta_э}{d}$  и числа Re, т.е.  $\lambda = \lambda\left(\frac{\Delta_э}{d}, Re\right)$ .

### 1.3.10. Эмпирическое изучение потерь напора по длине трубы. Опыты Никурадзе

Коэффициент  $\lambda$  определяется экспериментально (считается по эмпирическим формулам). Экспериментальные данные для  $\lambda$  в широком диапазоне чисел Re были получены Никурадзе. Искусственная шероховатость была создана приклеиванием на внутреннюю поверхность трубы на лаковую основу просеянного песка определенного размера. Опыты проводились для различных жидкостей, размеров шероховатости и диаметров трубопровода. Полученные опытные данные обобщены в графике Никурадзе и позволили раскрыть механизм потерь напора по длине трубы. На графике в логарифмических осях представлены зависимости величины коэффициента гидравлического трения  $\lg(100\lambda)$  от  $\lg Re$  при различных значениях относительной шероховатости  $\bar{\Delta} = \frac{\Delta}{d}$  (рис. 1.78). Здесь

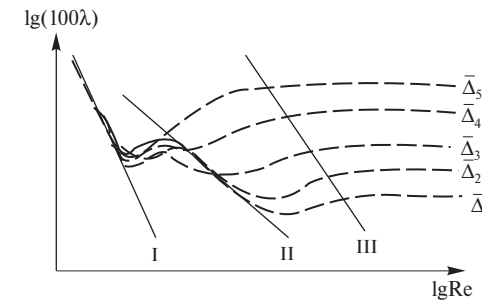


Рис. 1.78. Зависимость гидравлического трения от числа Рейнольдса

$\Delta$  — абсолютная величина искусственной шероховатости. Логарифм используется для того, чтобы охватить возможно больший диапазон значений Re и в то же время достаточно детально представить область малых значений числа Re (ламинарный и переходный режимы движения). Каждому фиксированному значению  $\bar{\Delta}$  на графике соответствует отдельная кривая, причем чем больше  $\bar{\Delta}$ , тем кривая расположена выше:

$$\bar{\Delta}_i < \bar{\Delta}_{i+1}.$$

1. *Ламинарный режим* (на прямой I). Коэффициент Дарси не зависит от шероховатости. Выражение для  $\lambda$  может быть получено теоретически:  $\lambda = 64 / Re$ , оно хорошо согласуется с экспериментальными данными.

2. *Переходный режим* (между прямыми I и II). Обычно полагают, что движение в этом режиме турбулентное (ламинарный режим здесь неустойчив), и экстраполируют на эту область зависимости турбулентного режима.

В турбулентном режиме выделяют три области.

3. *Область гидравлически гладких труб* (на прямой II). В соответствии с рассмотренной ранее структурой турбулентного потока толщина вязкого ламинарного слоя у стенки  $\delta_l = \frac{30d}{Re\sqrt{\lambda}}$ . Величина всех неровностей меньше толщины ламинарной пленки. Здесь коэффициент Дарси не зависит от шероховатости.

4. *Доквадратичная область* (между прямыми II и III). Чем больше шероховатость, тем раньше происходит выход выступов шероховатости из ламинарной пристеночной пленки, а значит, и выход из области гидравлически гладких труб, т.е. тем раньше начинает проявляться влияние шероховатости.

5. Квадратичная область (справа от прямой III). Коэффициент Дарси не зависит от  $Re$  («автомодельность» по  $Re$ , т.е. независимость от  $Re$ ). Потери напора по длине трубы пропорциональны квадрату скорости.

График Никурадзе позволяет объяснить природу гидравлического трения, однако, так как он получен для искусственной шероховатости, им нельзя пользоваться при естественной шероховатости. Для реальных труб выход выступов шероховатости из ламинарной пристеночной пленки происходит не одновременно, кривые не имеют минимума.

Для естественной шероховатости вводят понятие абсолютной эквивалентной шероховатости  $\Delta_э$ , т.е. такой равномерной шероховатости, для которой потери в квадратичном режиме те же, что и у естественной шероховатости.

### 1.3.11. Формулы для определения коэффициента гидравлического трения

1.  $0 < Re \leq 2320$ . Ламинарный режим.  $\lambda = \frac{64}{Re}$ . (Единственный случай, когда формула для коэффициента Дарси может быть получена теоретически. Все остальные формулы получены по экспериментальным данным — эмпирические формулы.) В курсе гидропривода обычно используют формулу  $\lambda = \frac{75}{Re}$ , в которой учтены потери на начальном участке трубы.

2.  $2320 < Re \leq 4000$ . Переходный режим. Как правило, расчет потерь производят по формулам для турбулентного режима (см. ниже), однако для этой области существует редко используемая формула Френкеля  $\lambda = \frac{2,7}{Re^{0,53}}$ .

3.  $4000 < Re \leq 20 \frac{d}{\Delta_э}$ . Турбулентный режим. Область гидравлически гладких труб.

**Формула Блазиуса**  $\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}}$ . Иногда встречается в виде  $\lambda = (100Re)^{-0,25}$ .

4.  $20 \frac{d}{\Delta_э} < Re \leq 500 \frac{d}{\Delta_э}$ . Турбулентный режим. Доквадратичная область.

**Формула Альтшуля**  $\lambda = 0,11 \left( \frac{\Delta_э}{d} + \frac{68}{Re} \right)^{0,25}$ . Наиболее часто используемая формула, рекомендована к применению.

5.  $500 \frac{d}{\Delta_э} < Re$ . Турбулентный режим. Квадратичная область сопротивления.

**Формула Шифринсона**  $\lambda = 0,11 \left( \frac{\Delta_э}{d} \right)^{0,25}$ .

Области 4 и 5 иногда называют областью шероховатых труб (в отличие от области 3 — гидравлически гладких труб), причем область 5 — областью вполне шероховатых труб.

Формула Альтшуля при больших числах  $Re$  дает совпадение с формулой Шифринсона (второе слагаемое в скобках становится пренебрежимо мало), а при малых — с формулой Блазиуса (первое слагаемое относительно мало).

Экспериментально получена формула **Колбрука и Уайта**

$$\frac{1}{\lambda} = \text{проверить звук 27 мин 10 ЛК}$$

### 1.3.12. Дифференциальные уравнения движения реальной жидкости при турбулентном режиме — уравнения Рейнольдса

Можно предположить, что как при ламинарном, так и при турбулентном движении справедливы закон внутреннего трения Ньютона  $\tau = \pm \mu \frac{du}{dy}$ , а значит, и опирающиеся на него уравнения Навье—Стокса

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) = \frac{du_x}{dt} \quad (\text{и т.д. по осям } u \text{ и } z).$$

Однако использовать уравнения Навье—Стокса для турбулентного режима движения практически невозможно, так как входящие в них мгновенные скорости и давления являются пульсирующими величинами. Поэтому для турбулентного режима ставится задача отыскания осредненных во времени скоростей и давлений.

Для получения уравнений Рейнольдса используются уравнения Навье–Стокса, все члены которых подвергаются операции осреднения.

Операция осреднения основана на предположении о существовании для данного турбулентного движения такого интервала осреднения  $T$ , что выполненное по нему осреднение не изменяется при повторном осреднении:

$$\bar{\bar{u}} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt.$$

Операция осреднения производится по определенным правилам.

Пусть  $f$  и  $p$  суть *зависимые* переменные, которые необходимо осреднить, и пусть  $s$  есть одна из *независимых* переменных ( $x, y, z, t$ ).

#### Правила осреднения

1.  $\overline{\bar{f}} = \bar{f}$  : повторное осреднение осредненной есть сама осредненная.
2.  $\overline{f + p} = \bar{f} + \bar{p}$  : осредненная сумма есть сумма осредненных.
3.  $\overline{f \cdot p} = \bar{f} \cdot \bar{p}$  : осреднение произведения осредненной на неосредненную есть произведение осредненных.
4.  $\frac{\partial \bar{f}}{\partial s} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial s}$  : осреднение производной есть производная осредненной.
5.  $\overline{\int f ds} = \int \bar{f} ds$  : осреднение интеграла есть интеграл осредненной.

Запишем первое из уравнений Навье–Стокса (остальные преобразуются аналогично):

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z.$$

Движение установившееся, значит локальная производная скорости в правой части уравнения равна нулю  $\frac{\partial u_x}{\partial t} = 0$ .

Конвективную часть производной преобразуем.

Предварительное замечание. Рассмотрим сумму производных произведений скоростей и приведем ее к виду правой части имеющегося уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x}(u_x u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(u_x u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(u_x u_z) = \\ & = \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_y}{\partial y} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z + \frac{\partial u_z}{\partial z} u_x = \\ & = \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z + u_x \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Уравнение неразрывности в дифференциальной форме записывается следующим образом:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

С учетом приведенных замечаний получим

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u_x = \frac{\partial}{\partial x}(u_x u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(u_x u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(u_x u_z).$$

Выполнив операции осреднения членов уравнения, получим

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2 \bar{u}_x = \frac{\partial}{\partial x}(\overline{u_x u_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{u_x u_y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{u_x u_z}).$$

Вспомним, что мгновенная скорость представляется суммой осредненной и пульсационной составляющих:  $u_x = \bar{u}_x + u'_x$ ;  $u_y = \bar{u}_y + u'_y$ ;  $u_z = \bar{u}_z + u'_z$ . Осредненная пульсационная составляющая равна нулю:  $\overline{u'_x} = \overline{u'_y} = \overline{u'_z} = 0$ .

При дальнейших преобразованиях учтем, что:

$$\overline{u_x u_x} = \overline{(\bar{u}_x + u'_x) \cdot (\bar{u}_x + u'_x)} = \bar{u}_x^2 + 2\bar{u}_x \overline{u'_x} + \overline{u'^2_x} = \bar{u}_x \bar{u}_x + \overline{u'_x u'_x};$$

$$\overline{u_x u_y} = \overline{(\bar{u}_x + u'_x) \cdot (\bar{u}_y + u'_y)} = \bar{u}_x \bar{u}_y + \bar{u}_x \overline{u'_y} + \bar{u}_y \overline{u'_x} + \overline{u'_x u'_y} = \bar{u}_x \bar{u}_y + \overline{u'_x u'_y};$$

$$\overline{u_x u_z} = \overline{(\bar{u}_x + u'_x) \cdot (\bar{u}_z + u'_z)} = \bar{u}_x \bar{u}_z + \bar{u}_x \overline{u'_z} + \bar{u}_z \overline{u'_x} + \overline{u'_x u'_z} = \bar{u}_x \bar{u}_z + \overline{u'_x u'_z}.$$

Произведем преобразование правой части полученного выше уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}_x \bar{u}_x + \overline{u'_x u'_x}) + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}_x \bar{u}_y + \overline{u'_x u'_y}) + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}_x \bar{u}_z + \overline{u'_x u'_z}) = \\ & = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} \bar{u}_x + \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \bar{u}_y + \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} \bar{u}_z + \bar{u}_x \left( \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} \right) + \\ & \quad + \frac{\partial (\overline{u'_x u'_x})}{\partial x} + \frac{\partial (\overline{u'_x u'_y})}{\partial y} + \frac{\partial (\overline{u'_x u'_z})}{\partial z}. \end{aligned}$$

После осреднения уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} = 0.$$

Значит, скобка при  $\bar{u}_x$  в правой части равна нулю:

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2 \bar{u}_x - \frac{\partial (\overline{u'_x u'_x})}{\partial x} - \frac{\partial (\overline{u'_x u'_y})}{\partial y} - \frac{\partial (\overline{u'_x u'_z})}{\partial z} = \\ = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} \bar{u}_x + \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \bar{u}_y + \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} \bar{u}_z. \end{aligned}$$

Каждый из членов, содержащих пульсационные составляющие скорости, можно переписать в ином виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\overline{u'_x u'_x})}{\partial x} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\overline{\rho u'_x u'_x}); \quad \frac{\partial (\overline{u'_x u'_y})}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho u'_x u'_y}); \\ \frac{\partial (\overline{u'_x u'_z})}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\rho u'_x u'_z}). \end{aligned}$$

Уравнения Рейнольдса:

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2 \bar{u}_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\overline{\rho u'_x u'_x}) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho u'_x u'_y}) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\rho u'_x u'_z}) = \\ = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} \bar{u}_x + \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \bar{u}_y + \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} \bar{u}_z, \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \nabla^2 \bar{u}_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\overline{\rho u'_y u'_x}) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho u'_y u'_y}) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\rho u'_y u'_z}) = \\ = \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x} \bar{u}_x + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} \bar{u}_y + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial z} \bar{u}_z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \nabla^2 \bar{u}_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\overline{\rho u'_z u'_x}) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho u'_z u'_y}) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\rho u'_z u'_z}) = \\ = \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} \bar{u}_x + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \bar{u}_y + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} \bar{u}_z. \end{aligned}$$

Члены вида  $\overline{\rho u'_x u'_y}$  имеют размерность напряжений. Таким образом, в левой части уравнений имеются члены, отражающие действие только вязкостных напряжений  $\nu \nabla^2 \bar{u}_x$  и содержащие напряжения, связанные с пульсациями скоростей, т.е. появляющиеся только при турбулентном режиме движения

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\overline{\rho u'_x u'_x}); \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho u'_x u'_y}); \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\rho u'_x u'_z}).$$

При турбулентном режиме касательные напряжения могут быть представлены суммой вязкостных  $\tau_{\text{лам}}$  и касательных напряжений, появляющихся вследствие турбулентных пульсаций  $\tau_{\text{турб}}$ :

$$\tau = \tau_{\text{лам}} + \tau_{\text{турб}}.$$

Турбулентные касательные напряжения выражаются формулой  $\tau_{\text{турб},jk} = -\rho \overline{u'_j u'_k}$ , при этом они подчиняются свойству взаимности:  $\tau_{jk} = \tau_{kj}$ .

Полученная система является незамкнутой.

Проблема замыкания уравнений Рейнольдса в общем виде не решена.

## Тема 1.4 ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ

### 1.4.1. Истечение жидкости через отверстия и насадки

Рассмотрим истечение жидкости через круглое отверстие в боковой стенке сосуда, в котором поддерживается постоянный напор  $H_0$  (рис. 1.79).

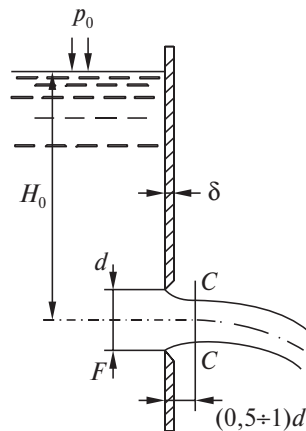
**Тонкая стенка** — толщина стенки не влияет на форму струи, струя касается только внутренней острой кромки.

Ориентировочно  $\delta < 0,2d$ .

**Малое отверстие** — геометрический напор в пределах отверстия можно считать постоянным (а значит, и скорости в пределах сечения одинаковы). Условие — высота отверстия не превышает  $0,1H$ . Важен не абсолютный размер отверстия, а соизмеримость его высоты и напора. Так, узкая вертикальная щель — большое отверстие, а отверстие в днище сосуда — малое (напор во всех его точках одинаков).

Кроме того, необходимо, чтобы скорость подхода жидкости к отверстию была пренебрежимо мала (площадь сечения бака много больше площади отверстия).

Если на поверхность жидкости в баке действует избыточное давление  $p_0$ , то при изучении истечения следует принимать во внимание действительный напор на уровне оси отверстия  $H = H_0 + \frac{p_0}{\rho g}$ . Пред-



**Рис. 1.79.** Истечение жидкости через круглое отверстие в боковой стенке сосуда

полагается, что истечение происходит в атмосферу и давление в сечении  $C-C$  равно атмосферному. Площадь отверстия  $F = \frac{\pi d^2}{4}$ .

**Сжатое сечение струи** — ближайшее к отверстию сечение струи, в котором скорости параллельны. Сжатое сечение находится на расстоянии  $0,5d$  от внутренней поверхности стенки резервуара. На рис. 1.79 обозначено  $C-C$ , площадь поперечного сечения струи в этом сечении обозначается  $F_c$ .

**Коэффициент сжатия струи** — отношение сжатого живого сечения к площади отверстия:  $\epsilon = \frac{F_c}{F} < 1$ .

Сжатие струи может быть полным или неполным по периметру отверстия.

