государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение

«Жирновский нефтяной техникум»

**Методические рекомендации**

**по выполнению практических работ по дисциплине « Математика»**

**для обучающихся по техническим специальностям**

**( базовый уровень)**

2018 г

Методические рекомендации составлены в соответствии с требованиями ФГОС СПО и методическими рекомендациями по реализации основной профессиональной образовательной программы в образовательных учреждениях среднего профессионального образования .

Автор: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Рокотянская Н.В., преподаватель ГБПОУ «ЖНТ»

Рецензенты: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ О.В. Олейникова, и.о. председателя районного отдела образования, куратор дисциплин Математика, Физика, Информатика

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ В.И.Майорова, старший методист ГБПОУ «ЖНТ»

Рассмотрены на цикловой комиссии математических , естественно-научных дисциплин и специальности 09.02.03.Программирование в компьютерных системах

Протокол от «\_\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2018 г №\_\_\_\_\_\_\_

Председатель ЦК \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Парамошкина Л.Н.

Рекомендованы методическим советом

Протокол от «\_\_\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_2018 г №\_\_\_\_\_\_\_\_

Председатель МС \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ И.В. Краснова

**Содержание**

Пояснительная записка………………………………………………………………..3

Практическая работа №1 Исследование функции на непрерывность и вычисление пределов функций ……………………………………………………………………4

Практическая работа №2 Вычисление производных сложных функций и функций нескольких переменных………………………………………………………………9

Практическая работа№3Геометрические и физические приложения производной…………………………………………………………………………..12

Практическая работа № 4 Исследование и построение графиков функций с помощью производной……………………………………………………………….14

Практическая работа №5 Вычисление неопределённых интегралов методом непосредственного интегрирования…………………………………………………16

Практическая работа № 6 Вычисление неопределенного интеграла методом подстановки и методом интегрирования по частям………………………………..18

Практическая работа № 7 Определенный интеграл……………………………….22

Практическая работа №8 Геометрические и физические приложения определённого интеграла…………………………………………………………….25

Практическая работа №9 Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными……………………………………………………..29

Практическая работа №10 Решение однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами…………………………….…..31

Практическая работа № 11 Применение численного интегрирования в приближенных вычислениях…………………………………………………………33

Практическая работа №12 Выполнение действий над матрицами……………….36

Практическая работа №13 Выполнение действий над определителями матриц..39

Практическая работа №14 Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера. ………………………………………………………………………………41

Практическая работа №15 Решение систем уравнений методом Гаусса…………43

Практическая работа №16 Выполнение действий над комплексными числами, заданными в алгебраической форме…………………………………………………44

Практическая работа № 17 Выполнение действий над комплексными числами , заданными в тригонометрической и показательной форме……………………….47

Практическая работа №18 Решение задач с элементами комбинаторики. ………49

Практическая работа №19 Решение простейших задач на определение вероятностей события………………………………………………………………..50

Практическая работа № 20 Решение простейших задач на определение дисперсии, математического ожидания и среднего квадратического отклонения случайной величины………………………………………………………………………………52

Критерии оценки знаний обучающихся…….............................................................55

Литература……………………………………………………………………………56

**Пояснительная записка.**

Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика» составлены в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом СПО и на основе рабочей программы по специальностям: 21.02.01. Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений, 21.02.02.Бурение нефтяных и газовых скважин. В них включены примеры и задачи по элементам дифференциального и интегрального исчисления, задания на решения дифференциальных уравнений, а также примеры и задачи по темам: комплексные числа, комбинаторика и элементы теории вероятностей. В каждой теме приводятся основные формулы и краткие теоретические сведения для выполнения соответствующих примеров и задач. Задания сопровождаются подробными решениями .Имеются и необходимые геометрические иллюстрации.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы: аудиторная и внеаудиторная. Аудиторная самостоятельная работа выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданиям.

Основным видом самостоятельной аудиторной работы являются практические занятия. Методические указания ставят своей целью оказать помощь обучающимся в выполнении практических работ и способствовать повышению интереса к изучению математики.

**Практическая работа №1**

***Вариант 1***

**Тема.** Исследование функции на непрерывность и вычисление пределов функций.

**Цель.** Отработать навыки исследования функции на непрерывность и вычисления пределов функций.

**Методические указания.**

**Определение 1.** Постоянное число А называется*пределом* *функции* f(x) *при*x→a, если для всякой последовательности {xn} значений аргумента, стремящейся к *а*, соответствующие им последовательности {f(xn)} имеют один и тот же предел А.

Предел функции обозначается $ \lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ .

**Cвойства пределов.**

1. **Предел суммы**

Предел суммы равен сумме пределов, если каждый из них существует, т.е.

$\displaystyle \lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=
\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x);
$

1. **Предел разности**

Предел разности равен разности пределов, если каждый из них существует, т.е.

$\displaystyle \lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=
\lim\limits_{x\to a}f(x)-\lim\limits_{x\to a}g(x);
$

1. **Предел постоянной величины**

Предел постоянной величины равен самой постоянной величине:

$\displaystyle \lim\limits_{x\to a}C=C.
$

1. **Предел произведения функции на постоянную величину**

Постоянный коэффициент можно выносить за знак предела:

$\displaystyle \lim\limits_{x\to a}Cf(x)=C\lim\limits_{x\to a}f(x).
$

1. **Предел произведения** Предел произведения равен произведению пределов, если каждый из них существует, т.е.

$\displaystyle \lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))=
\lim\limits_{x\to a}f(x)\lim\limits_{x\to a}g(x);
$

1. **Предел частного**

Предел частного равен частному пределов, если каждый из них существует и знаменатель не обращается в нуль, т.е.

$\displaystyle \lim\limits_{x\to a}\frac{ f(x)}{g(x)}=
\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}.
$

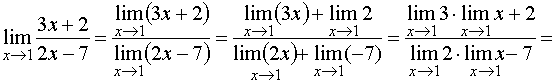
1. **Предел степенной функции**

$\displaystyle \lim\limits_{x\to a}f^p(x)=
(\lim\limits_{x\to a}f(x))^p,
$

где степень p - действительное число.

Рассмотрим несколько примеров на **свойства пределов**.

**Пример 1.**

http://www.repetitr.h1.ru/math_volume/limits_files/figures/Image31.gif

На первом шаге была применена [теорема о пределе частного](http://www.repetitr.h1.ru/math_volume/limits_files/limits.htm#Теорема3), так как предел знаменателя не равен нулю. На втором шаге использовалась [теорема о пределе суммы](http://www.repetitr.h1.ru/math_volume/limits_files/limits.htm#Теорема1) для числителя и знаменателя дроби. После была применена [теорема о пределе произведения](http://www.repetitr.h1.ru/math_volume/limits_files/limits.htm#Теорема2).

**Пример 2.**Найти предел

http://www.repetitr.h1.ru/math_volume/limits_files/figures/Image32.gif

Знаменатель и числитель дроби при  *x* стремящемся к 2 стремятся к нулю, поэтому [теорема о пределе частного](http://www.repetitr.h1.ru/math_volume/limits_files/limits.htm#Теорема3) здесь неприменима. В таких случаях нужно попытаться упростить дробь. Имеем

http://www.repetitr.h1.ru/math_volume/limits_files/figures/Image33.gif

Это преобразование справедливо при всех значениях *x*, отличных от 2, поэтому в соответствии с определением предела можем написать

http://www.repetitr.h1.ru/math_volume/limits_files/figures/Image34.gif

http://www.repetitr.h1.ru/math_volume/limits_files/figures/Image35.gif

**Пределы с неопределенностью вида http://www.absolom.ru/mathprofi/f/predely_primery_reshenii_clip_image098.gif и метод их решения**

Рассмотрим группу пределов, когда **http://www.absolom.ru/mathprofi/f/predely_primery_reshenii_clip_image028_0003.gif**, а функция представляет собой дробь, в числителе и знаменателе которой находятся многочлены

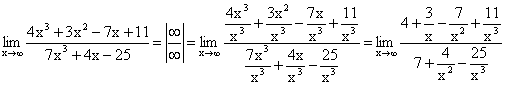
**Пример3**.Вычислить предел http://math1.ru/images/limits/limitbesktobesk/5.png.

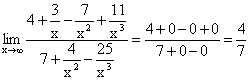
Попытаемся подставить бесконечность в функцию. Что получается в числителе? Бесконечность. А что получается в знаменателе? Тоже бесконечность. Таким образом, есть так называемая неопределенность вида http://www.absolom.ru/mathprofi/f/predely_primery_reshenii_clip_image098_0000.gif.

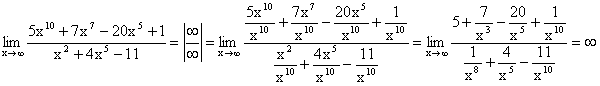
Как решать пределы данного типа?

Итак, метод решения следующий: **для того, чтобы раскрыть неопределенность http://www.absolom.ru/mathprofi/f/predely_primery_reshenii_clip_image098_0001.gif необходимо разделить числитель и знаменатель на http://www.absolom.ru/mathprofi/f/predely_primery_reshenii_clip_image008_0004.gif в старшей степени.**

Разделим числитель и знаменатель дроби на http://math1.ru/images/limits/limitbesktobesk/9.png:

.  Так как http://math1.ru/images/limits/limitbesktobesk/11.png, то в результате

получим: .  Это и есть ответ нашего примера.