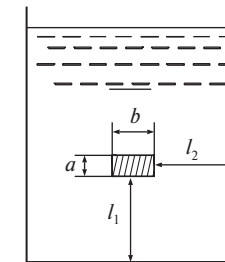
**Неполное сжатие** — стенки или дно сосуда совпадают с краем отверстия и по части периметра сжатия нет. Коэффициент сжатия больше, расход больше.

Полное сжатие может быть совершенным и несовершенным.

**Совершенное сжатие** — максимально возможное сжатие струи при отсутствии влияния свободной поверхности, боковых стенок и дна сосуда. Имеет место при расстоянии до стенок больше утроенного поперечного размера отверстия (рис. 81).

**Несовершенное сжатие** — когда стенки или дно сосуда расположены близко от отверстия. Коэффициент сжатия больше, расход больше.

**Инверсия струи** — изменение формы живого сечения струи в полете. Наиболее ярко это явление наблюдается при истечении через отверстие полигональной формы (треугольник, квадрат). Струя из треугольного отверстия принимает форму звезды с ребрами, перпендикулярными сторонам треугольника. При истечении через квадратное отверстие сечение струи постепенно превращается в крест с тон-



**Рис. 1.80.** Совершенное сжатие

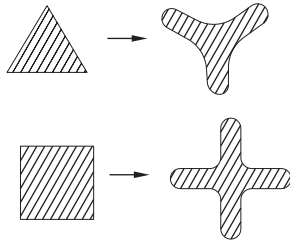


Рис. 1.81. Инверсия струи

кими ребрами, ориентированными нормально к сторонам квадрата (рис. 1.81).

Круг практически не меняется, лишь незначительно сжимается в вертикальном направлении (эллипс).

Инверсия объясняется совместным действием сил инерции и поверхностного натяжения.

#### Истечение из малого незатопленного отверстия в тонкой стенке при постоянном напоре

Обозначим через  $p_0$  — избыточное давление над поверхностью воды в баке.

Запишем уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости для сечений  $O-O$  (на свободной поверхности) и  $C-C$  (сжатого сечения) относительно плоскости сравнения  $O-O$ , проходящей через центр тяжести сжатого сечения (рис. 1.82). Очевидно  $z_A = 0$ . Давление в сжатом сечении равно атмосферному, значит, избыточное давление

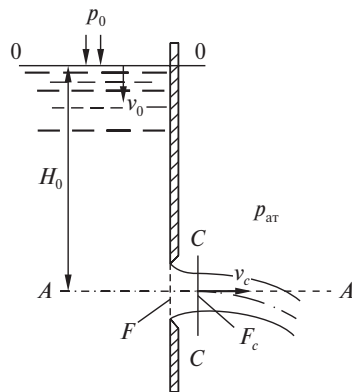


Рис. 1.82

$p_A = 0$ . Скорость жидкости в сечении  $O-O$  полагаем пренебрежимо малой. Потери напора выразим через коэффициент сопротивления

$$h_w = \zeta \frac{v_A^2}{2g},$$

$$H_0 + \frac{p_0}{\rho g} = \frac{\alpha_A v_A^2}{2g} + \zeta \frac{v_A^2}{2g}.$$

Полагаем скорости одинаковыми по сжатому сечению, т.е.  $\alpha_c = 1$ .

Введем понятие действующего напора:  $H = H_0 + \frac{p_0}{\rho g}$ . Это означает замену избыточного давления над поверхностью жидкости дополнительным столбом жидкости, производящим такое же давление. Этот прием часто используется в гидравлике для упрощения вычислений.

$$H = \frac{v_A^2}{2g}(1 + \zeta) \Rightarrow v_A = \sqrt{\frac{1}{1 + \zeta}} \cdot \sqrt{2gH}.$$

Обозначим коэффициент скорости  $\varphi = \sqrt{\frac{1}{1 + \zeta}}$ , тогда  $v_c = \varphi \cdot \sqrt{2gH}$ .

При истечении из отверстия идеальной жидкости (течение без потерь), ее скорость соответствует полному переходу потенциальной энергии в кинетическую:

$$v_{ид} = \sqrt{2gH} \text{ — формула Торричелли (1641 г.)}$$

Действительно, умножив на массу, получим  $\frac{mv^2}{2} = mgH$ .

$$\text{Коэффициент скорости } \varphi = \frac{v_c}{\sqrt{2gH}} = \frac{v_c}{v_{ид}}.$$

Физический смысл коэффициента скорости — это отношение действительной скорости истечения к теоретически возможной при отсутствии потерь энергии.

Обозначим площадь сжатого сечения  $F_c$ . Коэффициент сжатия струи  $\epsilon = \frac{F_c}{F}$ , где  $F$  — площадь отверстия. Очевидно  $F_c = \epsilon F$ .

Расход жидкости через отверстие составит

$$Q = F_c v_c = \varphi \varepsilon F \sqrt{2gH} = \mu F \sqrt{2gH},$$

где  $\mu = \varphi \varepsilon$  — коэффициент расхода.

$$\text{Очевидно } \mu = \frac{Q}{F \sqrt{2gH}} = \frac{Q}{F v_{ид}} = \frac{Q}{Q_{ид}}.$$

Физический смысл коэффициента расхода — отношение действительного расхода через отверстие к теоретически возможному при отсутствии сжатия струи и потерь энергии.

В результате опытов установлено:  $\varepsilon = 0,60 - 0,64$ ,  $\varphi = 0,97$ ,  $\mu = 0,60 - 0,62$ .

$$Q = \mu F \sqrt{2gH}, \quad \mu = 0,62: \quad \text{расход через малое незатопленное отверстие в тонкой стенке}$$

Значения коэффициентов сжатия  $\varepsilon$ , скорости  $\varphi$ , расхода  $\mu$  и сопротивления  $\zeta$  зависят в первую очередь от формы и размеров отверстия, условий подхода к нему жидкости, а также от числа Рейнольдса, которое обычно рассчитывается по теоретической скорости:

$$Re = \frac{d \sqrt{2gH}}{\nu}.$$

С увеличением числа  $Re$ , т.е. уменьшением влияния сил вязкости, коэффициент  $\varphi$  возрастает в связи с уменьшением  $\zeta$ ; коэффициент  $\varepsilon$  уменьшается вследствие уменьшения торможения жидкости у кромки отверстия и увеличения радиусов кривизны поверхности струи на ее участке от кромки до цилиндрической части (рис. 1.83).

Опыты показывают, что при  $Re > 10^5$  влияние сил вязкого трения на коэффициенты истечения практически отсутствует (квадратичная зона сопротивления),  $\mu = 0,62$ .

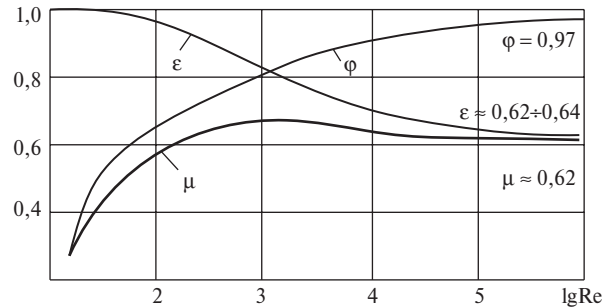


Рис. 1.83. Зависимость коэффициентов сжатия, скорости, расхода и сопротивления от числа Рейнольдса

### Истечение через затопленное отверстие (под уровень)

При истечении через отверстие под уровень жидкости отверстие называют **затопленным**. Рассмотрим истечение через затопленное отверстие при условии, что положение свободных поверхностей жидкости по обе стороны от отверстия не изменяется во времени, давление на свободной поверхности до отверстия и за ним атмосферное (рис. 1.84).

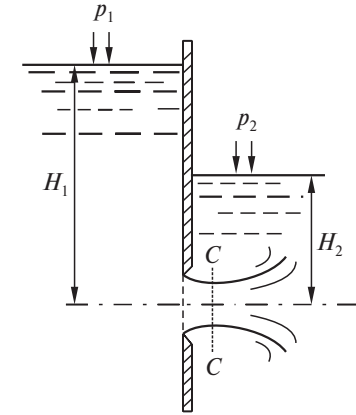


Рис. 1.84. Истечение жидкости через малое отверстие

$$H_1 = \text{const}, \quad H_2 = \text{const}, \quad p_1 = p_2 = p_{\text{ат}}.$$

Действующий напор  $H = H_1 - H_2$ .

$$Q = \mu F \sqrt{2g(H_1 - H_2)}, \quad \mu = 0,62 \quad \text{— расход через малое затопленное отверстие в тонкой стенке}$$

Перепад давлений на отверстии

$$\Delta p = \rho g H_1 - \rho g H_2 = \rho g (H_1 - H_2).$$

$$Q = \mu F \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \quad \text{— расход через отверстие при известном перепаде давлений.}$$

Дроссель — это затопленное отверстие.

### Истечение жидкости через малое отверстие при переменном напоре

Рассмотрим истечение жидкости из призматического резервуара (с постоянным поперечным сечением  $\omega$ ) через малое отверстие в днище площадью  $F$  (рис. 1.85).

Необходимо найти время, за которое напор изменится от  $H_1$  до  $H_2$ .

При истечении имеет место **квазиустановившееся движение**.

При расчете параметров квазиустановившегося потока принято время истечения разбивать на большое число малых интервалов  $dt$  и в пределах каждого интервала считать движение установившимся.

За малое время  $dt$  можно считать напор  $z$  и расход  $Q$  постоянными:

$$Q = \mu F \sqrt{2gz}.$$

За рассматриваемый промежуток времени  $dt$  из бака вытечет объем  $dV = Q \cdot dt$ .

В то же время при понижении уровня в баке на величину  $dz$  из него вытечет объем  $dV = -\omega dz$  ( $dz$  отрицательно, так как  $z$  уменьшается). Приравняем и преобразуем:

$$\mu F \sqrt{2gz} dt = -\omega dz \Rightarrow dt = -\frac{\omega}{\mu F \sqrt{2g}} \frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

Проинтегрируем это уравнение в пределах от  $H_1$  до  $H_2$ , для смены знака меняем пределы интегрирования):

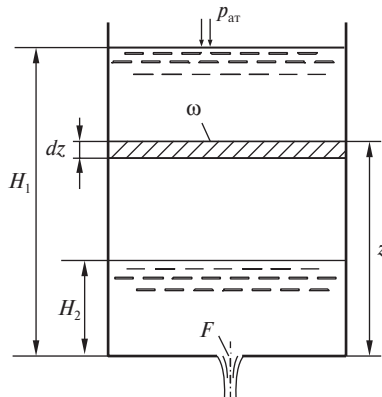


Рис. 1.85. Истечение жидкости через малое отверстие

$$t = \int_{H_1}^{H_2} dt = \frac{\omega}{\mu F \sqrt{2g}} \int_{H_2}^{H_1} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{\omega}{\mu F \sqrt{2g}} \left[ 2\sqrt{z} \right]_{H_2}^{H_1}.$$

$$t = \frac{2\omega(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2})}{\mu F \sqrt{2g}} - \text{время истечения из призматического сосуда площадью } \omega \text{ через малое отверстие в днище площадью } F \text{ при понижении уровня от } H_1 \text{ до } H_2.$$

Поставленная задача решена.

Полагая  $H_2 = 0$ , получим время полного опорожнения сосуда

$$t_0 = \frac{2\omega\sqrt{H_1}}{\mu F \sqrt{2g}}.$$

Проанализируем полученное выражение, для чего числитель и знаменатель умножим на  $\sqrt{H_1}$ :

$$t_0 = \frac{2\omega H_1}{\mu F \sqrt{2g} H_1}.$$

Заметим, что объем сосуда  $V_0 = \omega H_1$ , расход при постоянном напоре, равном  $H_1$ , был ранее получен:  $Q_{H_1} = \mu F \sqrt{2g} H_1$ . Таким образом,

$$t_0 = \frac{2V_0}{Q_{H_1}}.$$

**Вывод:** при постоянном напоре  $H_1$  заключенный в сосуде объем жидкости вытекает в 2 раза быстрее, чем при полном опорожнении того же сосуда с изменением напора от  $H_1$  до 0.

#### 1.4.2. Насадки

**Насадок** — присоединенная к отверстию короткая труба, в которой имеется напорное движение. (в гидравлике используется термин «насадок» (муж. род), в технике — термин «насадка» (жен. род), означающий съемную часть чего-либо.)

**Незатопленный насадок** — при истечении в газовую среду.

**Затопленный** — при истечении под уровень.



**Внешний цилиндрический насадок** (насадок Вентури<sup>1</sup>) — прямая цилиндрическая труба длиной  $l = (3-4)d$ , присоединенная под прямым углом с внешней стороны резервуара к отверстию того же диаметра.

При входе в такую короткую трубку происходит сжатие потока (по аналогии с истечением через отверстие).

Площадь сжатого сечения  $F_A$  (рис. 1.86).

За сжатым сечением следует расширение потока до заполнения всего поперечного сечения насадка. Между транзитной струей и стенкой насадка образуется кольцевая вихревая водоворотная зона.

Находящаяся в ней жидкость (и воздух) уносятся транзитным (поступательно движущимся) потоком. В этой зоне понижается давление, создается **вакуум**.

В связи с наличием вакуума действующий напор увеличивается на значение вакуума в сжатом сечении. Скорость в сжатом сечении возрастает по сравнению с истечением через отверстие с острой кромкой. Насадок как бы «подсасывает» жидкость из бака.

В то же время в насадке происходят и дополнительные по сравнению с отверстием с острой кромкой потери напора, связанные с внезапным расширением струи за сжатым сечением. Соотношение этих факторов определяет расход через насадок.

Запишем уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости (Сечения  $O-O$  на поверхности жидкости в баке и сечение  $I-I$  на выходе из насадка. Плоскость сравнения проходит через ось насадка):

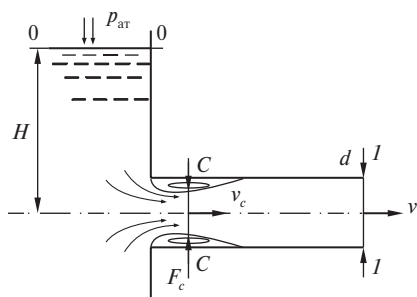


Рис. 1.86. Сжатие потока

<sup>1</sup> Джованни Баттиста Вентури (1746–1822) — итальянский ученый, известен работами в области гидравлики, теории света и оптики. Его именем названы открытый им эффект понижения давления газа или жидкости с увеличением скорости их движения, а также труба Вентури.

$$H + \frac{p_{ат}}{\rho g} + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = 0 + \frac{p_{ат}}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} + \Delta h_{ц.н},$$

где  $\Delta h_{ц.н}$  — потери через цилиндрический насадок.

Давления, равные атмосферному, сокращаются. Скоростным напором в баке пренебрегаем. Коэффициент Кориолиса полагаем равным 1.

Получаем

$$H = \frac{v^2}{2g} + \Delta h_{ц.н}.$$

Раскроем потери через отнесенный к скорости на выходе из насадка коэффициент сопротивления (формула Вейсбаха):

$$\Delta h_{ц.н} = \zeta_{ц.н} \frac{v^2}{2g} \Rightarrow H = \frac{v^2}{2g} (1 + \zeta_{ц.н}).$$

В насадке сопротивление движению состоит из двух сопротивлений ( $\zeta_{ц.н} = \zeta_{о.к} + \zeta_{в.р.}$ ) сопротивления при сужении (аналогично отверстию с острой кромкой) и сопротивления при внезапном расширении от площади сжатого сечения  $F_c$  до площади на выходе из насадка  $F$ .

Расчет проводим при больших  $Re$  ( $Re > 10^5$ ).