Замечание: Предел отношения двух любых целых рациональных функций от *х* при *х* стремящимся к бесконечности равен :

1. отношению коэффициентов при высших степенях *х* , если степени этих функций между собой равны;
2. нулю, если степень числителя ниже степени знаменателя;
3. бесконечности, если степень числителя выше степени знаменателя.

**Определение**: функция непрерывна в точке http://www.mathprofi.ru/i/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva_clip_image047.gif, если предел функции в данной точке равен значению функции в этой точке: http://www.mathprofi.ru/i/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva_clip_image049.gif.

### ****Точка разрыва первого рода****

Если в точке http://www.mathprofi.ru/i/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva_clip_image047_0002.gif нарушено условие непрерывности **и односторонние пределы конечны**, то она называется **точкой разрыва первого рода**.

### ****Точки разрыва второго рода****

Обычно к данной категории относят все остальные случаи разрыва. Это, когда левосторонний или правосторонний, а чаще, оба предела бесконечны.

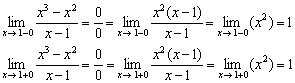
## ****Как исследовать функцию на непрерывность?****

Исследование функции на непрерывность в точке проводится по схеме, которая состоит в проверке условий непрерывности:

**Пример 1**.Исследовать функцию http://www.mathprofi.ru/i/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva_clip_image159.gif на непрерывность. Определить характер разрывов функции, если они существуют.

**Решение**:

1) Уделим внимание точке http://www.mathprofi.ru/i/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva_clip_image161.gif, в которой функция не определена.

2) Вычислим односторонние пределы:  
  
Односторонние пределы конечны и равны.

Таким образом, в точке http://www.mathprofi.ru/i/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva_clip_image161_0000.gif функция терпит устранимый разрыв.  
**Ответ**: функция непрерывна на всей числовой прямой кроме точки http://www.mathprofi.ru/i/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva_clip_image161_0001.gif, в которой она терпит устранимый разрыв.

**Содержание работы**

1. Вычислите пределы, раскрыв неопределённости вида *.*

*а) *

*б) *

*в) .*

2. Вычислите предел функции на бесконечности:

*а) *

*б) *

3. Исследуйте на непрерывность функции*: а) y=2x-1 в точке x=3*

*б) y=x-3x2 в точке x= -2*

4. Найти точки разрыва функции **

**Практическая работа №2**

**Вариант 1.**

**Тема***.* Вычисление производных сложных функций и функций нескольких переменных

**Цель*.***Отработать умение вычислять производные элементарных и сложных функций, находить частные производные функции **z=f(x;y)** двух независимых переменных **x** и **y** по аргументу **x** и **y.**

**Методические указания**

## Формулы дифференцирования

|  |  |
| --- | --- |
| **http://www.mathelp.spb.ru/book1/proizvodnaya.files/image030.png** | **http://www.mathelp.spb.ru/book1/proizvodnaya.files/image031.png** |
| **http://www.mathelp.spb.ru/book1/proizvodnaya.files/image032.png** | **http://www.mathelp.spb.ru/book1/proizvodnaya.files/image033.png** |
| **http://www.mathelp.spb.ru/book1/proizvodnaya.files/image034.pnghttp://www.mathelp.spb.ru/book1/proizvodnaya.files/image035.png** | **http://www.mathelp.spb.ru/book1/proizvodnaya.files/image036.png** |

**Таблица производных**

|  |  |
| --- | --- |
| **http://www.mathelp.spb.ru/book1/proizvodnaya.files/image037.png** | **http://www.mathelp.spb.ru/book1/proizvodnaya.files/image038.png** |
| **http://www.mathelp.spb.ru/book1/proizvodnaya.files/image039.png** | **http://www.mathelp.spb.ru/book1/proizvodnaya.files/image040.pnghttp://www.mathelp.spb.ru/book1/proizvodnaya.files/image041.png** |
| **http://www.mathelp.spb.ru/book1/proizvodnaya.files/image042.png** | **http://www.mathelp.spb.ru/book1/proizvodnaya.files/image043.png** |
| **http://www.mathelp.spb.ru/book1/proizvodnaya.files/image044.png** | **http://www.mathelp.spb.ru/book1/proizvodnaya.files/image045.png** |
| **http://www.mathelp.spb.ru/book1/proizvodnaya.files/image046.png** | **http://www.mathelp.spb.ru/book1/proizvodnaya.files/image047.png** |
| **http://www.mathelp.spb.ru/book1/proizvodnaya.files/image048.png** | **http://www.mathelp.spb.ru/book1/proizvodnaya.files/image049.png** |
| **http://www.mathelp.spb.ru/book1/proizvodnaya.files/image050.png** | **http://www.mathelp.spb.ru/book1/proizvodnaya.files/image051.png** |
| **http://www.mathelp.spb.ru/book1/proizvodnaya.files/image052.png** | **http://www.mathelp.spb.ru/book1/proizvodnaya.files/image053.png** |
| **http://www.mathelp.spb.ru/book1/proizvodnaya.files/image054.png** | **http://www.mathelp.spb.ru/book1/proizvodnaya.files/image055.png** |
| **http://www.mathelp.spb.ru/book1/proizvodnaya.files/image056.png** |  |

**Производная сложной функции**

Пусть y– сложная функция x, т.е. y= f(u), u = g(x), или

http://function-x.ru/chapter6-2/derivative2_clip_image002.gif

Если g(x) и f(u) – дифференцируемые функции своих аргументов соответственно в точках x и u= g(x),то сложная функция также дифференцируема в точке xи находится по формуле

http://function-x.ru/chapter6-2/derivative2_clip_image004.gif

**Пример 1.** Найти производную функции

http://function-x.ru/deriv_theory/deriv56.gif

Воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции.

http://function-x.ru/deriv_theory/deriv57.gif

Находим

http://function-x.ru/deriv_theory/deriv58.gif

**Пример 2.** Найти производную функцииhttp://function-x.ru/deriv_theory/deriv52.gif

Решение.

Используя свойства логарифмов, данную функцию можно записать проще:

http://function-x.ru/deriv_theory/deriv53.gif

Это сложная логарифмическая функция.

http://function-x.ru/deriv_theory/deriv54.gif

получаем

http://function-x.ru/deriv_theory/deriv55.gif

**Для частных производных справедливы все правила дифференцирования и таблица производных элементарных функций.** Есть только пара небольших отличий, с которыми познакомимся на примере.

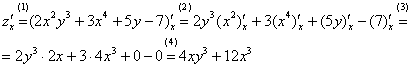
**Пример 1.**

Найти частные производные первого порядка функции http://www.mathprofi.ru/f/chastnye_proizvodnye_primery_clip_image020.gif

Найдем частные производные первого порядка. Их две.

**Обозначения:**  
http://www.mathprofi.ru/f/chastnye_proizvodnye_primery_clip_image022.gif или http://www.mathprofi.ru/f/chastnye_proizvodnye_primery_clip_image024.gif – частная производная по «икс»  
http://www.mathprofi.ru/f/chastnye_proizvodnye_primery_clip_image026.gif или http://www.mathprofi.ru/f/chastnye_proizvodnye_primery_clip_image028.gif – частная производная по «игрек»

Начнем с http://www.mathprofi.ru/f/chastnye_proizvodnye_primery_clip_image022_0000.gif. **Когда находим частную производную по «икс», то переменная http://www.mathprofi.ru/f/chastnye_proizvodnye_primery_clip_image006_0000.gif считается константой (постоянным числом).**



Теперь http://www.mathprofi.ru/f/chastnye_proizvodnye_primery_clip_image026_0000.gif. **Когда находим частную производную по «игрек», то переменная**http://www.mathprofi.ru/f/chastnye_proizvodnye_primery_clip_image004_0000.gif**считается константой (постоянным числом).**

http://www.mathprofi.ru/f/chastnye_proizvodnye_primery_clip_image051.gif

Дифференциалом функции y = f(x) называется выражение вида dy=Ahttp://www.mathelp.spb.ru/book1/proizvodnaya.files/image024.png - это главная линейная часть приращения ∆y , на основании предыдущей теоремы http://www.mathelp.spb.ru/book1/proizvodnaya.files/image025.png, обозначив дифференциал независимой переменной через dx=∆x, получим  выражение для дифференциала функции:

http://www.mathelp.spb.ru/book1/proizvodnaya.files/image026.png.