Напомним, что коэффициент сжатия

$$\epsilon = \frac{F_c}{F} = \frac{v}{v_c} = 0,61 - 0,64 \approx 0,63.$$

Коэффициент  $\zeta_{о.к(c)}$ , отнесенный к скорости в сжатом сечении равен 0,06. Произведем его пересчет для скорости в выходном сечении:

$$\zeta_{о.к(c)} \frac{v_c^2}{2g} = \Delta h_{о.к} = \zeta_{о.к} \frac{v^2}{2g};$$

$$\zeta_{о.к} = \zeta_{о.к(c)} \left( \frac{v_c}{v} \right)^2 = \zeta_{о.к(c)} \left( \frac{F}{F_c} \right)^2 = \zeta_{о.к(c)} \left( \frac{1}{\epsilon} \right)^2 = 0,06 \cdot \left( \frac{1}{0,63} \right)^2 \approx 0,15.$$

Коэффициент потерь при внезапном расширении (отнесенный к скорости за расширением)

$$\zeta_{в,р} = \left( \frac{F}{F_c} - 1 \right)^2 = \left( \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)^2 = \left( \frac{1}{0,63} - 1 \right)^2 \approx 0,35.$$

Коэффициент сопротивления насадка

$$\zeta_{ц,н} = \zeta_{о,к} + \zeta_{в,р} \approx 0,15 + 0,35 = 0,5.$$

Из полученного ранее уравнения Бернулли найдем скорость:

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_{ц,н}}} \sqrt{2gH} = \varphi_{ц,н} \sqrt{2gH}.$$

$$\text{Коэффициент скорости } \varphi_{ц,н} = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_{ц,н}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,5}} \approx 0,82.$$

Напомним, что коэффициент скорости есть отношение действительной скорости к теоретической, вычисленной по формуле Торричелли, он меньше единицы.

Коэффициент расхода  $\mu_{ц,н} = \varepsilon \varphi_{ц,н} = \varphi_{ц,н}$ , так как сжатия потока нет,  $\varepsilon = 1$ .

Опыты показали, что наибольшее значение коэффициента расхода, при длине насадка  $l = (3 - 4)d$ , когда потерями по длине можно пренебречь. При увеличении длины это уже короткая труба, потери по длине надо учитывать.

Расход через внешний цилиндрический насадок

$$Q = \mu_{ц,н} F \sqrt{2gH},$$

где коэффициент расхода  $\mu_{ц,н} \approx 0,82$ .

#### Вакуум во внешнем цилиндрическом насадке

Вакуум в сжатом сечении насадка может быть измерен чашечным вакуумметром.

Жидкость плотностью  $\rho$  в трубке поднимется на высоту

$$h_{\text{вак}} = \frac{p_{\text{ат}} - p_c}{\rho g}.$$

Задача — определить эту высоту.

Запишем уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости (сечения  $O-O$  и  $C-C$ ). Плоскость сравнения проходит через ось насадка (рис. 1.87):

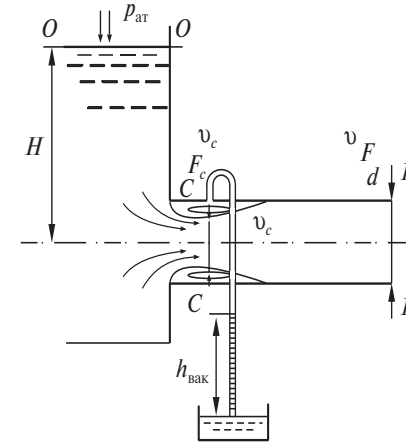


Рис. 1.87

$$H + \frac{p_{\text{ат}}}{\rho g} + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = 0 + \frac{p_c}{\rho g} + \frac{\alpha_c v_c^2}{2g} + \Delta h_{о,к}; \quad \zeta_{о,к} \frac{v_c^2}{2g} = \Delta h_{о,к}; \quad \zeta_{о,к} = 0,06;$$

$$\frac{p_{\text{ат}} - p_c}{\rho g} = \frac{v_c^2}{2g} (\alpha_c + \zeta_{о,к}) - H.$$

Выразим скорость в сжатом сечении через скорость на выходе, учитывая коэффициент сжатия  $v_c = \frac{v}{\varepsilon}$ .

$$\text{Используем } v = \varphi_{ц,н} \sqrt{2gH}, \text{ получим } \frac{v^2}{2g} = \varphi_{ц,н}^2 H.$$

$$\begin{aligned} \frac{p_{\text{ат}} - p_c}{\rho g} &= \frac{v^2}{2g} \left( \frac{\alpha_c + \zeta_{о,к}}{\varepsilon^2} \right) - H = \left( \frac{\varphi_{ц,н}^2 (\alpha_c + \zeta_{о,к})}{\varepsilon^2} - 1 \right) H \approx \\ &\approx \left( \frac{0,82^2 (1 + 0,06)}{0,64^2} - 1 \right) H \approx 0,75 H. \end{aligned}$$

То есть вакуум в цилиндрическом насадке  $\frac{p_{\text{ат}} - p_c}{\rho g} = h_{\text{вак}} = 0,75 H$ .

Предельное значение вакуума ограничено возможным наименьшим давлением в сжатом сечении, которое из условий отсутствия

разрыва сплошности жидкости не должно быть меньше давления насыщенных паров жидкости при температуре истечения. Для воды при 20 °С это давление составляет 2,34 кПа. Давление насыщения сильно зависит от температуры, например при 60 °С оно равно 20 кПа.

$$h_{\text{вак.макс}} = \frac{p_{\text{ат}} - p_{\text{н.п}}}{\rho g} \approx 9,7 \text{ м вод. ст.}, \text{ максимальный напор}$$

$$H_{\text{макс}} \approx 13 \text{ м.}$$

При напорах, близких к максимальному, возможно появление кавитации и нарушение сплошности потока. Жидкость отрывается от стенок, воздух поступает в насадок, истечение превращается в истечение из отверстия с острой кромкой с соответствующим уменьшением коэффициента расхода. Такое явление называется **срыв вакуума**.

Срыв вакуума при истечении из насадка — резкое уменьшение коэффициента расхода, связанное с отрывом жидкости от стенок насадка.

Для устойчивой работы практически принимают максимальный вакуум 8 м вод.ст, максимально допустимый напор 10,7 м.

При истечении через затопленный цилиндрический насадок (под уровень) коэффициент расхода при повышении напора меняется мало, отрыва потока не происходит однако при напорах больше критического наблюдается нарушение сплошности потока, образование паровых пузырьков с последующим их захлопыванием в зоне повышенного давления. Такое явление называется **кавитация**.

#### Внутренний цилиндрический насадок (насадок Борда)

Линии тока при входе во внутренний насадок более искривлены, площадь сжатого сечения меньше, коэффициент сжатия меньше, коэффициент расхода меньше.

Коэффициенты зависят от толщины стенок трубы.

Если насадок работает как отверстие с острой кромкой (при малой длине:  $l < 3d$ ),

$$\mu = 0,51, \varphi = 0,97, \varepsilon = 0,53, \zeta = 0,06 \text{ (рис. 1.88, а).}$$

Работающий полным сечением (заполненный, при  $l > 3d$ ) внутренний насадок:

$$\mu = \varphi = 0,71, \varepsilon = 1.$$

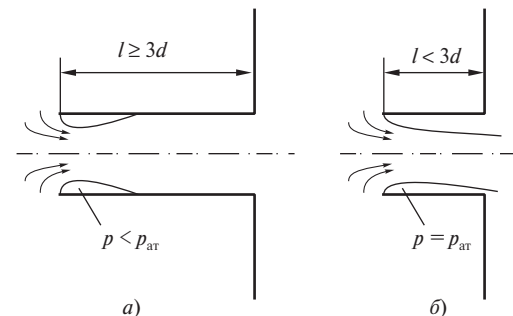


Рис. 1.88. Насадок, работающий как отверстие с острой кромкой (а) и полным сечением (б)

#### Сходящийся конический насадок (конфузор)

Представляет собой усеченный конус с углом при вершине  $\theta$  (рис. 1.89).

Коэффициент расхода определяется для выходного сечения (по выходной площади)

$$Q = \mu F_{\text{вых}} \sqrt{2gH}.$$

Естественно, коэффициент расхода зависит от угла при вершине:  $\mu = \mu(\theta)$ .

Максимальный коэффициент расхода  $\mu_{\text{макс}} = 0,946$  при  $\theta = 13,4^\circ$  ( $13^\circ 24'$ ).

В этом насадке (единственном) коэффициент сжатия струи равен единице.

$$\varepsilon = 0,98, \varphi = 0,965.$$

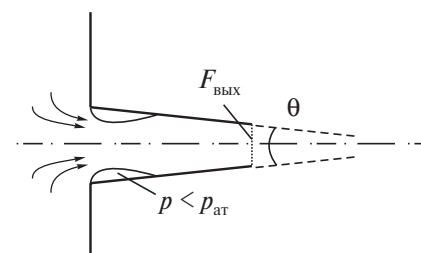


Рис. 1.89. Конфузор

### Коноидальный насадок

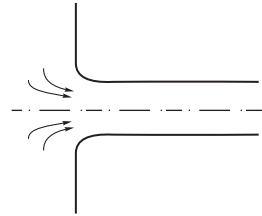


Рис. 1.90. Коноидальный насадок

Имеет сложную форму: вход — по форме вытекающей через отверстие струи, а затем — цилиндр (рис. 1.90).

Сжатие на выходе отсутствует  $\epsilon = 1$ . Коэффициенты  $\mu = \phi = 0,97$ .

### Расходящийся конический насадок (диффузор)

Представляет собой усеченный конус с углом при вершине  $\theta$  (рис. 1.91).

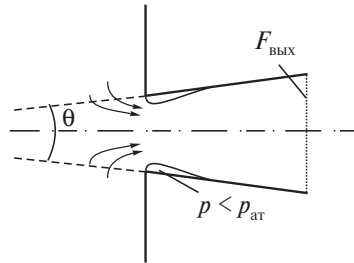


Рис. 1.91

Вакуум в сжатом сечении такого насадка больше, предельный напор меньше.

Обычно принимают  $\theta = 5-7^\circ$ .

Сжатия в выходном сечении нет,  $\epsilon = 1$ .

Коэффициент расхода (по выходной площади)

$$Q = \mu F_{\text{вых}} \sqrt{2gH}, \quad \mu = \phi = 0,45.$$

### 1.4.3. Сравнение гидравлических характеристик отверстий и насадков

Ранее получено  $Q = \mu F \sqrt{2gH}$  и  $v = \phi \sqrt{2gH}$ .

Оценим кинетическую энергию проходящего в единицу времени потока жидкости:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{\rho Q v^2}{2} = \rho g \mu \phi^2 F H \sqrt{2gH}.$$

Получили: при равных площади и напоре расход зависит от  $\mu$ , а кинетическая энергия — от  $\mu \phi^2$ . Данные по коэффициентам истечения сведем в таблицу (табл. 1.4).

$$\zeta = \frac{1}{\phi^2} - 1.$$

Таблица 1.4

### Коэффициенты истечения при больших числах Re

	Наименование	$\epsilon$	$\phi$	$\mu$	$\mu \phi^2$	$\zeta$
1	Отверстие в тонкой стенке	0,64	0,97	0,62	0,583	0,06
2	Внешний цилиндрический насадок	1	0,82	0,82	0,551	0,49
3	Внутренний цилиндрический насадок	1	0,71	0,71	0,356	0,98
4	Конический сходящийся насадок ( $\theta = 13^\circ$ )	0,98	0,97	0,95	0,894	0,06
5	Коноидальный насадок	1	0,97	0,97	0,913	0,06
6	Конический расходящийся насадок ( $\theta = 5-7^\circ$ , данные отнесены к выходному сечению)	1	0,45	0,45	0,091	3,94

Формулу для расхода  $Q = \mu F_{\text{вых}} \sqrt{2gH}$  и коэффициенты в рамке знать наизусть!

Выводы по таблице:

наибольшая скорость истечения — 1, 4, 5; максимальный расход 4, 5; максимальная кинетическая энергия струи — 5; минимальная скорость и кинетическая энергия — 6.

**Жиклер** (франц. «gicleur», от «gicler» — брызнуть), калиброванное отверстие для дозированной подачи жидкого топлива или воздуха. В технической литературе жиклерами называют детали карбюратора (пробки, форсунки) с калиброванными отверстиями.

По выполняемым функциям и в зависимости от того, в какой системе карбюратора он установлен, различают жиклеры топливный, воздушный, главный, компенсационный, холостого хода и др.

Жиклеры оценивают их пропускной способностью (производительностью), т.е. количеством жидкости (обычно воды), которое может пройти через калиброванное отверстие в единицу времени; пропускная способность жиклера выражается в см<sup>3</sup>/мин.

**Гидравлический дроссель** — устройство, устанавливаемое на пути движения жидкости для ограничения ее расхода или изменения давления в канале. Гидравлические дроссели бывают постоянными (нерегулируемыми) и переменными (регулируемыми). К *постоянным* гидравлическим дросселям относятся капилляры, втулки, шайбы, пакеты шайб; к *переменным* — золотниковые пары, дроссели типа «сопло» — заслонка, винтовые дроссели. В зависимости от режима потока жидкости в рабочем канале (ламинарного или турбулентного), гидравлические дроссели могут быть *линейными*, на которых перепад давлений пропорционален расходу жидкости, и *квадратичными*, на которых перепад давлений пропорционален квадрату расхода протекающей жидкости. Гидравлические дроссели применяют для изменения расхода рабочей жидкости с целью регулирования скорости рабочих органов машин; создания требуемых перепадов давления рабочей жидкости в гидросистемах; управления гидроусилителями в следящих гидроприводах.

#### 1.4.4. Активное воздействие струи на неподвижную и подвижную преграду

Потоки жидкости или газа, не имеющие твердых границ, называются *жидкими* или *газовыми струями*.

Классификация: *затопленные* (вода в воде), *незатопленные* (вода в воздухе); *свободные* и *ограниченные* (пристеночные); по форме — *осесимметричные* (круглое сечение) и *плоские*.

Незатопленная струя состоит из трех частей:

- компактная (сплошной цилиндр);
- раздробленная (крупные части);
- распыленная (отдельные капли).

На струю действуют силы тяжести, сопротивления среды, инерционные силы от вихрей турбулентности, поверхностного натяжения.

#### Воздействие струи на неподвижную преграду

Из сопла площадью сечения  $F_0$  со скоростью  $v_0$  вылетает струя жидкости и ударяется о криволинейную преграду.

Струя разбивается на две части, обтекает преграду и со скоростью  $v$  под углом  $\epsilon$  к горизонту покидает преграду. Сила действия струи на преграду  $\vec{P}$ , сила воздействия преграды на струю  $\vec{R}$  (рис. 1.92).

Очевидно  $\vec{R} = -\vec{P}$ .

Применим к жидкости, заключенной между сечениями  $O-O$  и  $I-I$  ( $I'-I'$ ) теорему об изменении количества движения в проекции на ось  $x$ . Изменение количества движения равно импульсу силы:

$$2 \frac{m}{2} v \cos \epsilon - m v_0 = -R \Delta t,$$

где  $\Delta t$  — промежуток времени;  $m$  — масса жидкости, проходящая через сечение за это время. Трением и весом пренебрегаем тогда по закону сохранения энергии  $v = v_0$ . Учитываем, что массовый расход

$\rho Q = \frac{m}{\Delta t}$  и  $P = R$ . Получим

$$P = \rho Q v_0 (1 - \cos \epsilon) \text{ — сила воздействия струи на преграду}$$

Если преграда плоская, то  $\epsilon = 90^\circ$ ,  $\cos \epsilon = 0$  (рис. 1.93)

$$P = \rho Q v_0.$$

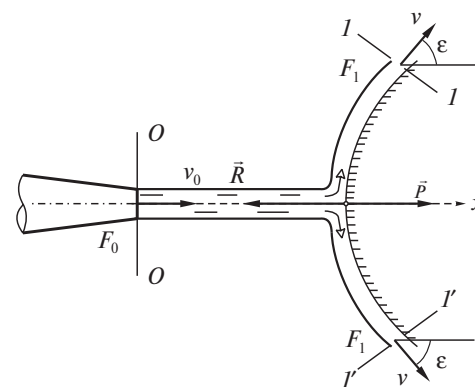


Рис. 1.92. Воздействие струи на неподвижную преграду

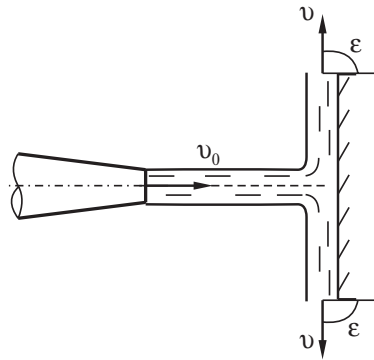


Рис. 1.93. Воздействие струи на плоскую преграду

Если выполнить преграду в виде ковша, то происходит полный разворот потока  $\epsilon = 180^\circ$ ,  $\cos \epsilon = -1$  (рис. 1.94)

$$P = 2\rho Q v_0.$$

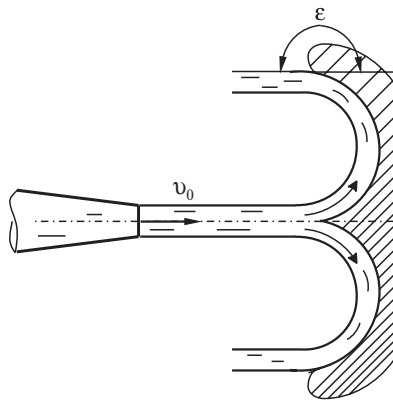


Рис. 1.94. Воздействие струи на подвижную преграду

### Воздействие струи на подвижную преграду

Рассмотрим воздействие струи на систему плоских пластинок (турбинное колесо).

Сила такого воздействия  $P$  (рис. 1.95).

Скорость схода жидкости с пластинки  $v$  (**абсолютная скорость**) может быть представлена как сумма скорости самой пластинки  $u$

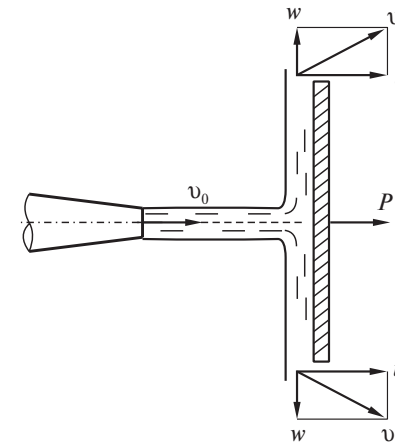


Рис. 1.95

(**переносная скорость**) и скорости движения жидкости по пластинке  $w$  (**относительная скорость**), т.е.

$$v = \sqrt{u^2 + w^2}.$$

По условию сохранения кинетической энергии струи  $w = v_0 - u$ , это скорость, с которой струя ударяется в пластинку.

Сила воздействия струи на пластинку

$$P = \rho Q w = \rho Q (v_0 - u).$$

Мощность, которая передается пластинчатому колесу, равна

$$N = Pu = \rho Q u (v_0 - u).$$

При постоянной плотности  $\rho$ , расходе  $Q$  и скорости струи на выходе из сопла  $v_0$  мощность зависит только от скорости движения пластинки  $u$ , т.е.  $N = f(u)$ , причем зависимость квадратичная (парабола). Ее корни:

- при  $u = 0$  имеем  $P = P_{\text{макс}}$ , однако  $N = 0$ .
- при  $u = v_0$  сила воздействия  $P = 0$  и, следовательно,  $N = 0$ .

Для нахождения значения  $u$ , при котором величина  $P$  максимальна, можно воспользоваться тем, что в точке максимума первая производная функции равна нулю. Раскроем скобки:

$$N = \rho Q v_0 u - \rho Q u^2.$$

$$\frac{dN}{du} = 0. \quad \frac{dN}{du} = \rho Q v_0 - 2\rho Q u = \rho Q (v_0 - 2u) = 0,$$

откуда

$$u_{\max} = \frac{v_0}{2}.$$

Тот же вывод может быть получен без взятия производной, если вспомнить, что парабола имеет максимум посередине между корнями.

Максимальная мощность  $N_{\max} = \rho Q \frac{v_0^2}{4}$  (теоретически, в действительности меньше из-за потерь,  $\eta = 0,92 - 0,96$ ).

Кинетическая энергия струи на выходе из сопла

$$\mathcal{E}_k = \frac{m v_0^2}{2} = \rho Q \frac{v_0^2}{2}.$$

Следовательно, в случае плоской пластинки используется только половина располагаемой энергии струи, оставшаяся половина покидает лопатки с выходной скоростью  $w$ . Чтобы практически полностью использовать энергию струи, следует выполнить лопатки в форме ковша с полным разворотом потока.

Рассмотрим истечение струи из резервуара через отверстие. Скорость струи (без учета потерь) определяется по формуле Торричелли

$$v_0 = \sqrt{2gH},$$

где  $H$  — действующий напор.

Если на пути струи расположить плоскую преграду, то на нее будет действовать сила  $P_1 = \rho Q v_0$ , где  $Q = Fv = F\sqrt{2gH}$ . Окончательно  $P_1 = 2\rho gHF$ . Заметим, что в этом случае на резервуар действует равная по величине и противоположная по направлению сила.

Если отверстие перекрыть неподвижной преградой, то на нее будет действовать сила гидростатического давления, равная произведению давления жидкости в резервуаре на глубине ( $p = \rho gH$ ) на площадь:  $P_2 = \rho gHF$ . Интересно, что величина этой силы в 2 раза меньше, чем сила действия струи.

### 1.4.5. Подобие гидромеханических процессов

Обычно гидравлические исследования явлений, происходящих в натуральных условиях (в натуре), проводят в лабораториях на моделях, воспроизводя их в том или ином масштабе.

В результате исследований на моделях получают поправочные коэффициенты к теоретическим формулам или эмпирические формулы, отражающие зависимости между отдельными параметрами, которые характеризуют изучаемое явление.

**При гидравлическом моделировании** — исследуется не сам поток, сооружение или машина, а их модели, выполненные обычно в уменьшенном масштабе.

Различают физическое, аналоговое и численное моделирование.

1. *Физическое* моделирование.

При физическом моделировании на модели исследуют явление, имеющее ту же физическую природу, что и в натуре (например, истечение воды через водослив в натуре и на модели).

2. *Аналоговое* моделирование.

При аналоговом моделировании явления в натуре и на модели имеют разную физическую природу, однако описываются аналогичными системами математических уравнений (например напорное движение грунтовых вод и распределение электрического потенциала в проводнике). Ранее для моделирования физических процессов широко использовались аналоговые вычислительные машины (АВМ), представляющие собой набор электрических элементов, соединяемых в электрические цепи.

3. *Численное* моделирование.

Численное моделирование представляет собой решение гидравлических задач с помощью численных методов на ЭВМ без выполнения лабораторных исследований.

*Общие условия механического подобия.* Явления будут механически подобны, если в них одинаково отношение всех геометрических элементов (размеров, расстояний, перемещений), одинаково отношение плотностей, кинематических параметров (скоростей, ускорений) и сил, действующих в соответствующих точках и направлениях.

Для полного механического подобия явлений (потоков) необходимо их геометрическое, кинематическое и динамическое подобие.

1. **Геометрическое подобие:** между соответствующими линейными размерами существует постоянное соотношение  $l_n/l_m = M_l$ .

Тогда соотношение площадей можно записать так:

$$F_n / F_m = M_F = M_l^2.$$

Отношение объемов

$$V_n / V_m = M_V = M_l^3.$$

В геометрически подобной модели русла все размеры, в том числе и высота  $\Delta$  выступов шероховатости, должны быть меньше, чем в натуре, в  $M_l$  раз, и следовательно, в подобных потоках относительная шероховатость такая же, как и в натуре:  $\Delta/R = \text{idem}$ .

2. При **кинематическом подобии** подобны поля скоростей и ускорений.

Если некоторая жидкая частица в натуре за интервал времени  $T_n$  проходит участок траектории  $l_n$ , то для подобия необходимо, чтобы соответствующая жидкая частица на модели за некоторое (другое) время  $T_m$  прошла отрезок траектории  $l_m$ .

При этом отношение между интервалами времени  $T_n / T_m = M_t$ .

Для скоростей сходственных точек  $v_n / v_m = M_v$ , для ускорений  $a_n / a_m = M_a$ . Скорости и ускорения должны быть представлены одинаково ориентированными в пространстве векторами.

Отметим, что с учетом геометрического подобия:

$$M_v = \frac{M_l}{M_t}, \quad M_a = \frac{M_v}{M_t} = \frac{M_l}{M_t^2}.$$

3. Для **динамического подобия** необходимо, чтобы силы, действующие на любую пару сходственных элементов, были подобны:  $P_n / P_m = M_p$ .

Потоки жидкости, удовлетворяющие одновременно условиям геометрического, кинематического и динамического подобия, называют **гидродинамически подобными**, а коэффициенты пропорциональности  $M$  — **масштабными множителями**.

#### 1.4.6. Закон подобия Ньютона

Выбор всех масштабных множителей для подобных потоков не является произвольным. Между ними имеется определенная связь.

Равнодействующую сил, действующих на произвольно взятую жидкую частицу, можно выразить через произведение массы на ускорение, причем массу представим как произведение плотности на объем. В масштабных множителях имеем  $M_p = M_\rho M_l^3 M_a$ . Мас-

штабный множитель ускорения можно выразить через масштабные множители длины и времени:

$$M_a = \frac{M_l}{M_t^2},$$

тогда

$$M_p = \frac{M_\rho M_l^4}{M_t^2}.$$

Заметим, что  $M_l^2 / M_t^2 = M_v^2$ , тогда  $M_p = M_\rho M_l^2 M_v^2$ .

$$\frac{M_p}{M_\rho M_l^2 M_v^2} = 1. \quad \text{— закон подобия Ньютона в масштабных множи-}$$

телях.

Заменим масштабные множители соответствующими отношениями:

$$\frac{P_n}{\rho_n l_n^2 v_n^2} = \frac{P_m}{\rho_m l_m^2 v_m^2} \quad \text{или} \quad Ne_n = Ne_m,$$

где  $Ne = \frac{P}{\rho l^2 v^2}$  — **критерий Ньютона**.

Гидродинамическое подобие явлений требует равенства критериев Ньютона, соответствующих модели и натуре.

#### Критерии подобия

На частицу жидкости в общем случае действуют силы тяжести, трения, давления.

1. *Сила тяжести* => *число Фруда*.

Сила тяжести пропорциональна массе и ускорению свободного падения. Масса есть произведение плотности на объем (куб линейного размера частицы):

$$G = mg = \rho g V \approx \rho g l^3.$$

В масштабных множителях

$$M_G = M_\rho M_g M_l^3.$$

Учитывая  $M_p = M_\rho M_l^2 M_v^2$  и полагая, что сила тяжести является преобладающей силой, имеем



$$M_p M_l^2 M_v^2 = M_p M_g M_l^3,$$

откуда

$$\frac{M_v^2}{M_g M_l} = 1.$$

Заменяем масштабные множители соответствующими отношениями и вводим число Фруда

$$Fr = \frac{v^2}{gl}; \quad Fr = \frac{\text{сила энергии}}{\text{сила тяжести}}.$$

Геометрически подобные потоки, в которых преобладает действие сил тяжести, можно считать динамически подобными, если будут равны числа Фруда для сходственных сечений обоих потоков. Записывается:  $Fr_n = Fr_m$  или  $Fr = \text{idem}$ .

Если положить, что  $M_g = 1$ , то

$$M_v = M_l^{0,5} \text{ или } v_n = v_m M_l^{0,5} \text{ (если } M_l = 100, \text{ то } v_n = 10v_m),$$

$$M_Q = M_F M_v = M_l^2 M_l^{0,5} = M_l^{2,5} \text{ (если } M_l = 100, \text{ то } Q_n = 10^5 Q_m).$$

2. Сила трения => число Рейнольдса.

Закон вязкого трения Ньютона для касательного напряжения

$$\tau = \pm \mu \frac{dv}{dy}.$$

Сила трения есть произведение касательного напряжения на площадь:  $T \approx \mu \frac{dv}{dy} F \approx \mu v l$ . В масштабных множителях  $M_T = M_\mu M_v M_l$ .

Учитывая  $M_p = M_p M_l^2 M_v^2$  и полагая, что силы инерции являются преобладающими силами, имеем

$$M_p M_l^2 M_v^2 = M_\mu M_v M_l,$$

откуда (учитывая, что  $\mu = \rho \nu$ )

$$\frac{M_l M_v}{M_\nu} = 1.$$

$$\text{Число Рейнольдса } Re = \frac{l v}{\nu}; \quad Re = \frac{\text{сила инерции}}{\text{сила трения}}.$$

3. Сила давления => число Эйлера.

Сила давления пропорциональна гидродинамическому давлению  $p$  и площади  $F$ :  $P = pF \approx p l^2$ . В масштабных множителях

$$M_P = M_p M_l^2$$

Учитывая (\*) и полагая, что силы давления являются преобладающими силами, имеем

$$M_p M_l^2 M_v^2 = M_p M_l^2,$$

откуда

$$\frac{M_p}{M_p M_v^2} = 1.$$

$$\text{Критерий Эйлера } Eu = \frac{p}{\rho v^2}; \quad Eu = \frac{\text{сила давления}}{\text{сила инерции}}.$$

Кроме перечисленных есть еще много других критериев подобия. Перечислим некоторые из них.

**Критерий Вебера** (силы поверхностного натяжения).

**Критерий Архимеда** (подъемная сила — сила Архимеда).

**Критерий Маха** (число Маха) (влияние сжимаемости при обтекании тела потоком, отношение скорости тела (потока) к скорости звука.  $M = 1$  — граница, больше — сверхзвуковой поток).

**Критерий Коши** (действие упругих сил — гидравлический удар в трубах).

**Критерий Струхали** (неустановившееся движение).

**Критерий Лагранжа** (медленное течение вязких жидкостей).

**Число Прандтля** (теплопроводность).

#### 1.4.7. Советы по моделированию

В реальности не удастся обеспечить учет более чем одного критерия подобия.

Рассмотрим, например, одновременное выполнение критериев

Фруда и Рейнольдса. Критерий Фруда  $Fr = \frac{v^2}{gl}$ .

В масштабных множителях  $\frac{M_v^2}{M_g M_l} = 1$ .

Предположим, что  $M_g = 1$ . Тогда для подобия необходимо  $M_v = \sqrt{M_l}$ .

Критерий Рейнольдса  $Re = \frac{l v}{\nu}$ . В масштабных множителях  $\frac{M_l M_v}{M_\nu} = 1$ . С учетом полученного из критерия Фруда соотношения получим  $M_v = M_l^{1.5}$ .

Если предположить, что  $M_l = 10$ , то необходимо обеспечить вязкости  $M_\nu = 10^{1.5} = 31,6$ . Выполнить это условие практически невозможно. Разумеется, можно попытаться поменять  $M_g$  (ранее мы предположили, что  $M_g = 1$ ), однако успех еще более проблематичен.

При моделировании в первую очередь важно решить, какие силы являются доминирующими в моделируемом явлении, тем самым выбрать определяющий критерий подобия.

Безнапорные потоки — сила тяжести — критерий Фруда.

Напорные потоки — сила трения — критерий Рейнольдса.

При турбулентном движении в квадратичной области сопротивления характер течения не зависит от числа  $Re$  (это явление называется «автомодельность»).

В этом случае условия подобия определяются при  $Eu = \text{idem}$  и  $\lambda = \text{idem}$  (неизменность коэффициента Шези).

С помощью теории моделирования удается создать лабораторную модель так, что процессы, происходящие в ней, подобны процессам, происходящим в натуре. Зная масштабные множители, можно перевести значения параметров, измеренные на модели, в натуральный масштаб (модель судна в бассейне, модель гидроэлектростанции в лаборатории).

## Тема 1.5 ТРУБОПРОВОДЫ

### 1.5.1. Гидравлический расчет трубопроводов

Различные способы расчета потерь. Рассматривается равномерное напорное движение жидкости в круглой трубе. При равномерном движении форма и площадь живого сечения, средняя скорость потока и эпюра скоростей по длине не изменяются. В этих условиях живое сечение характеризуется одним линейным размером — диаметром.

*Напомним:*  $d = 4R_r$ .

Общая формула для потерь напора по длине имеет вид

$$h_l = \lambda \frac{l}{4R_r} \frac{v^2}{2g}.$$

Для круглых труб  $h_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$ .