**Пример 2.** Найти дифференциалы функций:

1) http://function-x.ru/chapter7/differential_clip_image051.gif;

2) http://function-x.ru/chapter7/differential_clip_image055.gif;

Решение. Применяя [правила дифференцирования](http://function-x.ru/differential.html) степенной и логарифмической функций, находим

1) http://function-x.ru/chapter7/differential_clip_image059.gif;

2) http://function-x.ru/chapter7/differential_clip_image063.gif;

**Содержание работы.**

I Найти производную сложной функции:

II *Найти частные производные функции:*

1. *-2xy+6x-4+2*

**Практическая работа №3**

**Вариант 1**

**Тема: Геометрические и физические приложения производной.**

**Цель:** Отработать навыки применения производной в исследовании физических процессов.

**Методические указания**

Уравнение касательной к графику

**Пример 1**. Найти уравнение касательной к графику функции [\normalsize{f(x)=\sqrt{x}}](http://alwebra.com.ua/filter/tex/displaytex.php?texexp=\normalsize%7bf(x)=\sqrt%7bx%7d%7d) в точке *[\normalsize{x_0=1}](http://alwebra.com.ua/filter/tex/displaytex.php?texexp=\normalsize%7bx_0=1%7d)*

Решение:

1. [\normalsize{f(x_0)=f(1)=1}](http://alwebra.com.ua/filter/tex/displaytex.php?texexp=\normalsize%7bf(x_0)=f(1)=1%7d)
2. [\normalsize{f'(x)=(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}](http://alwebra.com.ua/filter/tex/displaytex.php?texexp=\normalsize%7bf'(x)=(\sqrt%7bx%7d)'=\frac%7b1%7d%7b2\sqrt%7bx%7d%7d%7d)
3. [\normalsize{f'(x_0)=f'(1)=\frac{1}{2}}](http://alwebra.com.ua/filter/tex/displaytex.php?texexp=\normalsize%7bf'(x_0)=f'(1)=\frac%7b1%7d%7b2%7d%7d)
4. [\normalsize{y=1+\frac{1}{2}(x-1)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}](http://alwebra.com.ua/filter/tex/displaytex.php?texexp=\normalsize%7by=1+\frac%7b1%7d%7b2%7d(x-1)=\frac%7b1%7d%7b2%7dx+\frac%7b1%7d%7b2%7d%7d)

**Пример 2.**Тело движется прямолинейно по закону http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1689.png (м). Определить скорость его движения в момент http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1690.png с.

**Решение.** Искомая скорость - это производная от пути, то есть

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1691.png

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1692.png

В заданный момент времени

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1693.png (м/с).

**Ответ:** http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1694.png (м/с)

**Содержание работы**

1. Составить уравнение касательной к графику

.

1. Найдите скорость движения материальной точки в конце 3-й секунды, если движение точки задано уравнениемм.
2. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении тела массой 12 кг задана уравнением м. Найти кинетическую энергию тела

через 5 с после начала движения.

1. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением . Вычислить её скорость и ускорение в момент времени t=4 c.
2. Тело массой 4 кг движется по закону ; S- путь в метрах; t – секунд . Найдите силу, действующую на точку в момент t=20c.
3. Стороны ***а*** и ***в*** прямоугольника изменяются по закону

С какой скоростью изменяется его площадь ***S*** в момент времени t=2c?

**Практическая работа № 4**

**Вариант 1**

**Тема:** Исследование и построение графиков функций с помощью производной.

**Цель:** Отработать умения находить с помощью производной промежутки монотонности, выпуклость и вогнутость, точки экстремума и использовать эти исследования при построении графика функции.

**Методические указания**

При исследовании и построении графиков функций можно использовать следующую схему:

1. Найти область определения функции.

*Областью определения (существования) функции D(y) называется множество всех действительных значений аргумента х, при которых она имеет действительные значения.*

1. Проверить функцию на четность и нечетность.

*Функция f называется четной, если для любого х из ее области определения f(-x)=f(x). График четной функции симметричен относительно оси ординат.*

*Функция f называется нечетной, если для любого х из ее области определения f(-x)=-f(x). График нечетной функции симметричен относительно начала координат.*

1. Найти точки пересечения графика функции с координатными осями:

а) с ОХ: решить уравнение у = 0;

б) с ОУ: решить уравнение х = 0.

4. Найти промежутки знакопостоянства функции. На числовую прямую нанести нули функции и точки разрыва и определить знаки функции в каждом промежутке.

5. Исследовать функцию на монотонность и экстремумы:

* Найти производную .
* Найти критические точки функции, т.е. точки в которых производная обращается в нуль или не существует;
* Исследовать знак производной в промежутках, на которые найденные критические точки делят числовую прямую. *Если в некотором промежутке >0, то функция возрастает в этом промежутке; если же <0, то функция убывает в этом промежутке.*
* Выяснить наличие экстремума в каждой критической точке *х0*, отличной от точек разрыва функции:

1. *если <0 на (а;х0) и >0 на (х0;в), то х0 – точка минимума функции;*
2. *если >0 на (а;х0) и <0 на (х0;в), то х0 – точка максимума функции.*

Вычислить значения функции в точках экстремума.

6. Найти контрольные точки.

7. Построить график функции.

8. Найти область значений функции *Е(у)*.

**Содержание работы**

Исследовать и построить графики функций:

1.y=x2-x

2. y=3x-x3

**Практическая работа №5**

**вариант 1**

**Тема.** Вычисление неопределённых интегралов методом непосредственного интегрирования.

**Цель:** Сформировать умения применять таблицу и свойства интегралов для нахождения неопределённых интегралов.

**Методические указания**

Определение. *Если функция     http://www.kvadromir.com/math/int/1.gif    является первообразной для     http://www.kvadromir.com/math/int/2.gif   , то выражение     http://www.kvadromir.com/math/int/6.gif    называется неопределённым интегралом от функции     http://www.kvadromir.com/math/int/2.gif    и обозначается символом     http://www.kvadromir.com/math/int/11.gif   .*   
 Таким образом, http://www.kvadromir.com/math/int/10.gif, если  http://www.kvadromir.com/math/int/4.gif

Непосредственным интегрированием называется такой способ интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Свойства неопределённого интеграла

Свойство 1**.** *Неопределённый интеграл от суммы функций равен сумме неопределённых интегралов***http://www.kvadromir.com/math/int/19.gif**

Свойство 2. [*Неопределённый интеграл*](http://www.kvadromir.com/kuznecov_integral.html)*от разности функций равен соответствующей разности неопределённых интегралов* **http://www.kvadromir.com/math/int/20.gif**

 Свойство 3. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла http://www.kvadromir.com/math/int/21.gif*

Свойство 4. Если**http://www.kvadromir.com/math/int/18.gif,**то**http://www.kvadromir.com/math/int/22.gif**

Основные формулы интегрирования

1. http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image016.gif
2. http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image018.gif
3. http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image020.gif
4. http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image022.gif
5. http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image024.gif
6. http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image026.gif
7. http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image028.gif
8. http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image030.gif
9. http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image032.gifcos*x+* *C*
10. http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image034.gif*=*sin *x +*C
11. http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image036.gif*= tgx + C*
12. http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image038.gif
13. http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image040.gif
14. http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image042.gif *p*≠ -1*, k ≠*0
15. http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image044.gif*dx=*http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image046.gif ln*(kx+b)+C,*где *k*http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image048.gif
16. http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image050.gif*dx=*http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image052.gif+*C,*где *k*http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image048_0000.gif
17. http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image054.gifcos(*kx+b)+C,* где *k*http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image048_0001.gif
18. http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image056.gif*=*http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image058.gif
19. http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image060.gif*dx=*http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image062.gif*+C,*где *a*http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image064.gif
20. http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image066.gif =http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image068.gif *arctg*http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image070.gif*+C, a*http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image048_0002.gif
21. http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image072.gif = http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image074.gifln│http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image076.gif│+ *C, a*http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image078.gif
22. http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image080.gif*dx=*http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image082.gif+ *C, a*http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image078_0000.gif
23. http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image084.gif=http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image086.gif
24. http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image088.gif= http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image090.gif
25. http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image092.gif*=x* ln *x*http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image094.gif*C*
26. http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image096.gif

**Практическая работа № 6**

**Вариант 1**

**Тема:** Вычисление неопределенного интеграла методом подстановки и методом интегрирования по частям.

**Цель:** Отработать навыки вычисления неопределённых интегралов методом подстановки и интегрирования по частям.

**Методические указания.**

В основе интегрирования методом подстановки лежит формула

http://festival.1september.ru/articles/606369/full_image098.gif

**Рассмотрим этот метод.**

***Алгоритм вычисления неопределенного интеграла методом подстановки:***

1. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).
2. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.
3. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной (или выражение, содержащее этот дифференциал) через дифференциал новой переменной.
4. Производят замену под интегралом.
5. Находят полученный интеграл.
6. В результате производят обратную замену, т.е. переходят к старой переменной. Результат полезно проверять дифференцированием.

**Пример 1**.

Вычислить интеграл:

$\displaystyle \int \dfrac{dx}{x+1}.
$

Решение.

Сделаем замену переменных $ x+1=t$ и найдем [дифференциал](http://www.math4you.ru/theory/neopr/intZm4n/) от обеих частей, тогда

$\displaystyle dt=d(x+1)\Rightarrow
dt=(x+1)'dx\Rightarrow
dt=dx.
$

Подставляя все в исходный интеграл, получим:

$\displaystyle \int\dfrac{dx}{x+1}=
\int\dfrac{dt}{t}=
\ln\vert t\vert+C=
\ln\vert x+1\vert+C,
$

**Интегрирование по частям**

     Другим довольно общим приемом преобразования интеграла является так называемое "интегрирование по частям".

http://www.pm298.ru/Mathem/ds0101109.JPGhttp://www.pm298.ru/Mathem/ds0201109.JPG     (1)

Формула (1) называется **формулой интегрирования по частям.**

Эта формула применяется в случае, когда подынтегральная функция представляет произведение алгебраической и трансцендентной функции.  
В качестве *u* обычно выбирается функция, которая упрощается дифференцированием, в качестве *dv* - оставшаяся часть подынтегрального выражения, содержащая dx, из которой можно определить *v* путем интегрирования.   
**Пример 2.**

Найти неопределенный интеграл.

http://www.mathprofi.ru/f/integrirovanie_po_chastyam_clip_image010_0000.gif

Решение.

http://www.mathprofi.ru/f/integrirovanie_po_chastyam_clip_image067.gif

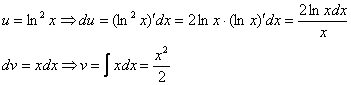
За http://www.mathprofi.ru/f/integrirovanie_po_chastyam_clip_image033_0003.gif необходимо обозначить  логарифм (то, что он в степени – значения не имеет). За http://www.mathprofi.ru/f/integrirovanie_po_chastyam_clip_image035_0001.gif обозначаем **оставшуюся часть** подынтегрального выражения.