Это установленная экспериментально формула Дарси–Вейсбаха. Безразмерный коэффициент  $\lambda$  называют коэффициентом гидравлического трения или коэффициентом Дарси. Коэффициент гидравлического трения зависит от относительной шероховатости трубопровода и числа  $Re$ :

$$\lambda = \lambda \left( \frac{\Delta_{\text{э}}}{d}, Re \right).$$

Для нахождения  $\lambda$  существуют эмпирические формулы (режимы ламинарный — переходный — турбулентный; область гидравлически гладких труб, доквадратичная область, квадратичная область).

При равномерном движении жидкости средняя скорость потока, не изменяющаяся по длине, из формулы  $h_l = \lambda \frac{l}{4R_r} \frac{v^2}{2g}$  равна

$$v = \sqrt{\frac{8g R_r h_l}{\lambda l}}.$$

Обозначим  $\sqrt{\frac{8g}{\lambda}} = C$ .

Коэффициент  $C$  называют **коэффициентом Шези**. Вспомним, что гидравлический уклон  $J = \frac{h_l}{l}$ , и получим формулу Шези для средней скорости при равномерном движении:

$$v = C \sqrt{R_r J},$$

где  $C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$ .

Потери напора по длине с учетом коэффициента Шези

$$h_l = \frac{v^2 l}{C^2 R_r}.$$

Коэффициент Шези, в отличие от безразмерного коэффициента Дарси  $\lambda$ , имеет размерность  $[C] = L^{0,5} T^{-1}$ . В справочниках приводятся таблицы значений коэффициента Шези для трубопроводов различного диаметра и различной шероховатости. Существует много эмпирических формул для расчета коэффициента Шези.

Зная формулу для средней скорости потока, получим формулу Шези для расхода при равномерном движении:

$$Q = Fv = FC \sqrt{R_r J}.$$

При расчете трубопровода обычно составляют уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости. Пренебрегая местными потерями и скоростными напорами, получаем  $H = h_l$ .

Вспомним, что гидравлический уклон  $J = \frac{h_l}{l}$ , откуда  $J = \frac{H}{l}$ . Подставим найденное значение гидравлического уклона в формулу Шези для скорости потока  $v = C \sqrt{R_r J}$ .

$$v = C \sqrt{\frac{R_r H}{l}}.$$

Решаем уравнение относительно напора

$$H = \frac{v^2 l}{C^2 R_r}.$$

Заметим на будущее, что напор пропорционален квадрату скорости.

Запишем формулу Шези для расхода при равномерном движении:

$$Q = FC \sqrt{R_r J}.$$

Объединим параметры, зависящие от диаметра трубопровода, представим их виде так называемой расходной характеристики трубопровода (модуля расхода):

$$K = FC \sqrt{R_r}.$$

**Расходная характеристика**  $K$  представляет собой расход в данной трубе при гидравлическом уклоне, равном единице.

Тогда расход  $Q = K \sqrt{J}$ , напор  $H = \frac{Q^2}{K^2} l$ .

При этом расход  $Q$  и расходная характеристика  $K$  должны быть выражены в одних и тех же единицах. В таблицах для гидравлических расчетов приводятся значения расходной характеристики  $K$  для трубопроводов различного диаметра с различной относительной шероховатостью. На этой основе производится расчет трубопроводов «с использованием таблиц».

Получим значение  $K$  расчетным путем. Гидравлический уклон равен единице, значит, потери равны длине,  $h = l$ . Потери по длине

$$h = \lambda \frac{l v^2}{d 2g}.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{\frac{2dg}{\lambda}}; K = Q = vF; F = \frac{\pi d^2}{4}; K = \pi \sqrt{\frac{d^5 g}{8\lambda}}.$$

В квадратичной области турбулентного режима  $\lambda = 0,11 \left( \frac{\Delta_0}{d} \right)^{0,25}$ .

*Замечание.* При равномерном движении гидравлический и пьезометрический уклоны равны. Пренебрегая скоростным напором, получим, что линия полного напора и пьезометрическая линия совпадают.

## 1.5.2. Классификация трубопроводов

**Простой трубопровод** — трубопровод, не имеющий ответвлений и состоящий из труб одинакового диаметра, выполненных из одного материала.

Приведем два примера простых трубопроводов.

Движение жидкости в трубе обусловлено напором  $H$ , равным разности напоров в резервуаре-питателе и приемнике (рис. 1.96) или разности напоров в резервуаре-питателе и в струе на выходе из трубы, если резервуар-приемник отсутствует (рис. 1.97). Если указанная разность напоров не изменяется во времени, то движение установившееся. Мы рассматриваем расчет только трубопроводов с установившимся движением.

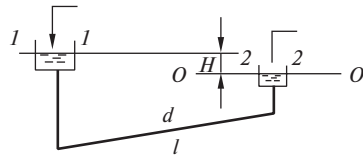


Рис. 1.96. Трубопровод с резервуаром-питателем

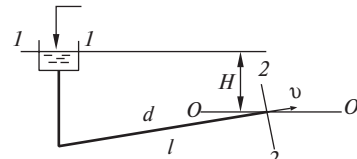


Рис. 1.97. Трубопровод без резервуара-питателя

Потери напора в трубопроводе можно рассматривать как сумму потерь на трение по длине трубопровода и потерь в местных сопротивлениях:  $\Delta h = h_l + h_m$ .

По соотношению потерь по длине и в местных сопротивлениях в общей величине потерь трубопроводы делятся на гидравлически короткие и гидравлически длинные.

В *гидравлически длинном* (или просто *длинном*) трубопроводе потери напора по длине настолько превышают местные потери (и скоростной напор), что местные потери не вычисляются, а принимают как некоторую часть потерь по длине.

Практически при расчете длинных трубопроводов находят потери напора по длине  $h_l$ , а затем суммарные местные потери напора учитывают, увеличивая найденное значение  $h_l$  на 5–10%:  $\Delta h = (1,05 \div 1,1) h_l$ .

В *гидравлически коротком* трубопроводе потери напора по длине и местные потери сопоставимы по значению. При гидравлическом расчете коротких трубопроводов учитывают как местные потери напора, так и потери по длине, а в балансе напоров учитывают скоростные напоры в сечениях потока.

### 1.5.3. Классификация задач расчета трубопроводов

При расчете простого трубопровода необходимо установить связь следующих характеристик:

- диаметр трубопровода  $d$ ;
- располагаемый напор  $H$ ;
- объемный расход жидкости  $Q$ ;
- средняя скорость жидкости  $v$ .

Задачи по расчету трубопроводов подразделяются на задачи проектирования и задачи эксплуатации. Полагается, что длина трубопровода во всех случаях известна.

**Задачи проектирования:** определение диаметра трубопровода, напора или давления на одном из его концов при заданной скорости жидкости в трубе или ее расходе.

**Задачи эксплуатации:** определение эксплуатационных характеристик (расход, скорость жидкости) готового (существующего в натуре или в проекте) трубопровода с известным диаметром и шероховатостью, а также с определенными напорами (давлениями) на концах трубы.

По методу расчета задачи подразделяют на прямые и обратные.

При решении *прямых задач* искомые величины находятся по расчетным формулам в явном виде. В *обратных задачах* искомую величину в явном виде выразить не удастся, решение находят с помощью итерационных процедур.

**Расчетные формулы.** Располагаемый напор равен потерям. Потери складываются из потерь по длине и потерь в местных сопротивлениях. Потери по длине определяются по формуле Дарси–Вейсбаха (первая водопроводная формула). Потери в местных сопротивлениях суммируются по всем местным сопротивлениям и зависят от коэффициента потерь в каждом из них  $\zeta_i$ . Получаем формулу, которая связывает среднюю скорость и располагаемый напор:

$$H = \Delta h; \Delta h = \Delta h_l + \Delta h_m; \Delta h_l = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}; \Delta h_m = \sum_i \zeta_i \frac{v^2}{2g};$$

$$H = \Delta h = \left( \lambda \frac{l}{d} + \sum_i \zeta_i \right) \frac{v^2}{2g}.$$

При расчете трубопровода «с использованием таблиц»  $H = \frac{Q^2}{K^2} l$ , где расходная характеристика  $K$  берется из таблиц.

По определению средняя скорость потока  $v = \frac{Q}{F}$ .

Очевидно  $Q = vF = v \frac{\pi d^2}{4}$ .

$$\text{Число Рейнольдса } Re = \frac{vd\rho}{\mu}, \text{ или } Re = \frac{vd}{\nu}.$$

Значения динамической вязкости и плотности или кинематической вязкости жидкости при данной температуре известны.

Коэффициент сопротивления трения (коэффициент Дарси) определяется по эмпирическим формулам и зависит от  $Re$  и абсолютной эквивалентной шероховатости  $\Delta_3$ , которая для данного вида труб (материала, исполнения) известна (задается в справочниках, для новых стальных труб  $\Delta_3 = 0,2$  мм, для старых водопроводных труб  $\Delta_3 = 1,5$  мм).

Применение тех или иных эмпирических формул определяется режимом движения жидкости (числом  $Re$ ), а при турбулентном режиме — областью сопротивления.

I — ламинарный режим движения.

Границы:  $Re \leq Re_{кр} = 2320$ .

$$\text{Формула } \lambda = \frac{64}{Re}.$$

II — переходный режим движения.

Границы:  $2320 < Re < 4000$ .

$$\text{Формула: } \lambda = \frac{2,7}{Re^{0,53}}.$$

III — область гладких труб.

$$\text{Границы: } 4000 < Re < 20 \frac{d}{\Delta_3}.$$

$$\text{Формула Блазиуса: } \lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}}.$$

IV — область доквадратичного сопротивления (или переходная).

$$\text{Границы: } 20 \frac{d}{\Delta_3} < Re < 500 \frac{d}{\Delta_3}.$$

$$\text{Формула Альтшуля: } \lambda = 0,11 \left( \frac{\Delta_3}{d} + \frac{68}{Re} \right)^{0,25}.$$

V- область квадратичного сопротивления (или шероховатых труб).

$$\text{Границы: } 500 \frac{d}{\Delta_3} < Re.$$

$$\text{Формула Шифринсона: } \lambda = 0,11 \left( \frac{\Delta_3}{d} \right)^{0,25}.$$

#### 1.5.4. Расчет простого трубопровода

Задачи, чаще всего встречающиеся в практике, приведены ниже (четыре параметра, два заданы, два оставшихся определяются расчетом; число различных сочетаний из 4 по 2 равно 6).

Известны (заданы)	Требуется определить	Вид задачи	Характеристика
$d$ и $v$	$H$ и $Q$	Прямая	Проектная
$d$ и $Q$	$H$ и $v$	Прямая	Проектная
$Q$ и $v$	$H$ и $d$	Прямая	Проектная
$H$ и $d$	$Q$ и $v$	Обратная	Эксплуатационная
$H$ и $Q$	$d$ и $v$	Обратная	Проектная
$H$ и $v$	$d$ и $Q$	Обратная	Учебная

Решение прямых задач начинается с нахождения числа  $Re$ .

Задача 1.  $d$  и  $v \Rightarrow Re$ .

Задача 2.  $d$  и  $Q \Rightarrow v \Rightarrow Re$ .

Задача 3.  $Q$  и  $v \Rightarrow d \Rightarrow Re$ .

Дальнейший алгоритм расчета одинаков:  $Re \Rightarrow \lambda \Rightarrow H$ .

При решении обратных задач «без использования таблиц» не удается получить аналитического решения. Следует применить итерационную процедуру, т.е. задаться искомым значением, а затем уточнить его.

Выражение для располагаемого напора следует решить относительно скорости:

$$v = \sqrt{\frac{2gH}{\lambda \frac{l}{d} + \sum_i \zeta_i}}.$$

Задача 4 (подбираем скорость):

$H, d \Rightarrow$  задаемся  $v \Rightarrow Re \Rightarrow \lambda \Rightarrow H_v$  (больше/меньше заданного)  $\Rightarrow$  новое  $v$ .

Задача 5 (подбираем диаметр):

$H, Q \Rightarrow$  задаемся  $d \Rightarrow v \Rightarrow Re \Rightarrow \lambda \Rightarrow H_d$  (больше/меньше заданного)  $\Rightarrow$  новое  $d$ .

Задача 6 (подбираем диаметр):

$H, v \Rightarrow$  задаемся  $d \Rightarrow Re \Rightarrow \lambda \Rightarrow H_d$  (больше/меньше заданного)  $\Rightarrow$  новое  $d$ .

В учебных целях рекомендуется сопровождать решение графической иллюстрацией процесса последовательных приближений. Для этого по имеющимся расчетным данным следует изобразить следующие зависимости:

Задача 4.  $H = f(v)$ .

Задачи 5 и 6.  $H = f(d)$ .

Графоаналитический метод решения задач обратного типа состоит в следующем (на примере задачи 4). Задаемся значением скорости  $v$ , находим напор  $H$ , который, разумеется, отличается от заданного в условии. Если полученное значение меньше заданного, то увеличиваем скорость; если больше, то уменьшаем. Повторяем расчет. Строим в масштабе зависимость  $H = f(v)$ . Для построения зависимости необходимо не менее трех точек. Из полученной графической зависимости находим значение  $v$ , которому соответствует заданный напор  $H$ . Производим проверку найденного значения.

### 1.5.5. Последовательное соединение трубопроводов

Рассмотрим систему из последовательно соединенных длинных труб различных диаметров и длин. В общем случае материал труб может быть различным (различная шероховатость).

Заданы расход  $Q$ , диаметры труб и длины участков. Расходные характеристики труб  $K_i$  известны. По трубопроводу, составленному из последовательно соединенных труб, проходит не изменяющийся по длине транзитный расход  $Q$  (рис. 1.98). На каждом  $i$ -м участке рассматриваемого трубопровода для пропуска расхода  $Q$  затрачивается часть суммарного напора  $H$ , равная

$$H_i = \frac{Q^2}{K^2} l_i = h_{li},$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$  — номер участка.

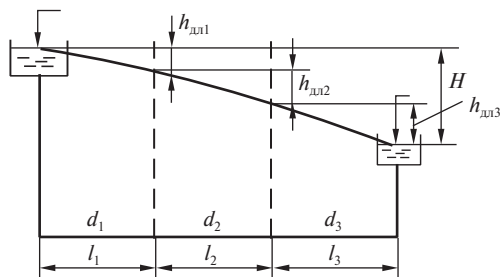


Рис. 1.98. Последовательное соединение трубопроводов

Поскольку местными потерями пренебрегаем, напор  $H$  затрачивается на преодоление потерь напора по длине и будет равен сумме потерь напора на отдельных участках

$$H = \sum_i H_i = Q^2 \sum_i \frac{l_i}{K_i^2}.$$

*Вывод.* Для последовательного соединения расход одинаков, а напор равен сумме напоров.

Аналогия — последовательное соединение сопротивлений; ток одинаков, а напряжения суммируются.

### Параллельное соединение трубопроводов

Рассмотрим систему из параллельно соединенных длинных труб. Между точками  $M$  и  $N$  проходит несколько труб.

Заданы общий расход  $Q$ , длины, диаметры, материал (шероховатость) и расходные характеристики труб (рис. 1.99).

Разность пьезометрических напоров в начале и конце труб составляет напор  $H$ , полностью затрачиваемый на преодоление сопротивлений. На каждом участке трубы движение происходит под действием одного и того же напора. Но, так как длины участков различны, гидравлические уклоны на каждом участке будут различны.

Расход, проходящий по любому участку,  $Q_i = K_i \sqrt{\frac{H}{l_i}}$ . Для всех участков имеем  $n$  уравнений для  $Q_i$ . Сумма расходов на отдельных участках должна быть равна общему расходу, поступающему в систему параллельно соединенных трубопроводов в точке  $M$  и выходящему из системы в точке  $N$ .

$$Q = \sum_i Q_i = \sqrt{H} \sum_i K_i \sqrt{l_i}.$$

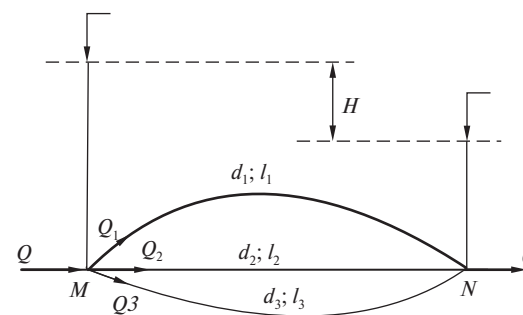


Рис. 1.99. Параллельное соединение трубопроводов

Таким образом, имеем  $n+1$  уравнение, из которых может быть найден необходимый напор и расход в каждом из параллельных участков. Распределение расходов между участками заранее не известно. Поэтому все расходы выражают через какой-нибудь один, например через  $Q_1$ . Имеем

$$\frac{Q_i}{Q_1} = \frac{K_i}{K_1} \sqrt{\frac{l_1}{l_i}},$$

откуда

$$Q_i = Q_1 \frac{K_i}{K_1} \sqrt{\frac{l_1}{l_i}}.$$

Суммарный расход

$$Q = Q_1 \left( 1 + \sum_{i=2}^n \frac{K_i}{K_1} \sqrt{\frac{l_1}{l_i}} \right).$$

Отсюда находим  $Q_1$  и все остальные расходы.

**Вывод.** Для параллельного соединения напор одинаков, а расход равен сумме расходов.

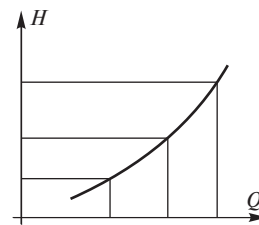
Аналогия — параллельное соединение сопротивлений: напряжение одинаково, а токи суммируются.

#### **Расходная характеристика участка трубопровода**

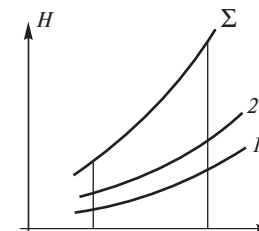
Зависимость напора от расхода  $H = f(Q)$  называется **расходной характеристикой** участка трубопровода. Она может быть получена аналитически или с помощью таблиц. Как правило, построение расходной характеристики производится по точкам. Задаются различными значениями расхода и находят потери напора на данном участке трубопровода. Строят зависимость  $H = f(Q)$ , которая позволяет найти расход по заданному напору (рис. 1.100).

Для последовательного соединения трубопроводов расходная характеристика может быть получена как сумма напоров характеристик отдельных участков. По ней для заданного напора можно найти расход и напоры на участках трубопровода (рис. 1.101).

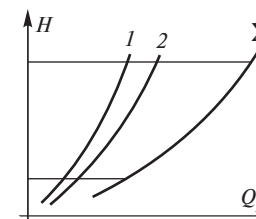
Для параллельного соединения трубопроводов расходная характеристика может быть получена как сумма расходов отдельных участков. По ней для заданного напора можно найти расходы в ветвях и суммарный расход (рис. 1.102).



**Рис. 1.100.** Расходная характеристика участка трубопровода



**Рис. 1.101.** Расходная характеристика для последовательного соединения трубопроводов



**Рис. 1.102.** Расходная характеристика для параллельного соединения трубопроводов

#### **Расчет трубопровода с непрерывным изменением расхода по длине**

Часто встречаются случаи, когда по длине трубопровода происходит раздача некоторой части или всего расхода, причем отбор жидкости (воды) потребителями происходит в нескольких сечениях по длине трубопровода. К таким трубопроводам относятся городские и сельские водопроводы, поливные трубопроводы, подающие воду в каждую борозду через отверстия, трубопроводы различных технических систем, в том числе внутрпочвенного и капельного орошения. Собирающие трубопроводы (дренажные коллекторы) работают с увеличением расхода по длине.

**Трубопроводы с непрерывной равномерной раздачей воды вдоль пути** характеризуются тем, что точки разбора находятся на одинаковом расстоянии друг от друга, а расходы разбора в этих точках одинаковы. При этом удельный путь расход на единицу длины составляет  $q_0$  (рис. 1.103).

Общий (полный) расход  $Q_0$ , поступающий к начальному сечению трубопровода, состоит из двух: путевого  $Q_{\text{путь}}$ , который разбирается по длине  $l$ , и транзитного  $Q_{\text{тр}}$ , проходящего через данный участок:



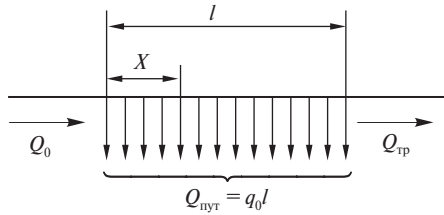


Рис. 1.103. Трубопровод с непрерывным изменением расхода по длине

$$Q_0 = Q_{\text{пут}} + Q_{\text{тр}},$$

при этом

$$Q_{\text{пут}} = q_0 l.$$

Определим потери напора  $h_l$  на таком участке.

В любом сечении на расстоянии  $x$  от начала разбора расход составит

$$Q_x = Q_{\text{тр}} + Q_{\text{пут}} \left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

Гидравлический уклон

$$J = \frac{dh_l}{dx} = \frac{Q_x^2}{K^2},$$

откуда

$$dh_l = \frac{Q_x^2}{K^2} dx.$$

Для нахождения потерь напора на длине  $l$  интегрируем полученное выражение в пределах от 0 до  $l$ :

$$h_l = \int_0^l \frac{Q_x^2}{K^2} dx = \frac{1}{K^2} \int_0^l Q_x^2 dx.$$

Раскроем подынтегральное выражение:

$$\begin{aligned} \int_0^l Q_x^2 dx &= \int_0^l \left[ Q_{\text{тр}} + Q_{\text{пут}} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \right]^2 dx = \\ &= Q_{\text{тр}}^2 \int_0^l dx + 2Q_{\text{тр}} Q_{\text{пут}} \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) dx + Q_{\text{пут}}^2 \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= Q_{\text{тр}}^2 l + 2Q_{\text{тр}} Q_{\text{пут}} l - 2Q_{\text{тр}} Q_{\text{пут}} \frac{l^2}{2l} + Q_{\text{пут}}^2 l - 2Q_{\text{пут}}^2 \frac{l^2}{2l} + Q_{\text{пут}}^2 \frac{l^3}{3l^2} = \\ &= \left( Q_{\text{тр}}^2 + Q_{\text{тр}} Q_{\text{пут}} + \frac{Q_{\text{пут}}^2}{3} \right) \cdot l. \end{aligned}$$

Подставляем значение интеграла в формулу для потерь напора:

$$h_l = \frac{Q_{\text{тр}}^2 + Q_{\text{тр}} Q_{\text{пут}} + \frac{Q_{\text{пут}}^2}{3}}{K^2} \cdot l.$$

Введем понятие расчетного расхода:  $Q_p = \sqrt{Q_{\text{тр}}^2 + Q_{\text{тр}} Q_{\text{пут}} + \frac{Q_{\text{пут}}^2}{3}}$ .

Окончательно расчетная зависимость имеет вид

$$H = h_l = \frac{Q_p^2}{K^2} l.$$

Расчетный расход больше транзитного, но меньше полного расхода в начале трубопровода.

В практических расчетах для упрощения принимают

$$Q_p = Q_{\text{тр}} + 0,55Q_{\text{пут}}.$$

### Оптимальные диаметр трубопровода и средняя скорость

Необходимость определения диаметра трубопровода возникает в задачах проектирования. Один и тот же расход может быть подан через трубопровод большего диаметра с меньшими потерями напора или наоборот. Оптимальный диаметр трубопровода определяется по сопоставлению капитальных и эксплуатационных затрат.

С увеличением диаметра возрастают **капитальные** затраты (точнее — **амортизационные**) — кривая К (рис. 1.104).

С увеличением диаметра при заданном расходе снижается средняя скорость потока, а с ней и энергия, затрачиваемая на преодоление гидравлического сопротивления. **Эксплуатационным** (прежде всего **энергетическим**) затратам отвечает кривая Э. Оптимальным является диаметр трубопровода, при котором суммарные затраты (кривая  $\Sigma$ ) минимальны.

На рис. 1.104 минимуму кривой  $\Sigma$  отвечает точка  $A$ ; значит, следует подбирать трубопровод, близкий по диаметру к оптимальному:  $d_{\text{опт}} = d_A$ .

Заметим, что в учебниках иногда ошибочно определяют  $d_{\text{опт}}$  как абсциссу точки  $B$ ; несмотря на возможную близость в каких-то случаях к  $d_{\text{опт}}$ , диаметр  $d_B$ , отвечающий равенству капитальных и эксплуатационных затрат, вообще говоря, никакого интереса не представляет.

Сравнение капитальных и эксплуатационных затрат не всегда возможно из-за отсутствия необходимой информации. На практике используют таблицу рекомендуемых предельных скоростей и предельных расходов (табл. 1.5) (таблица приводится выборочно).

Таблица 1.5

Рекомендуемые предельные скорости и расходы

Диаметр трубопровода, мм	Рекомендуемая предельная скорость, м/с	Рекомендуемый предельный расход, л/с
50	0,96	1,88
100	1,15	9,03
200	1,34	42,1
500	1,45	284
1000	1,68	1280

Таблица применима для стальных труб, прокладываемых в центральных и западных районах России. Для районов Сибири и Урала приведенные в таблице расходы и скорости увеличивают на 10–15%, а для Южных районов СНГ уменьшают на 10%. Причины: в Сибири и на Урале более дешевая электроэнергия, но большие капиталовложения в строительство трубопроводов в связи с большой глубиной прокладки труб; в южных районах СНГ более дорогая электроэнергия, но меньшие затраты на строительство.

**Кольцевые и тупиковые водопроводные сети.** Водопроводные сети, по которым вода из водонапорной башни поступает к потребителям, делят на разветвленные (тупиковые) и кольцевые.

*Разветвленные* трубопроводы состоят из основной магистрали и отходящих от узлов сети ответвлений, которые могут состоять из одной линии (простые ответвления) или нескольких участков трубопроводов (сложные ответвления) (рис. 1.105).

Городские водопроводы обычно выполняются в виде *кольцевых* сетей, обеспечиваются водой от двух и более водонапорных башен  $B$ .

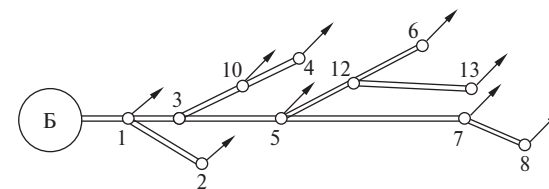


Рис. 1.105. Разветвленный трубопровод

В узлах 1–9 находятся потребители (например, жилые массивы, предприятия и т.п.) (рис. 1.106).

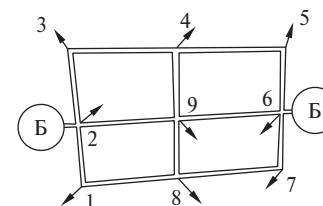


Рис. 1.106. Кольцевой трубопровод

Кольцевая сеть позволяет осуществлять водоснабжение всех потребителей в случае аварии или ремонта отдельных участков водопроводной сети. При этом, конечно, потребности в воде будут удовлетворяться не полностью, а, например, на несколько часов в сутки, причем иногда обеспечиваются лишь нижние этажи зданий и т.п., но все же водоснабжение не будет отключено полностью на все время ремонта, что может произойти, если сеть тупиковая.

Строительными нормами и правилами рекомендуется обеспечивать пьезометрический напор не менее 10 м при одноэтажной застройке, добавляя 4 м на каждый этаж.

### Расчет разветвленного трубопровода

Определить расход жидкости, протекающей по разветвленному трубопроводу в пункты 1 и 2 (истечение в атмосферу). Напор в резервуаре постоянен и известен. Длины и диаметры отдельных участков трубопровода известны. Кинематическая вязкость жидкости и абсолютная эквивалентная шероховатость известны. Местными потерями напора и скоростным напором пренебречь (рис. 1.107).

*Примечания.*

1. Как правило, задается не кинематическая вязкость, а вид жидкости и рабочая температура. Кинематическую вязкость берут по таблицам в справочниках.

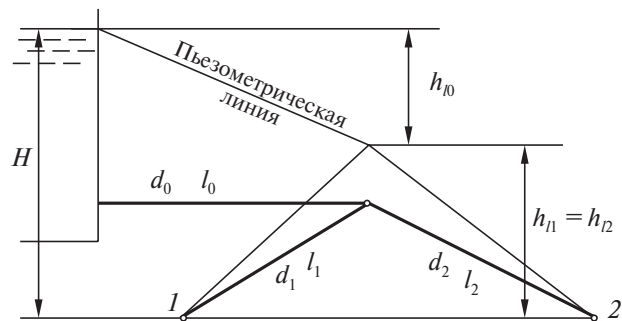


Рис. 1.107. Схема для расчета разветвленного трубопровода

2. При истечении в атмосферу нет потерь на вход в бак, однако в точных расчетах необходимо учитывать скоростной напор выходящей из трубы жидкости. Если им пренебречь и не учитывать местные потери, то весь располагаемый напор равен сумме потерь напора по длине в общем трубопроводе и в разветвленной части (в двух трубопроводах разветвления напор одинаков, однако длины и/или диаметры различны, а значит различны средние скорости и расходы).

*Решение.*

В разветвленном трубопроводе сохраняется баланс расходов:

$$Q_0 = Q_1 + Q_2.$$

Неизвестны два расхода, третий находится по балансу. Потери в ветвях разветвляющейся части одинаковы, т.е.  $h_{11} = h_{12}$ . Располагаемый напор  $H = h_{10} + h_1$ . Потери в каждом трубопроводе рассчитываются по формуле Дарси–Вейсбаха

$$h_{li} = \lambda_i \frac{l_i}{d_i} \frac{v_i^2}{2g}.$$

Расход по участку  $Q_i = F_i v_i$ . Площади  $F_i$  известны.

Тогда

$$h_{li} = \lambda_i \frac{l_i}{d_i} \frac{Q_i^2}{2gF_i^2}.$$

В первом приближении примем, что режим движения жидкости в трубопроводе турбулентный, область сопротивления — квадратичная (в дальнейшем это утверждение будет уточнено). Коэффициент

Дарси для каждого диаметра может быть определен по формуле Шифринсона

$$\lambda_i = 0,11 \left( \frac{\Delta \rho}{d} \right)^{0,25}.$$

Потери в каждом участке трубопровода могут быть найдены через его расходную характеристику, причем последняя не берется из таблиц, а определяется аналитически:

$$h_i = \frac{Q_i^2}{K_i^2} l_i.$$

Здесь расходная характеристика  $K_i = F_i \sqrt{\frac{2gd_i}{\lambda_i}}$ .

Получим шесть уравнений с шестью неизвестными (расходы и потери напора в участках)

$$h_0 = \frac{Q_0^2}{K_0^2} l_0; \quad h_1 = \frac{Q_1^2}{K_1^2} l_1; \quad h_2 = \frac{Q_2^2}{K_2^2} l_2;$$

$$Q_0 = Q_1 + Q_2; \quad h_1 = h_2; \quad H = h_0 + h_1.$$

Несложные алгебраические преобразования приводят к следующим результатам:

$$Q_1 = \sqrt{\frac{H}{\left(1 + \frac{K_2}{K_1} \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}\right)^2 \frac{l_0}{K_0^2} + \frac{l_1}{K_1^2}}}; \quad Q_2 = Q_1 \frac{K_2}{K_1} \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}; \quad Q_0 = Q_1 + Q_2.$$

Уточнение полученных результатов производится в следующей последовательности. Находят средние скорости во всех участках трубопровода, числа Re. Определяют область гидравлического сопротивления, в которой работает каждый участок, и по соответствующим эмпирическим формулам (Блазиуса, Альтшуля, Шифринсона и др.) вычисляют значение коэффициента Дарси. Уточняют значения расходных характеристик участков  $K_i$  и вновь вычисляют расходы по участкам.

Такой способ позволяет получить решение с любой требуемой точностью.

### Графоаналитический способ решения задачи

Задаются начальным приближением по скорости. Пусть, например, скорость по участку 1  $v_1 = 2$  м/с.

Скорость по участку 2 определяют из простой пропорции (равенство потерь по длине при одинаковом коэффициенте Дарси):

$$v_2 = v_1 \sqrt{\frac{l_1 d_2}{l_2 d_1}}.$$

Находим расход по участкам и общий расход, а также скорость на участке 0.

На каждом участке находим число  $Re$ , определяем область сопротивления и по соответствующей формуле находим коэффициент Дарси. Вычисляем потери по длине на каждом участке.

#### 1.5.5. Гидравлический удар

**Гидравлическим ударом** называется скачкообразное повышение давления в трубопроводе (гидросистеме), вызванное резким изменением скорости жидкости.