Записываем в столбик:  
http://www.mathprofi.ru/f/integrirovanie_po_chastyam_clip_image070.gif

Сначала находим дифференциал http://www.mathprofi.ru/f/integrirovanie_po_chastyam_clip_image041_0000.gif:

http://www.mathprofi.ru/f/integrirovanie_po_chastyam_clip_image073.gif

Здесь использовано правило дифференцирования сложной функции http://www.mathprofi.ru/f/integrirovanie_po_chastyam_clip_image075.gif. Теперь находим функцию http://www.mathprofi.ru/f/integrirovanie_po_chastyam_clip_image045_0002.gif, для этого интегрируем **правую часть** нижнего равенства http://www.mathprofi.ru/f/integrirovanie_po_chastyam_clip_image078.gif:

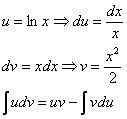


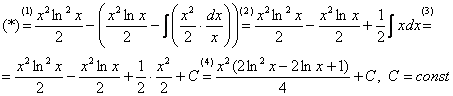
Для интегрирования применили простейшую табличную формулу http://www.mathprofi.ru/f/integrirovanie_po_chastyam_clip_image082.gif

Теперь всё готово для применения формулы http://www.mathprofi.ru/f/integrirovanie_po_chastyam_clip_image004_0002.gif. Открываем «звёздочкой» и «конструируем» решение в соответствии с правой частью http://www.mathprofi.ru/f/integrirovanie_po_chastyam_clip_image085.gif:

http://www.mathprofi.ru/f/integrirovanie_po_chastyam_clip_image087.gif

Под интегралом снова многочлен на логарифм! Поэтому решение опять прерывается и правило интегрирования по частям применяется второй раз. Не забываем, что за http://www.mathprofi.ru/f/integrirovanie_po_chastyam_clip_image033_0004.gif в похожих ситуациях всегда обозначается логарифм.





 (1) Очень часто здесь теряют минус, также необходимо обратить внимание на то, что минус  относится **ко всей** скобке http://www.mathprofi.ru/f/integrirovanie_po_chastyam_clip_image093.gif, и эти скобки нужно корректно раскрыть.

(2) Раскрываем скобки. Последний интеграл упрощаем.

(3) Берем последний интеграл.

(4) Упрощаем ответ.

Необходимость дважды (а то и трижды) применять правило интегрирования по частям возникает не так уж и редко.

**Пример 3.**

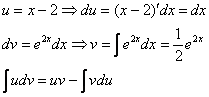
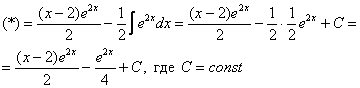
Найти неопределенный интеграл.

http://www.mathprofi.ru/f/integrirovanie_po_chastyam_clip_image099.gif

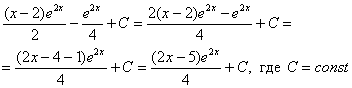
Решение:

http://www.mathprofi.ru/f/integrirovanie_po_chastyam_clip_image101.gif

Используя знакомый алгоритм, интегрируем по частям:

 Единственное, что еще можно сделать, это упростить ответ:

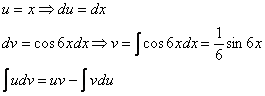


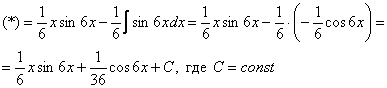
**Пример 4.**

Найти неопределенный интеграл.

http://www.mathprofi.ru/f/integrirovanie_po_chastyam_clip_image119.gif

Интегрируем по частям:





**Содержание работы**

1. Найти интеграл методом замены переменной:



1. Найти интеграл методом интегрирования по частям:



**Практическая работа № 7**

**Вариант 1**

**Тема:** Определенный интеграл.

**Цель**: Научиться вычислять определенные интегралы.

**Методические указания**

Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция *f* (*x*) непрерывна на замкнутом интервале [*a, b*]. Если *F* (*x*) - *первообразная* функции *f* (*x*) на[*a, b*], то

http://www.math24.ru/images/10int14.gif

Основные свойства определенного интеграла

|  |
| --- |
|  |
| I. Величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е. http://www.testent.ru/matematika/vishmat/lekcia6/24.png, где х, t – любые буквы.  II. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю.  http://www.testent.ru/matematika/vishmat/lekcia6/25.png  III. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет свой знак на обратный.  http://www.testent.ru/matematika/vishmat/lekcia6/26.png  IV. Если промежуток интегрирования [a,b] разбит на конечное число частичных промежутков, то определенный интеграл, взятый по промежутке [a,b], равен сумме определенных интегралов, взятых по всем его частичным промежуткам.  http://www.testent.ru/matematika/vishmat/lekcia6/27.png  V. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.  http://www.testent.ru/matematika/vishmat/lekcia6/28.png  VI. Определенной интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций.  http://www.testent.ru/matematika/vishmat/lekcia6/29.png |

**Пример 1.** Вычислить

http://function-x.ru/chapter8-4/integral4_clip_image024.gif

Решение. Используя формулу

http://function-x.ru/chapter8-4/integral4_clip_image026.gif

получим

http://function-x.ru/chapter8-4/integral4_clip_image028.gif

**Пример 2.**

|  |
| --- |
|  |
|  |
| Вычислить  http://www.math24.ru/images/10int27.gif.  *Решение.*  Сделаем замену:  http://www.math24.ru/images/10int28.gif  Пересчитаем пределы интегрирования. Если *x* = 0, то *t* = −1. Если же *x* = 1, то *t* = 2.  Тогда интеграл через новую переменную *t* легко вычисляется:  http://www.math24.ru/images/10int29.gif |

**Содержание работы**

Вычислить определенные интегралы:



**Практическая работа №8**

**Вариант 1.**

**Тема.** Геометрические и физические приложения определённого интеграла.

**Цель:** Сформировать умения находить площади фигур, ограниченных графиками рациональных функций.Отработать навыки использования физических приложений определённого интеграла при решении прикладных задач.

**Методические указания**

**Площадь криволинейной трапеции**

Площадь фигуры, ограниченной осью 0*x*, двумя вертикальными прямыми *x = a, x = b* и графиком функции *f* (*x*) (рисунок 1), определяется по формуле

http://www.math24.ru/images/10int15.gif

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| http://www.math24.ru/images/defint1.jpg |  | http://www.math24.ru/images/defint2.jpg |
| **Рис.1** |  | **Рис.2** |

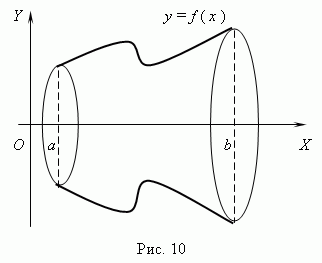
Пусть *F* (*x*) и *G* (*x*) – первообразные функций *f* (*x*) и *g* (*x*), соответственно. Если *f* (*x*) ≥ *g* (*x*) на замкнутом интервале [*a, b*], то площадь области, ограниченной двумя кривыми *y = f* (*x*), *y = g* (*x*) и вертикальными линиями *x = a, x = b* (рисунок 2), определяется формулой

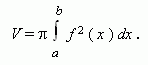
http://www.math24.ru/images/10int17.gif

**Пример 1.**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми http://www.math24.ru/images/10int35.gif и http://www.math24.ru/images/10int36.gif. *Решение.*  Сначала определим точки пересечения двух кривых (рисунок 3).  http://www.math24.ru/images/10int37.gif  Таким образом, данные кривые пересекаются в точках (0,0) и (1,1). Следовательно,  площадь фигуры равна  http://www.math24.ru/images/10int38.gif   |  |  |  | | --- | --- | --- | | http://www.math24.ru/images/defint3.jpg |  | http://www.math24.ru/images/defint4.jpg | | **Рис.3** |  | **Рис.4** | |
|  |
|  |
| Пример 2.  Найти площадь фигуры, ограниченную графиками функций http://www.math24.ru/images/10int39.gif и http://www.math24.ru/images/10int40.gif.  ***Решение.***  Найдем координаты точек пересечения кривых (рисунок 4).  http://www.math24.ru/images/10int41.gifДанная область ограничивается сверху параболой http://www.math24.ru/images/10int39.gif,  а снизу - прямой линией http://www.math24.ru/images/10int42.gif. Следовательно, площадь этой области равна  http://www.math24.ru/images/10int43.gif |

**Объём тела вращения**. Рассмотрим тело, полученное вращением вокруг оси OX  криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции  f ( x ),прямыми  x = a  и  x = b и осью  OX  ( рис.1 ).