Название «гидравлический удар» явление получило потому, что резкое изменение давления может сопровождаться сотрясением трубы и появлением звука, сходного со звуком удара молотком по твердому телу.

В конце XIX в. после завершения строительства в Москве Рублевской водонапорной станции участились случаи разрыва труб, заложенных глубоко в земле. Первое время аварии объясняли плохим качеством изготовления водопроводных труб. Однако и после замены разрушенных труб новыми аварии не прекратились. Это заставило начальника Московского водопровода обратиться за помощью к профессору Н.Е. Жуковскому<sup>1</sup>, который в то время являлся членом комиссии, решавшей проблему улучшения водоснабжения в г. Москве.

Н.Е. Жуковским была впервые разработана теория гидравлического удара в трубах, основные положения которой изложены в статье «О гидравлическом ударе в водопроводных трубах» (1898).

Явление гидравлического удара рассмотрим на примере трубопровода длиной  $l$ , диаметром  $d$ , в котором под действием напора

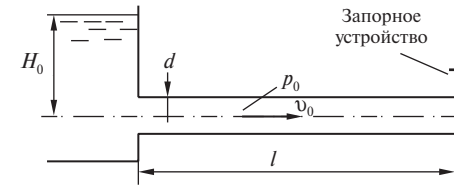
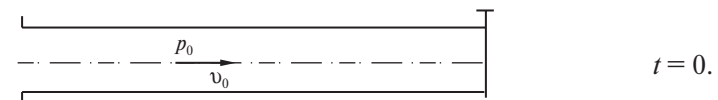


Рис. 1.108. К определению гидравлического удара

в баке  $H_0$  движется вода со средней скоростью  $v_0$  (рис. 1.108). Давление воды  $p_0$ . На конце трубопровода расположено запорное устройство (затвор, кран, клапан и т.д.).

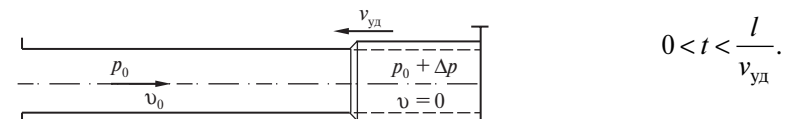
Примем следующие допущения:

- размеры резервуара велики, уровень в нем остается постоянным независимо от явлений, происходящих в трубопроводе.
- начальное давление в трубопроводе практически постоянно и равно  $p_0 = \rho g H$ ;
- движение воды в трубопроводе считаем одномерным, т.е. все местные скорости считаем равными средней скорости, а давления — одинаковыми во всех точках живого сечения. Характеристики такого движения зависят только от продольной координаты;
- потери напора и скоростной напор малы, поэтому пьезометрическая линия практически совпадает с горизонтальной линией. Давление воды  $p_0$  практически постоянно по длине трубы. В момент времени  $t_0$  затвор мгновенно закрылся.



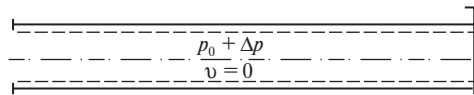
Жидкость продолжает двигаться с прежней скоростью. Слои, непосредственно примыкающие к затвору останавливаются ( $v = 0$ ), давление повышается ( $p = p_0 + \Delta p$ ), происходит сжатие жидкости и деформация стенок трубопровода. Кинетическая энергия движущейся воды переходит в потенциальную энергию сжатия воды и деформации стенок резервуара.

Такой процесс распространяется по всей трубе в сторону резервуара со скоростью  $v_{уд}$ .



<sup>1</sup> Жуковский Николай Егорович (1847–1921) — русский ученый, основоположник современной гидро- и аэромеханики.

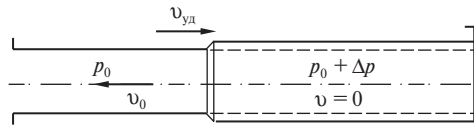
Процесс повышения давления достиг резервуара. Происходит мгновенный останов под повышенным давлением.



$$t = \frac{l}{v_{уд}}$$

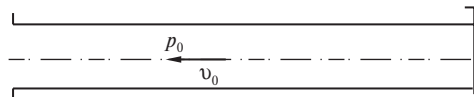
Это состояние неравновесное (неустойчивое). В трубе давление повышенное, стенки растянуты. Начинается процесс выхода воды обратно в резервуар, снижения давления до первоначального. Потенциальная энергия переходит в кинетическую.

Процесс распространяется в сторону запорного устройства со скоростью  $v_{уд}$ .



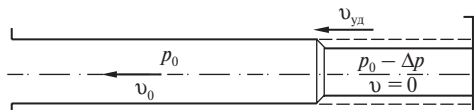
$$\frac{l}{v_{уд}} < t < \frac{2l}{v_{уд}}$$

Процесс восстановления давления достиг запорного устройства. Деформаций нет. Скорость направлена от запорного устройства в бак.



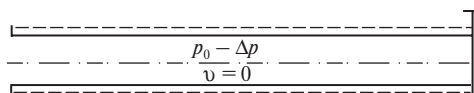
$$t = \frac{2l}{v_{уд}}$$

Инерция движущейся массы воды приведет к понижению давления у запорного устройства. Предполагается, что не происходит нарушения целостности столба воды. Происходит постепенная остановка жидкости и деформация стенок трубопровода. Такой процесс распространяется по всей трубе в сторону резервуара со скоростью  $v_{уд}$ .



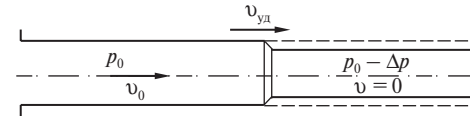
$$\frac{2l}{v_{уд}} < t < \frac{3l}{v_{уд}}$$

Процесс понижения давления достиг резервуара. Мгновенный останов под пониженным давлением.



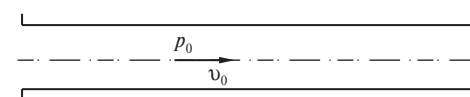
$$t = \frac{3l}{v_{уд}}$$

Это состояние неустойчиво. В трубе давление ниже, чем в резервуаре, стенки сжаты. Начинается процесс входа воды в трубопровод, повышения давления до первоначального и устранения деформации трубопровода. Потенциальная энергия переходит в кинетическую. Процесс распространяется в сторону запорного устройства со скоростью  $v_{уд}$ .



$$\frac{3l}{v_{уд}} < t < \frac{4l}{v_{уд}}$$

Процесс восстановления давления достиг запорного устройства. Деформаций нет. Скорость направлена из бака в сторону запора.



$$t = \frac{4l}{v_{уд}}$$

Цикл завершен. Восстановлено начальное состояние ( $t = 0$ ). Процесс повторяется.

В реальных условиях колебания постепенно затухают.

*Определения.*

**Гидравлический удар** — явление резкого изменения давления, возникающее при напорном движении жидкости в трубе вследствие быстрого изменения скорости в одном из сечений.

**Скорость ударной волны** — скорость распространения волны изменения давления вдоль трубопровода.

**Фаза удара** — время, за которое волна изменения давления проходит весь трубопровод и возвращается обратно:  $\tau = \frac{2l}{v_{уд}}$ . Различают фазу повышенного давления и фазу пониженного давления.

**Положительный гидравлический удар** — начинается с фазы повышения давления. Нами рассмотрен положительный гидроудар, за движка в конце трубопровода.

**Отрицательный гидравлический удар** — начинается с фазы понижения давления. Если резко закрыть задвижку в начале трубопровода, то произойдет аналогичный процесс скачкообразного изменения давления, однако он начнется с понижения давления за задвижкой. То же происходит при резкой остановке насоса.

### 1.5.6. Повышение давления. Формула Жуковского

Надо найти повышение давления при гидравлическом ударе  $\Delta p$ , именно оно приводит к разрушению трубопровода. Пусть гидравлический удар вызван резким уменьшением средней скорости в трубопроводе от  $v_0$  до  $v$ . Здесь мы изучаем более общий случай — не полной остановки жидкости, а лишь резкого снижения скорости.

Запорное устройство находится справа.

Оно резко прикрито (не закрыто полностью).

Волна повышения давления движется справа налево со скоростью  $v_{уд}$  и за время  $\Delta t$  проходит расстояние  $\Delta x$  (рис. 1.109).

Первоначальная скорость жидкости  $v_0$  уменьшается до  $v$ , что приводит к повышению давления на величину  $\Delta p$  от  $p_0$  до  $p_0 + \Delta p$ .

Применим к массе жидкости в участке трубы  $\Delta x$  теорему об изменении количества движения в проекции на ось  $x$ . Изменение количества движения равно импульсу внешних сил:

$$\Delta(mv) = (P_{лев} - P_{прав})\Delta t.$$

Здесь  $m$  — масса воды, заключенная в участке трубы длиной  $\Delta x$  до прохождения через этот участок ударной волны. Объем  $V = \Delta x F$ . Масса  $m = \rho V = \rho \cdot \Delta x \cdot F$ .

Изменение количества движения этой массы вызвано уменьшением скорости от  $v_0$  до  $v$

$$\Delta(mv) = m(v - v_0).$$

На левую грань действует сила  $P_{лев} = p_0 F$ , на правую грань —  $P_{прав} = (p_0 + \Delta p) F$ .

Запишем уравнение  $\rho \cdot \Delta x \cdot F (v - v_0) = -\Delta p \cdot F \cdot \Delta t$ .

Выразим повышение давления  $\Delta p = \rho(v_0 - v) \frac{\Delta x}{\Delta t}$ .

Путь на время — это скорость распространения ударной волны  $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_{уд}$ .

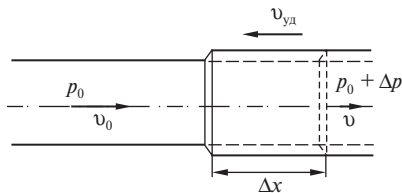


Рис. 1.109. Повышение давления

Получаем формулу

$$\Delta p = \rho(v_0 - v)v_{уд} —$$

формула Жуковского для повышения давления при гидравлическом ударе.

Повышение давления при гидроударе пропорционально плотности жидкости, изменению ее скорости ( $v_0$  — начальная скорость  $v$  — конечная скорость, задвижка не полностью закрыта) и скорости распространения ударной волны, которая, в свою очередь, зависит от свойств жидкости и трубопровода (см. ниже).

Максимальное повышение давления будет при быстрой полной остановке потока:  $v = 0$ :

$$\Delta p_{\max} = \rho v_0 v_{уд}.$$

Если  $v = v_0$ , то  $\Delta p = 0$ , повышения давления не происходит, гидроудара нет.

### 1.5.7. Скорость распространения ударной волны

Определим скорость распространения ударной волны в упругом трубопроводе круглого поперечного сечения. Рассмотрим отсек длиной  $\Delta x$ , через который проходит ударная волна за время  $\Delta t$  (рис. 1.110).

В течение времени  $\Delta t$  жидкость одновременно втекает слева и вытекает справа, но с разными скоростями. Поступление через левую грань происходит со скоростью  $v_0$ , одновременно через правую грань жидкость выходит с меньшей скоростью  $v$ . За время  $\Delta t$  в рассматриваемый отсек войдет дополнительный объем жидкости  $\Delta V = F(v_0 - v)\Delta t$ . Этот вошедший объем займет пространство, образовавшееся вследствие растяжения стенок трубопровода  $\Delta V_1$  и за счет сжатия жидкости в отсеке  $\Delta V_2$ , т.е.  $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$ .

При растяжении стенок радиус трубы станет равным  $r_0 + \Delta r$ , площадь увеличится на величину  $\Delta F$ . Тогда  $\Delta V_1 = \Delta F \Delta x$ .

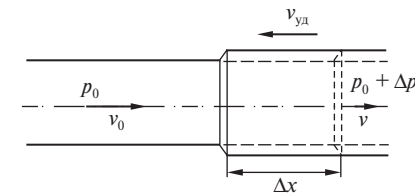


Рис. 1.110. К определению скорости распространения ударной волны

При повышении давления на величину  $\Delta p$  первоначальный объем жидкости в отсеке  $F\Delta x$  уменьшится на величину  $\Delta V_2 = \beta_p F \Delta x \Delta p$ . Здесь  $\beta_p$  — коэффициент объемного сжатия (см. «Свойства жидкостей», «Сжимаемость»). Величина, обратная коэффициенту объемного сжатия, — модуль упругости жидкости  $E_{\text{ж}} = \frac{1}{\beta_p}$ .

Получим

$$\Delta V_2 = \frac{F \Delta x \Delta p}{E_{\text{ж}}}.$$

Имеем

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2.$$

Подставляем

$$F(v_0 - v)\Delta t = \Delta F \Delta x + \frac{F \Delta x \Delta p}{E_{\text{ж}}}.$$

Разделим на объем отсека  $F\Delta x$ , получим

$$(v_0 - v) \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta p}{E_{\text{ж}}}.$$

Ранее получено

$$\Delta p = \rho(v_0 - v)v_{\text{уд}},$$

откуда

$$v_0 - v = \frac{\Delta p}{\rho v_{\text{уд}}}.$$

Очевидно, что  $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_{\text{уд}}$ .

Получим

$$\frac{\Delta p}{\rho v_{\text{уд}}^2} = \frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta p}{E_{\text{ж}}}.$$

Отсюда

$$v_{\text{уд}} = \sqrt{\frac{\frac{\Delta p}{\rho}}{\frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta p}{E_{\text{ж}}}}}.$$

Перейдем к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$v_{\text{уд}} = \sqrt{\frac{\frac{dp}{\rho}}{\frac{dF}{F} + \frac{dp}{E_{\text{ж}}}}}.$$

Приведем полученную формулу к удобному для использования виду.

Из геометрических соображений

$$\frac{dF}{F} = \frac{d(\pi r^2)}{\pi r^2} = \frac{2\pi r dr}{\pi r^2} = 2 \frac{dr}{r}.$$

Считаем, что модули упругости материала стенки трубопровода  $E_{\text{ст}}$  и жидкости  $E_{\text{ж}}$  не зависят от давления.

Деформации подчиняются закону Гука<sup>2</sup>, в наших обозначениях  $\frac{dr}{r_0} = \frac{d\sigma}{E_{\text{ст}}}$ .

Напряжение в стенке трубы, вызванное действием давления («контральная» формула)  $\sigma = \frac{pD}{2\delta}$ .

Здесь  $D$  — диаметр трубопровода,  $\delta$  — толщина стенки.

Перейдем к приращениям  $d\sigma = \frac{D}{2\delta} dp$ .

Последовательно подставляем:

<sup>2</sup> Роберт Гук (1635–1703), английский естествоиспытатель и изобретатель. Считается отцом экспериментальной физики. Сформулировал закон пропорциональности между силой, приложенной к упругому телу, и его деформацией.

$$\frac{dF}{F} = 2 \frac{dr}{r_0} = 2 \frac{d\sigma}{E_{ст}} = \frac{D}{\delta} \frac{dp}{E_{ст}}; \quad v_{уд} = \sqrt{\frac{\frac{dp}{\rho}}{\frac{D}{\delta} \frac{dp}{E_{ст}} + \frac{dp}{E_{ж}}}}$$

Умножаем числитель и знаменатель на  $E_{ж}$ :

$$v_{уд} = \frac{\sqrt{\frac{E_{ж}}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{D E_{ж}}{\delta E_{ст}}}} \quad \text{— формула Н.Е. Жуковского для скорости распространения ударной волны}$$

Здесь  $E_{ж}$  и  $E_{ст}$  — модуль упругости жидкости и материала стенки трубопровода. Модуль упругости для воды  $E_{воды} = 2 \cdot 10^3$  МПа, для стали — на два порядка выше:  $E_{стали} = 2,1 \cdot 10^5$  МПа, для минеральных масел немного меньше, чем у воды, и зависит от вязкости.

$D$  — внутренний диаметр трубы,  $\delta$  — толщина стенки трубопровода.

Величина  $\sqrt{\frac{E_{ж}}{\rho}} = a_{ж}$  — скорость звука в жидкости.

Для воды скорость звука, т.е. скорость распространения звука в воде,  $a_{воды} = 1425$  м/с; для бензина 1200 м/с, для минеральных масел — того же порядка.

Скорость распространения звука в воздухе 340 м/с.

Время закрытия запорного устройства влияет на повышение давления при гидроударе.

Изменение давления перед затвором при мгновенном закрытии затвора представлено на рис. 1.111. Фаза удара  $\tau = \frac{2l}{v_{уд}}$ .

Изменение давления перед затвором при постепенном закрытии затвора представлено на рис. 1.112. Время закрытия затвора

$$t_{закр} < \tau = \frac{2l}{v_{уд}}.$$

Изменение давления перед затвором при медленном закрытии затвора представлено на рис. 1.113. Время закрытия затвора

$$t_{закр} > \tau = \frac{2l}{v_{уд}}.$$

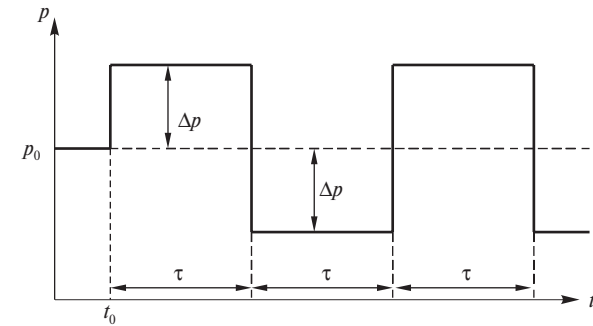


Рис. 1.111. Изменение давления перед затвором при его мгновенном закрытии

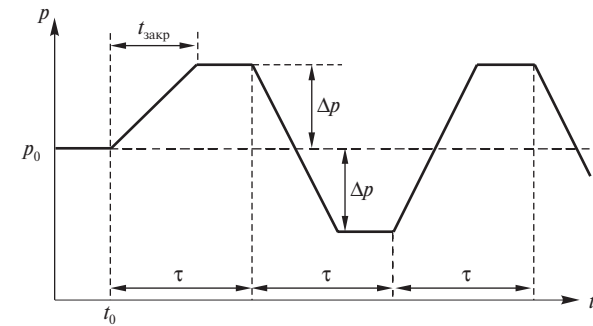


Рис. 1.112. Изменение давления перед затвором при его постепенном закрытии

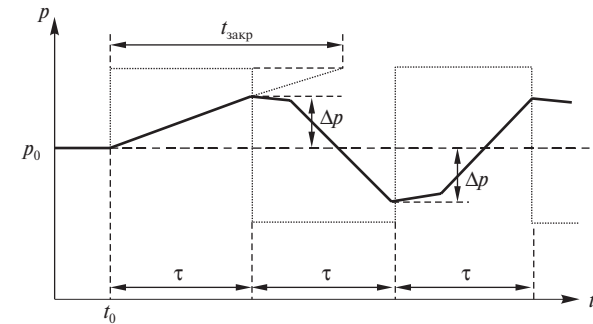


Рис. 1.113. Изменение давления перед затвором при его медленном закрытии



Рассмотрим следующие определения.

**Прямой гидроудар** — время полного закрытия задвижки меньше продолжительности фазы гидроудара:

$$t_{\text{закр}} < \tau = \frac{2l}{v_{\text{уд}}}; \Delta p = \rho v_0 v_{\text{уд}}.$$

**Непрямой гидроудар** — время полного закрытия задвижки больше продолжительности фазы гидроудара

$$t_{\text{закр}} > \tau = \frac{2l}{v_{\text{уд}}}, \Delta p_{\text{мах}} = \rho v_0 v_{\text{уд}} \frac{\tau}{t_{\text{закр}}}.$$

### 1.5.8. Способы ослабления гидравлического удара

**Рекомендации Н.Е. Жуковского из его работы «О гидравлическом ударе в водопроводных трубах».** «Простейшим способом ограждения водопровода от гидравлических ударов является приспособление к медленному закрытию кранов. При этом продолжительность закрытия должна быть пропорциональна длине труб. Воздушные колпаки надежных размеров, поставленные при кранах и задвижках, почти совершенно уничтожат гидравлический удар».

1. Медленное закрытие запорного устройства (следует из формулы для непрямого удара).

В лабораторных работах № 1 и № 6 имеется пробковый кран, а в лабораторной работе № 3 — шаровой клапан. При быстром их закрытии происходит гидравлический удар и вода выплескивается из пьезометров и обливает шкалу. Поэтому закрывать надо медленно.

При испытаниях центробежного насоса при быстром закрытии шарового крана слышен хлопок, это гидроудар (при быстром закрытии водопроводного крана иногда возникает вибрация труб).

2. Применение предохранительных клапанов прямого действия (гидроклапана давления Г54 — в гидроприводе).

3. Применение специальных защитных клапанов (рис. 1.114).

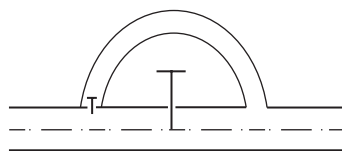


Рис. 1.114. Защитный клапан

В ответственных трубопроводах для недопущения гидравлического удара используются специальные устройства. При закрытии запорного устройства от повышения давления перед ним приоткрывается перепускной клапан и жидкость обводится.

4. Использование гидропневмоаккумуляторов (рис. 1.115).

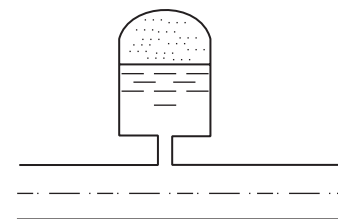


Рис. 1.115. Гидропневмоаккумулятор

5. Увеличение толщины стенок, чтобы труба выдержала повышение давления, вызванное гидравлическим ударом.

### 1.5.9. Полезное использование гидравлического удара

**Гидравлический таран** — неэнергоемкий механизм для подъема воды.

Гидравлический таран состоит из ударного клапана 1, нагнетательного клапана 2, воздушного колпака 3. Через питающую трубу 4 таран соединяется с бассейном 5, через нагнетательный трубопровод 6 — с приемным резервуаром 7 (рис. 1.116).

Представим, что в начальный момент времени нагнетательный и ударный клапаны закрыты, избыточное давление в воздушном колпаке  $p_k = \rho g H_2$ , а вода в питающей трубе 4 неподвижна. Для того

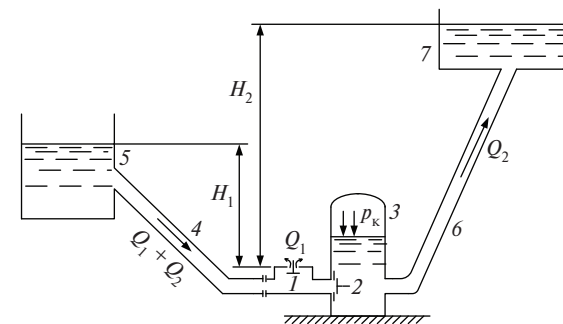


Рис. 1.116. Гидравлический таран

чтобы таран начал автоматически работать необходимо один раз открыть ударный клапан 1.

Через клапан 1 происходит истечение воды, скорость которой вследствие инерции воды, находящейся в питающей трубе 4, постепенно увеличивается. С увеличением скорости истечения сила, действующая на клапан 1 снизу вверх, также увеличивается и, как только она превышает вес самого клапана, он резко закрывается. Происходит гидравлический удар. Давление в трубе 4 перед нагнетательным клапаном 2 повышается, клапан 2 открывается, и вода под повышенным давлением поступает в воздушный колпак 3, сжимая в нем воздух, и через нагнетательный трубопровод 6 — в приемный резервуар 7. Волна повышения давления, вызванная гидравлическим ударом при закрытии клапана 1, движется по трубопроводу 4 до резервуара 5, вызывая остановку воды в этом трубопроводе. Когда обратная волна понижения давления достигает камеры перед нагнетательным клапаном 2, этот клапан закрывается, но автоматически открывается клапан 1. Начинается новый цикл.

Таран работает автоматически. Он использует энергию падающей воды для подъема части этой воды на необходимую высоту.

Если через  $Q_1$  обозначить расход воды, сбрасываемый через ударный клапан 1, а через  $Q_2$  — расход воды, поступающий в приемный резервуар, то коэффициент полезного действия гидравлического тарана

$$\eta = \frac{Q_2 H_2}{(Q_1 + Q_2) H_1}.$$

Высота  $H_2 = (2-10)H_1$ . При этом расход  $Q_2 = (0,4-0,07)Q_1$ ,  $\eta = 0,85-0,2$ . Вода подается на высоту до 40 м.

Надо отметить, что работа гидравлического тарана сопровождается большими непроизводительными потерями воды.

### 1.5.10. Графоаналитический способ расчета трубопровода

На одном графике строим расходные характеристики участков 1 и 2 (рис. 1.117). Эти участки соединены параллельно, суммарная характеристика строится путем суммирования расходов при одинаковом напоре (кривая 1+2). На этом же графике строим характеристику участка 0. Этот участок соединен с участком 1+2 последовательно, суммарная характеристика всего трубопровода строится.

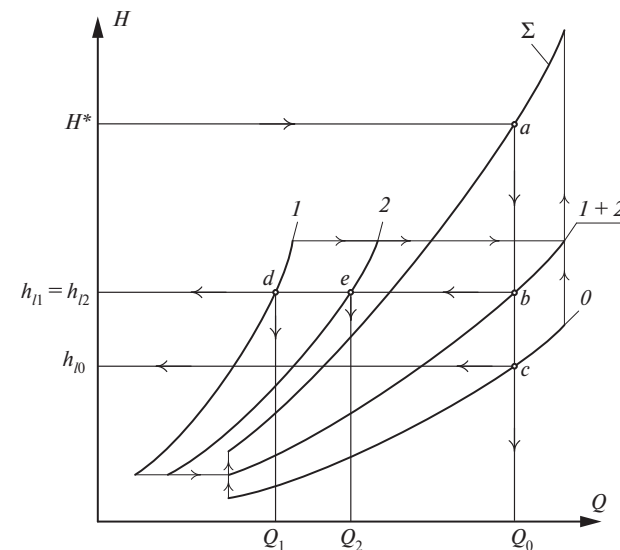


Рис. 1.117. Расходные характеристики участков трубопровода

суммированием напоров при одинаковом расходе (кривая  $\Sigma$ ). По заданному суммарному напору  $H^*$  по кривой  $\Sigma$  находим расход через весь трубопровод и через участок 0 (линия  $H^* - a - b - c - Q_0$ ). Точке  $b$  соответствует напор на участках 1 и 2, точке  $c$  напор на участке 0. Пересечение горизонтали через точку  $b$  с характеристиками трубопроводов 1 и 2 определяет расходы в них. (Линии  $b - d - Q_1$  и  $b - e - Q_2$ ).

Рассмотренный графоаналитический способ расчета не дает точного решения, однако позволяет разработать алгоритм его нахождения с использованием средств вычислительной техники.

### Контрольные вопросы

1. Понятие жидкости. Реальная и идеальная жидкость.
2. Основные физические свойства реальной жидкости. Особые состояния жидкости.
3. Гидростатическое давление. Его свойства.
4. Основное уравнение гидростатики.
5. Потенциальная энергия жидкости, потенциальный напор.
6. Сила гидростатического давления, действующая на плоскую фигуру любой формы.

7. Сила гидростатического давления, действующая на цилиндрические поверхности.
8. Закон Паскаля.
9. Простейшие гидравлические машины.
10. Равновесие плавающих тел. Закон Архимеда.
11. Уравнение Бернулли.
12. Уравнение неразрывности потока жидкости.
13. Режимы движения жидкости, их особенности.
14. Потери напора. Гидравлические сопротивления.
15. Классификация и расчет трубопроводов.

# СОДЕРЖАНИЕ

## Раздел 1 ГИДРАВЛИКА

<b>Тема 1.1. Основы гидростатики</b> .....	<b>3</b>
1.1.1. Общие сведения и краткая история развития.....	3
1.1.2. Основные физические свойства жидкостей и газов.....	4
1.1.3. Силы, действующие на жидкость.....	12
1.1.4. Дифференциальные уравнения равновесия жидкости Эйлера.....	17
1.1.5. Давление абсолютное, избыточное и вакуумметрическое .....	19
1.1.6. Закон Паскаля .....	25
1.1.7. Относительное равновесие .....	26
1.1.8. Приборы для измерения давления .....	30
1.1.9. Эпюры гидростатического давления.....	35
1.1.10. Сила гидростатического давления жидкости на плоские поверхности.....	36
1.1.11. Сила гидростатического давления жидкости на криволинейные стенки .....	40
1.1.12. Закон Архимеда.....	43
<b>Тема 1.2. Основы гидродинамики</b> .....	<b>46</b>
1.2.1. Общие сведения и краткая история развития.....	46
1.2.2. Основные понятия кинематики.....	49
1.2.3. Виды движения жидкости .....	52
1.2.4. Уравнение постоянства расхода для потока жидкости и газа.....	54
1.2.5. Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости в дифференциальной форме.....	55
1.2.6. Дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости Л. Эйлера .....	57
1.2.7. Уравнение Бернулли.....	60
1.2.8. Понятие об уклонах.....	67
1.2.9. Дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости Навье–Стокса .....	68
1.2.10. Общая интегральная форма уравнения количества движения и момента количества движения.....	72
1.2.11. Приборы для измерения скорости и расхода.....	73
<b>Тема 1.3. Движение реальных жидкостей</b> .....	<b>81</b>
1.3.1. Гидравлические сопротивления.....	81
1.3.2. Основное уравнение равномерного движения жидкости .....	86
1.3.3. Режимы движения жидкости. Опыты Рейнольдса. Число Рейнольдса .....	89
1.3.4. Ламинарный режим движения жидкости.....	93
1.3.5. Турбулентный режим движения .....	100
1.3.6. Возникновение дополнительных касательных напряжений. Теория турбулентности Прандтля .....	103
1.3.7. Общее уравнение касательного напряжения .....	105
1.3.8. Понятие о гидравлически гладких и шероховатых поверхностях.....	107
1.3.9. Формула гидравлического сопротивления по длине трубопровода.....	108
1.3.10. Эмпирическое изучение потерь напора по длине трубы. Опыты Никурадзе .....	108

1.3.11. Формулы для определения коэффициента гидравлического трения.....	110
1.3.12. Дифференциальные уравнения движения реальной жидкости при турбулентном режиме — уравнения Рейнольдса.....	111
<b>Тема 1.4. Истечение жидкостей .....</b>	<b>116</b>
1.4.1. Истечение жидкости через отверстия и насадки.....	116
1.4.2. Насадки .....	123
1.4.3. Сравнение гидравлических характеристик отверстий и насадков.....	130
1.4.4. Активное воздействие струи на неподвижную и подвижную преграду.....	132
1.4.5. Подобие гидромеханических процессов .....	137
1.4.6. Закон подобия Ньютона .....	138
1.4.7. Советы по моделированию .....	141
<b>Тема 1.5. Трубопроводы.....</b>	<b>143</b>
1.5.1. Гидравлический расчет трубопроводов.....	143
1.5.2. Классификация трубопроводов .....	145
1.5.3. Классификация задач расчета трубопроводов.....	146
1.5.4. Расчет простого трубопровода .....	149
1.5.5. Гидравлический удар .....	160
1.5.6. Повышение давления. Формула Жуковского .....	164
1.5.7. Скорость распространения ударной волны .....	165
1.5.8. Способы ослабления гидравлического удара .....	170
1.5.9. Полезное использование гидравлического удара .....	171
1.5.10. Графоаналитический способ расчета трубопровода.....	172
Контрольные вопросы .....	173

*Учебное издание*

*Кирилл Александрович Рейтер*

## **ТЕРМОДИНАМИКА, ТЕПЛОПЕРЕДАЧА И ГИДРАВЛИКА**

**Часть 2  
ГИДРАВЛИКА**

**Учебник**

Оригинал-макет подготовлен в Издательстве «КУРС»

Подписано в печать 00.00.2019.

Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Гарнитура Newton.  
Печать цифровая. Усл. печ. л. 0,0. Тираж 500 экз. Заказ №

ТК 695744-990935-000019

ООО Издательство «КУРС»

127273, Москва, ул. Олонская, д. 17А, офис 104.

Тел.: (495) 203-57-83.

E-mail: kursizdat@gmail.com    <http://www.kursizdat.ru>