Объём  V тела вращения будет равен: 

### Пример 3 .  Найти объём усечённого конуса, образованного вращением

                      прямой  y = x + 1  вокруг оси  OX   и ограниченной линиями

                       x = 0 и  x = 3 .

Решение .  В соответствии с выше приведенной формулой имеем:

http://www.bymath.net/studyguide/ana/sec/ana13b.gif

1. Если точка движется по некоторой кривой и абсолютная величина скорости ее  есть известная функция времени t, то путь, пройденный точкой за промежуток времени , равен .
2. Работа переменной силы , действующей в направлении от Ох, на отрезке  определяется формулой . При решении задач на вычисление работы силы часто используется закон Гука: F=kx, где

F – сила, Н;

x – абсолютное удлинение пружины, м, вызванное силой F;

k – коэффициент пропорциональности.

3. Сила давления воды Р на вертикальную пластину вычисляется по формуле:

, где

*9807Н –* вес воды в объеме 1м3;

*х –* изменение глубины погружения площадки на малую величину *dx*;

** - площадь выделенной площадки;

*(в – а)* м. – высота площадки.

http://www.bymath.net/studyguide/ana/sec/ana13b.gif

**Содержание работы**

**1**.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями**: **

**2.**Скорость движения точки v=12t-3t2 (м/c). Найти путь, пройденный точкой за 3с, за 3-ю секунду, до остановки.

**3**.Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 10 мм, если сила в 100 Н растягивает пружину на 0,02 м?

**4**.Вычислить силу давления воды на вертикальную площадку, имеющую форму треугольника с основанием 4м и высотой 6м. Вершина треугольника находится на поверхности воды, а основание параллельно ей.

**Практическая работа №9**

***Вариант 1***

**Тема.** Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

**Цель.** Сформировать умения решать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

**Методические указания**

*Определения:*

 Дифференциальным уравнением называется равенство, содержащее производные или дифференциалы неизвестной функции.

Функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению, т.е. обращающая его в тождество, называется интегралом или решением этого уравнения.

Рассмотрим дифференциальные уравнения вида

Уравнение вида; где *f(x),* -данные функции, называется уравнением с разделёнными переменными.

Решение, содержащее произвольную постоянную *с,* называется общим решением дифференциального уравнения.

Решение, в которое поставлено конкретное числовое *с*, называется частным решением. Значение *с* вычисляется при подстановке начальных данных в общее решение.

Уравнение вида ;

где

Называется уравнением с разделяющимися переменными.

Задача нахождения решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего условию**Пример 1**.

Решить дифференциальное уравнение http://www.bgsha.com/ru/learning/images/matematika_yakovenko/3/42.png.

*Решение:*

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Заменим :

http://www.bgsha.com/ru/learning/images/matematika_yakovenko/3/43.png если *у≠1,*то http://www.bgsha.com/ru/learning/images/matematika_yakovenko/3/44.png

http://www.bgsha.com/ru/learning/images/matematika_yakovenko/3/45.pnghttp://www.bgsha.com/ru/learning/images/matematika_yakovenko/3/47.pnghttp://www.bgsha.com/ru/learning/images/matematika_yakovenko/3/48.png

Это и есть решение заданного дифференциального уравнения в явном виде.

**Пример 2.**

Решить дифференциальное уравнение http://www.bgsha.com/ru/learning/images/matematika_yakovenko/3/49.png.

*Решение:*

Это также дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

http://www.bgsha.com/ru/learning/images/matematika_yakovenko/3/50.pngесли *у≠1,*то http://www.bgsha.com/ru/learning/images/matematika_yakovenko/3/51.pnghttp://www.bgsha.com/ru/learning/images/matematika_yakovenko/3/52.pnghttp://www.bgsha.com/ru/learning/images/matematika_yakovenko/3/53.png

     потенцируем  http://www.bgsha.com/ru/learning/images/matematika_yakovenko/3/54.pngобозначим http://www.bgsha.com/ru/learning/images/matematika_yakovenko/3/55.png - это общее решение заданного дифференциального уравнения.

**Содержание работы**

1. а) Докажите, что функция  удовлетворяет дифференциальному уравнению 

б\*) Проверьте, что функция  является решением дифференциального уравнения 

2. Решите дифференциальные уравнения:

а) 

б) 

3. Найдите частные решения дифференциальных уравнений:

а) 

б)\* 

в)\* 

**Практическая работа №10**

**Вариант I**

**Тема**: Решение однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

**Цель**: Сформировать умение решать однородные линейные уравнения II порядка с постоянными коэффициентами.

**Методические указания**

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение вида

Y''+py'+gy=0, p,g - постоянные величины

Для решения заменяем

y''=к2 , y'=k, y=1 k2+pk+g=0

возможны 3 случая:

1)D>0; k1≠k2

Общее решение: y=c1 ek1 x + c2 ek2 x

2)D=0; k1=k2=k

Общее решение: y=ekx (c1 +c2 x)

3) D<0; K1=a+bi ,K2=a-bi

Y= eax (c1 cosbx+c2 sinbx)-общее решение

**Пример 1.**Решить уравнение http://abc.vvsu.ru/Books/u_vyssh_m1/obj.files/image4611.gif.

Решение. Дискриминант этого квадратного уравнения http://abc.vvsu.ru/Books/u_vyssh_m1/obj.files/image4613.gif, поэтому http://abc.vvsu.ru/Books/u_vyssh_m1/obj.files/image4615.gif.

Покажем, как по виду корней характеристического уравнения найти общее решение однородного линейного уравнения второго порядка.

Если http://abc.vvsu.ru/Books/u_vyssh_m1/obj.files/image4617.gif- действительные корни характеристического уравнения, то http://abc.vvsu.ru/Books/u_vyssh_m1/obj.files/image4619.gif.

Если корни характеристического уравнения одинаковы, т.е. http://abc.vvsu.ru/Books/u_vyssh_m1/obj.files/image4621.gif, то общее решение дифференциального уравнения ищут по формуле http://abc.vvsu.ru/Books/u_vyssh_m1/obj.files/image4623.gif или http://abc.vvsu.ru/Books/u_vyssh_m1/obj.files/image4625.gif.

Если же характеристическое уравнение имеет комплексные корни http://abc.vvsu.ru/Books/u_vyssh_m1/obj.files/image4627.gif, то http://abc.vvsu.ru/Books/u_vyssh_m1/obj.files/image4629.gif.

**Пример 2.** Найти общее решение уравнения http://abc.vvsu.ru/Books/u_vyssh_m1/obj.files/image4631.gif.

Решение.Составим характеристическое уравнение для данного дифференциального уравнения: http://abc.vvsu.ru/Books/u_vyssh_m1/obj.files/image4633.gif. Его корни http://abc.vvsu.ru/Books/u_vyssh_m1/obj.files/image4635.gif, http://abc.vvsu.ru/Books/u_vyssh_m1/obj.files/image4637.gif действительны и различны. Поэтому общее решение http://abc.vvsu.ru/Books/u_vyssh_m1/obj.files/image4639.gif.

**Пример 3.** Решить уравнение http://abc.vvsu.ru/Books/u_vyssh_m1/obj.files/image4641.gif.

Решение. Характеристическое уравнение http://abc.vvsu.ru/Books/u_vyssh_m1/obj.files/image4643.gif или http://abc.vvsu.ru/Books/u_vyssh_m1/obj.files/image4645.gif имеет корни http://abc.vvsu.ru/Books/u_vyssh_m1/obj.files/image4647.gif. Так что http://abc.vvsu.ru/Books/u_vyssh_m1/obj.files/image4649.gif.

**Пример 4.** Решить уравнение http://abc.vvsu.ru/Books/u_vyssh_m1/obj.files/image4651.gif.

Решение. Характеристическое уравнение http://abc.vvsu.ru/Books/u_vyssh_m1/obj.files/image4653.gif данного однородного линейного уравнения мы уже решили выше в примере 4. Корни этого уравнения http://abc.vvsu.ru/Books/u_vyssh_m1/obj.files/image4655.gif, поэтому общее решение линейного однородного уравнения

**Содержание работы**

1)Найти частные решения дифференциальных уравнений:

a) y'' + y' – 6y=0; y0 = 3, x0 =0, y'0 =1

b) y'' – 6y' +9y=0; y0=1; y0' =1; x0 =0

2)Решить уравнение:

a) y'' + 2y'+2y=0

b) y'' + 7y'+6y=0

**Практическая работа № 11**

**Вариант 1**

**Тема:** Применение численного интегрирования в приближенных вычислениях.

**Цель:** Научиться вычислять определенные интегралы методом прямоугольников и трапеций.

**Методические указания**

**1.** Чтобы найти приближенное значение интеграла методом прямоугольников, нужно:

1) разделить отрезок интегрирования [*a;b*] на *п* равных частей точками *х0=а, х1, х2, …, хп-1, хп=b;*

2) вычислить значения подынтегральной функции *y=f(x)* в полученных точках: *y0=f(x0), y1=f(x1), y2= f(x2), …,yn-1=f(xn-1), yn=y(xn);*

3) воспользоваться формулой 

**2**. Чтобы найти приближенное значение интеграла по формулам трапеций, нужно:

1) разделить отрезок интегрирования [*a;b*] на *п* равных частей точками *х0=а, х1, х2, …, хп-1, хп=b;*

2) вычислить значения подынтегральной функции *y=f(x)* в полученных точках: *y0=f(x0), y1=f(x1), y2= f(x2), …,yn-1=f(xn-1), yn=y(xn);*

3) воспользоваться формулой 

**Пример 1.** Вычислить по формуле прямоугольников http://festival.1september.ru/articles/549599/img18.gif. Найти абсолютную и относительную погрешности вычислений.

*Решение:*

Разобьём отрезок [*a,* *b*] на несколько (например, на 6) равных частей. Тогда*а =*2*, b =*5 , http://festival.1september.ru/articles/549599/img14.gif

*х*0= 2=a  
*х*1= 2 + http://festival.1september.ru/articles/549599/img17.gif = 2,5  
*х*2== 2,5+ http://festival.1september.ru/articles/549599/img17.gif =3  
*х*3= 3 + http://festival.1september.ru/articles/549599/img17.gif = 3,5  
*х*4= 3,5+http://festival.1september.ru/articles/549599/img17.gif = 4  
*х*5= 4+ http://festival.1september.ru/articles/549599/img17.gif = 4,5

*f*(*x*0) = 22= 4  
*f*(*x* 1 ) = 2 ,52= 6,25  
*f*(*x* 2 ) = 32= 9  
*f*(*x* 3 ) = 3,52= 12,25  
*f*(*x* 4 ) = 42= 16  
*f*(*x* 5 ) = 4,52= 20,25.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *х* | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 |
| *у* | 4 | 6,25 | 9 | 12,25 | 16 | 20,25 |

По формуле (1):

http://festival.1september.ru/articles/549599/img19.gif

Для того, чтобы вычислить относительную погрешность вычислений, надо найти точное значение интеграла:

http://festival.1september.ru/articles/549599/img20.gif  
http://festival.1september.ru/articles/549599/img21.gif  
http://festival.1september.ru/articles/549599/img22.gif

**Содержание работы**

1. Вычислите по формуле прямоугольников и трапеций , с точностью до 0,001, разбив интервал интегрирования на 10 частей.
2. Вычислите интеграл  по формуле прямоугольников и трапеций, разбив промежуток интегрирования на 10 равных частей.
3. Вычислите интеграл  по формуле прямоугольников, разбив промежуток интегрирования на 5 равных частей.

Проверьте полученные результаты, вычислив данные интегралы методом замены переменной.

**Практическая работа №12**

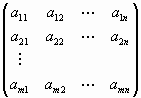
Вариант 1

**Тема.** Выполнение действий над матрицами.

**Цель.** Научиться выполнять действия над матрицами.

**Методические указания**

Произвольная система чисел из некоторого множества, расположенная в виде прямоугольной таблицы, содержащей m строк и n столбцов, называется матрицей.

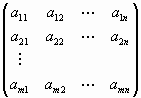
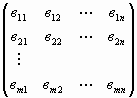
 http://festival.1september.ru/articles/606772/Image4733.gif

*Две матрицы называются равными, если число строк и столбцов у них соответственно равны.*

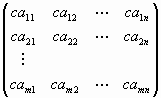
*Если число строк матрицы равно числу её столбцов, то такая матрица называется квадратной, а это число порядком матрицы.*

В =  - матрица третьего порядка

Пусть даны матрицы

А =  и В = 

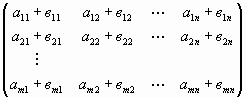
*Произведением А на число с называется матрица*

С = 

**Пример 1.**

http://festival.1september.ru/articles/606772/Image4739.gif

*Суммой матриц А и В называется матрица:*

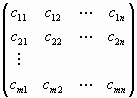
С = А + В = 

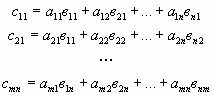
**Пример 2.**

А =  В =  А + В = 

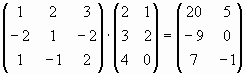
Для матриц выполняются все свойства действий с рациональными числами.

*Произведением матрицы А на матрицу В называется матрица*

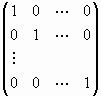
С =  , где

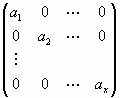


**Пример 3.**



Квадратная матрица, все диагональные элементы которой равны 1, а остальные 0 называется единичной.

Е = .

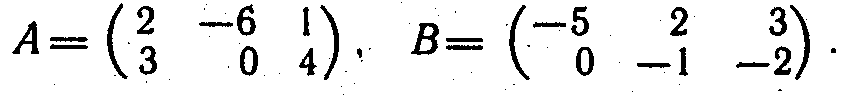
Матрицы, имеющие вид  называют диагональными.

Матрица, которая получается из данной матрицы заменой строк столбцами, называется транспонированной по отношению к данной.

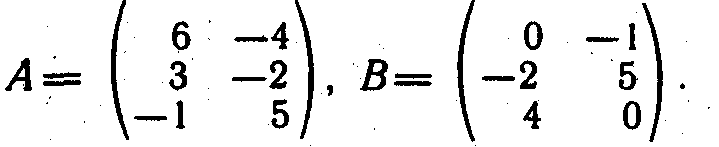
**Содержание работы**

1**.** Вычислить линейные комбинации матриц:

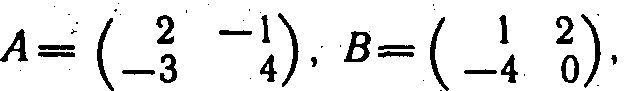
а) *2А-В*, если

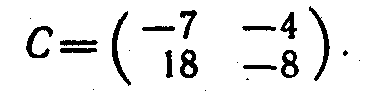


б) *3А+2В*, если

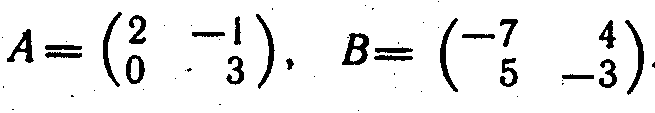


в**)** *2А+3В-C*, если

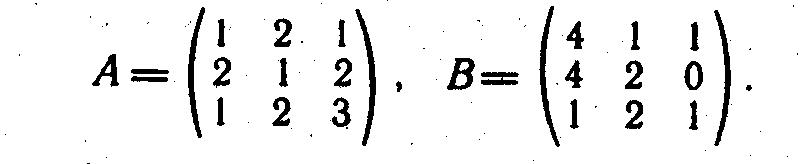




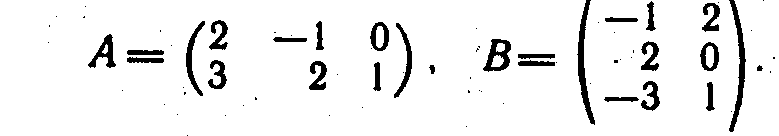
2.Вычислить *С=А2+*2*В*, где

****

3.Найти ***АВ-ВА***, где



4.Найти , если

******

**Практическая работа №13**

**Вариант 1**

**Тема.** Выполнение действий над определителями матриц.

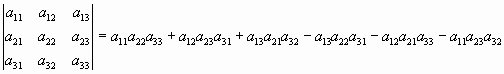
**Цель.** Научиться выполнять различные действия над определителями.

**Методические указания**

.- определитель 2 порядка

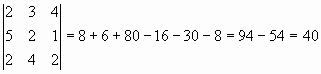
**Пример 1.**

http://festival.1september.ru/articles/606772/Image4752.gif



Определитель 3 порядка

**Пример 2.**



**Минором** http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_796.png к элементу http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_638.png определителя http://www.webmath.ru/poleznoe/images/formules_128.png-го порядка называется [определитель](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_6_9.php) http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_797.png-го порядка, полученный из исходного вычеркиванием http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_639.png-той строки и http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_640.png-того столбца.

**Пример 3.** Найти минор http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_798.png к элементу http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_799.png определителя http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_800.png .

**Решение.** Вычеркиваем в заданном определителе вторую строку и третий столбец:

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_801.png

тогда http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_802.png

**Ответ.** http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_802.png

## Алгебраическое дополнение

**Алгебраическим дополнением** http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_803.png к элементу http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_638.png определителя http://www.webmath.ru/poleznoe/images/formules_128.png-го порядка называется числоАлгебраическое дополнение матрицы

**Пример4.** Найти алгебраическое дополнение http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_805.png к элементу http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_799.png определителя http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_800.png .

**Решение.** http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_806.png

**Ответ:** http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_854.png

**Содержание работы**

1. Вычислить определители второго порядка: 
2. Вычислить определители третьего порядка: 
3. Записать все миноры определителя: 
4. Записать все алгебраические дополнения определителя: 
5. Вычислить определитель разложением его по элементам: а) второй строки, б) третьего столбца: .

**Практическая работа №14**

**Вариант 1**

**Тема.** Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.

**Цель.** Научиться решать системы линейных уравнений по формулам Крамера*.*

**Методические указания**

1. *Система двух линейных уравнений с двумя переменными*

* при условии, что*

*имеет единственное решение, которое находится по формулам:*

*; .*

1. *Система трёх линейных уравнений с тремя переменными*

* при условии, что*

*имеет единственное решение, которое находится по формулам*

*; ; .*

**Пример 1.**  
Решить систему уравнений:

http://kontromat.ru/sistem/image114.png  
относительно переменных х и у.  
**Решение:**Найдем определитель матрицы, составленный из коэффициентов системы :

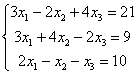
http://kontromat.ru/sistem/image116.png  
Заменим в этом определителе первый столбец столбцом коэффициентов из правой части системы и найдем его значение:

http://kontromat.ru/sistem/image118.png

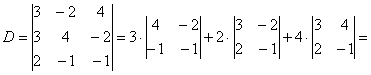
Сделаем аналогичное действие, заменив в первом определителе второй столбец:

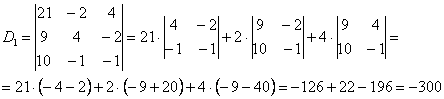
http://kontromat.ru/sistem/image120.png

Применим формулы Крамера и найдем значения переменных:

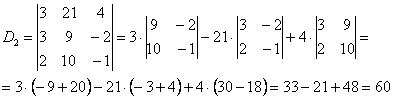
http://kontromat.ru/sistem/image122.pngи http://kontromat.ru/sistem/image124.png.  
**Ответ:** http://kontromat.ru/sistem/image126.png  
**Пример2 .**  
Решить систему по формулам Крамера.    


**Решение:**

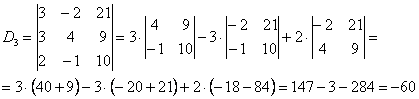
Решим систему по формулам Крамера.   
  
http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image066.gif, значит, система имеет единственное решение.



http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image070.gif



http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image074.gif



http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image078.gif

**Ответ:** http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image080.gif.

**Содержание работы**

1. Решите систему уравнений с помощью формул Крамера:

1) 2)

1. Решите систему уравнений с помощью определителей:

1) 2)

**Практическая работа №15**

**Тема:**Решение систем уравнений методом Гаусса.

**Цель:** Научиться решать системы линейных уравнений матричным методом*.*

**Методические указания**

Пусть .

1. Запишем расширенную матрицу, состоящую из коэффициентов при переменных

*х, y, z* и свободных членов.

1. Приведем полученную матрицу к треугольному виду, пользуясь следующими преобразованиями:

* умножение или деление коэффициентов и свободных членов на одно и то же число;
* сложение и вычитание строк матрицы;
* перестановка строк матрицы.

1. Запишем новую эквивалентную систему уравнений: 
2. Последовательно решим уравнения относительно переменных.

**Содержание работы**

Решите системы уравнений методом Гаусса:



.

**Практическая работа №16**

**Вариант 1**

**Тема:** Выполнение действий над комплексными числами, заданными в алгебраической форме.

**Цель**: Научиться выполнять действия над комплексными числами.

**Методические указания**

1. Понятие мнимой единицы: , *i* – мнимая единица.
2. Числа вида , где *а, b* – действительные числа, *i*  - мнимая единица, называются комплексными. *a –* действительная часть, *bi* – мнимая часть.

3. Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Сложение, вычитание, умножение комплексных чисел в алгебраической форме производят по правилам соответствующих действий над многочленами.

**Пример 1.** Даны комплексные числа*z*1 = 2 + 3*i*, *z*2 = 5 – 7*i*. Найти:

а**)***z*1 + *z*2; б) *z*1 – *z*2; в) *z*1*z*2.

*Решение.*

а) *z*1 + *z*2 = (2 + 3*i*) + (5 – 7*i*) = 2 + 3*i* + 5 – 7*i* = (2 + 5) + (3*i* – 7*i*) = 7 – 4*i*;  
б) *z*1 – *z*2 = (2 + 3*i*) – (5 – 7*i*) = 2 + 3*i* – 5 + 7*i* = (2 – 5) + (3*i* + 7*i*) = – 3 + 10*i*;  
в) *z*1*z*2 = (2 + 3*i*)(5 – 7*i*) = 10 – 14*i* + 15*i* – 21*i*2 = 10 – 14*i* + 15*i* + 21 = (10 + 21) + (– 14*i* +15*i*) = 31 + *i*  
(здесь учтено, что *i*2 = – 1).Два комплексных числа называются *сопряженным,* если они отличаются друг от друга только знаками перед мнимой частью.

Произведение двух сопряженных чисел всегда равно действительному числу. Воспользуемся этим свойством для выполнения деления двух комплексных чисел. Чтобы выполнить деление, произведем дополнительное действие: умножим делимое и делитель на комплексное число, сопряженное делителю.

**Пример 2.** Выполнить деление:

*Решение.* Имеем http://das-it-super.ucoz.ru/no34_6.jpg

Произведем умножение для делимого и делителя в отдельности:

(2 + 3*i*)(5 + 7*i*) = 10 + 14*i* + 15*i* + 21*i*2 = – 11 + 29*i*;  
(5 – 7*i*)(5 + 7*i*) = 25 – 49*i*2 = 25 + 49 = 74.Итак,

http://das-it-super.ucoz.ru/no34_7.jpg

Рассмотрим решение квадратных уравнений, дискриминант которых отрицателен.

**Пример 3.** Решите уравнение

*x*2 – 6*x* + 13 = 0;

*Решение.* а) Найдем дискриминант по формуле

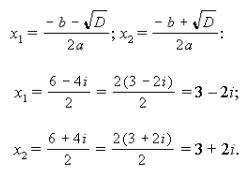
*D* = *b*2 – 4*ac*.

Так как *a* = 1, *b* = – 6, *c* = 13, то

*D* = (– 6)2 – 4\*1\*13 = 36 – 52 = – 16;

http://das-it-super.ucoz.ru/no34_11.jpg

Корни уравнения находим по формулам



Мы видим, что если дискриминант квадратного уравнения отрицателен, то квадратное уравнение имеет два сопряженных комплексных корня.

**Содержание работы**

1. Вычислить:



1. Найти значения ***х***и ***у***из равенств:



1. Выполнить действия:



1. Решить квадратные уравнения:

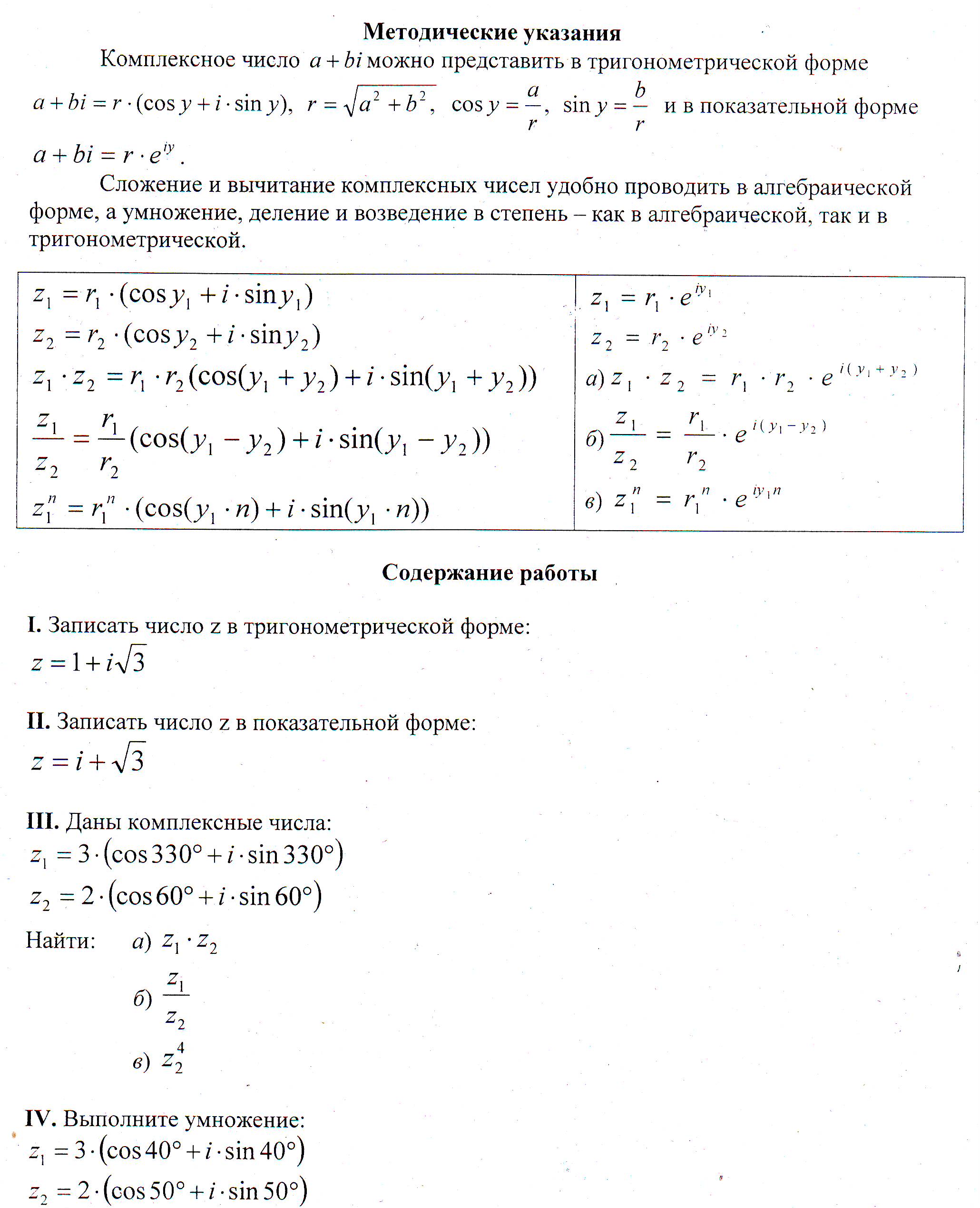


**Практическая работа № 17**

**Вариант 1**

**Тема**: Выполнение действий над комплексными числами ,заданными в тригонометрической и показательной форме.

**Цель:** Научиться выполнять действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной форме.



|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

|  |
| --- |
| **Практическая работа №18**  **Вариант 1**  **Тема.** Решение задач с элементами комбинаторики.  **Цель.** Сформировать умение решать задачи с элементами комбинаторики.  **Методические указания**  Произведение всех натуральных чисел от *1* до *n* включительно называют  n-факториалом и пишут n!=1×2×3…(n-1)×n  Pn=n! Pn- перестановка из n элементов.  А - размещение.  С - сочетания.  **Пример1**. Сколькими способами 7 книг разных авторов можно расставить на полке в один ряд?  Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же *п* различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок обозначается Р*п* и оно равно *п*!, т.е. Р*п* = *п*!, где *п*! = 1 \* 2 \* 3 \* … *п*.  Решение**:** Р7 = 7!, где 7! = 1 \* 2 \* 3 \* 4 \* 5 \* 6 \* 7 =5040, значит существует 5040 способов осуществить расстановку книг.  Ответ: 5040 способов.  Размещения – соединения, содержащие по m предметов из числа n данных, различающихся либо порядком предметов, либо самими предметами; число их.  В комбинаторике размещением называется расположение “предметов” на некоторых “местах” при условии, что каждое место занято в точности одним предметом и все предметы различны.  В отличие от сочетаний размещения учитывают порядок следования предметов. Так, например, наборы < 2,1,3 > и < 3,2,1 > являются различными, хотя состоят из одних и тех же элементов {1,2,3} (то есть, совпадают как сочетания).  **Пример2.** Сколько можно составить телефонных номеров из 6 цифр каждый, так чтобы все цифры были различны? Это пример задачи на размещение без повторений.  Размещаются здесь десять цифр по 6. Значит, ответ на выше поставленную задачу будет: http://festival.1september.ru/articles/595703/Image3177.gif  Ответ:151200 способов  **Содержание работы**  **1.** Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 8, 9 так, чтобы в каждом числе не было одина­ковых цифр?  2. Из 6 открыток надо выбрать 3. Сколькими спосо­бами это можно сделать?  3. Решить уравнение  4. Найти X, если  5. Вычислить:  а) б)  в)  **Практическая работа №19**  **Вариант 1**  **Тема:** Решение простейших задач на определение вероятностей события.  **Цель:** Сформировать умения находить вероятность события, используя классическое определение вероятностей и элементов комбинаторики.  **Методические указания**  **1. Основные формулы комбинаторики**  Pn=n! Pn- перестановка из n элементов.  А - размещение.  С - сочетания.  **2. Классическое определение вероятности события.**  http://www.matburo.ru/tv/tvformul/image008.gif, где http://www.matburo.ru/tv/tvformul/image010.gif - число благоприятствующих событию http://www.matburo.ru/tv/tvformul/image012.gif исходов, http://www.matburo.ru/tv/tvformul/image014.gif - число всех элементарных равновозможных исходов.  **Пример1***.*В классе 30 учащихся. Из них 12 мальчиков, остальные девочки. Известно, что к доске должны быть вызваны двое учащихся. Какова вероятность, что это девочки? Решение:Обозначим событие, вероятность которого надо найти, буквой А. Очевидно, что по условию задачи порядок вызова к доске не играет роли, поэтому N=http://rudocs.exdat.com/pars_docs/tw_refs/81/80957/80957_html_6e4aa197.gif. Найдём теперь число М благоприятствующих исходов. Для этого следует определить число способов выбора двух девочек из 18. Оно равно  http://rudocs.exdat.com/pars_docs/tw_refs/81/80957/80957_html_m7dccdced.gif. По определению вероятности http://rudocs.exdat.com/pars_docs/tw_refs/81/80957/80957_html_1e66badd.gif.  Свойства вероятностей 1. Вероятность достоверного события равна 1: http://rudocs.exdat.com/pars_docs/tw_refs/81/80957/80957_html_bad447f.gif. 2. Вероятность невозможного события равна 0: http://rudocs.exdat.com/pars_docs/tw_refs/81/80957/80957_html_3bed2aa7.gif Теорема. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1: http://rudocs.exdat.com/pars_docs/tw_refs/81/80957/80957_html_m1a8d308e.gif. Вероятность противоположного события находится по формуле: http://rudocs.exdat.com/pars_docs/tw_refs/81/80957/80957_html_m31b7e941.gif.  **Пример2**.Вероятность попадания некоторым стрелком по бегущей мишени равна 0,8. какова вероятность того, что этот стрелок промахнётся , сделав выстрел? Решение:Пусть событие А – попадание по мишени, тогда Р(А)=0,8. Событие http://rudocs.exdat.com/pars_docs/tw_refs/81/80957/80957_html_20faa0a4.gif - промах. http://rudocs.exdat.com/pars_docs/tw_refs/81/80957/80957_html_m66982d99.gif= 1-Р(А)=1-0,8=0,2. Ответ:0,2.  **Содержание работы**  **Задача 1.**Игральный кубик (кость) бросили один раз. Какова вероятность того, что выпало число очков, больше чем 4.  **задача 2.**В соревнованиях по толканию ядра участвуют 4 спортсмена из Финляндии, 7 спортсменов из Дании, 9 спортсменов из Швеции и 5 — из Норвегии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Швеции.  **Задача 3.**Вероятность того, что новая шариковая ручка пишет плохо (или не пишет), равна [0,1](http://dist-tutor.info/filter/tex/displaytex.php?0,1). Покупатель в магазине выбирает одну такую ручку. Найдите вероятность того, что эта ручка пишет хорошо.  **Задача 4.**На экзамене по геометрии школьнику достается один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна [0,2](http://dist-tutor.info/filter/tex/displaytex.php?0,2). Вероятность того, что это вопрос на тему «Параллелограмм», равна [0,15](http://dist-tutor.info/filter/tex/displaytex.php?0,15). Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.  **Задача 5.**Из урны, в которой находятся 5 белых и 3 черных шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что шар окажется чёрным.  **Задача 6**. В ящике в случайном порядке разложены 20 деталей, причем 5 из них стандартные. Рабочий берет наудачу 3 детали. Найти вероятность того, что по крайней мере одна из взятых деталей окажется стандартной.  **Задача 7.**Найти вероятность того, что наудачу взятое двухзначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно. |

**Практическая работа № 20**

**Вариант 1**

**Тема:** Решение простейших задач на определение дисперсии, математического ожидания и среднего квадратического отклонения случайной величины.

**Цель:** Сформировать умения находить математическое ожидание и дисперсию случайной величины по заданному закону её распределения.

**Методические указания**

Математическим ожиданиемдискретной случайной величины называется сумма произведений ее возможных значений на соответствующие им вероятности:

***М*(*Х*) = *х*1*р*1 + *х*2*р*2 + … + *хпрп .***

Замечание 1***.***Математическое ожидание называют иногда взвешенным средним, так как оно приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины при большом числе опытов.

Замечание 2.Из определения математического ожидания следует, что его значение не меньше наименьшего возможного значения случайной величины и не больше наибольшего.

Дисперсией (рассеянием**)**случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от ее математического ожидания:

*D*(*X*) = *M* (*X – M*(*X*))².

Средним квадратическим отклонением σ случайной величины ***Х*** называется квадратный корень из дисперсии.

Пример  
Закон распределения дискретной случайной величины Х задан в таблице. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Условие задачи | | | | | |
| ***xi*** | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| ***pi*** | 0,2 | 0,3 | 0,1 | 0,2 | 0,2 |

Решение  
Расчет ведем по формулам для числовых характеристик дискретных случайных величин.

Математическое ожидание:  
*http://www.coolreferat.com/ref-2_1124556703-775.coolpic  
Дисперсия:*http://www.coolreferat.com/ref-2_1124557478-1256.coolpic  
Среднее квадратическое отклонение:  
http://www.coolreferat.com/ref-2_1124558734-408.coolpic

**Содержание работы**

1. Даны вероятности значений случайной величины Х: значение 7 имеет вероятность 0,2; значение 1 – вероятность 0,3; значение 5 – вероятность 0,1; значение 4 – вероятность 0,4. Постройте ряд распределения случайной величины Х и определите математическое ожидание, дисперсию.
2. Случайная величина Х характеризуется рядом распределения:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|  | 0,2 | 0,4 | 0,3 | 0,08 | 0,02 |

Определите математическое ожидание и дисперсию.

**Критерии оценки знаний обучающихся.**

Отчетные практические работы оформляются письменно в отдельной тетради и предъявляются преподавателю для проверки и контроля.

При оценке практической работы необходимо учитывать:

- качество и оформление работы;

- отношение к работе;

- умение применять формулы и правила;

- полноту выполнения работы и количество допущенных ошибок при вычислениях.

Оценка «5» (отлично) выставляется в случае полного выполнения работы, отсутствия ошибок при вычислениях, полное обоснование решения.

Оценка «4» (хорошо) выставляется в случае полного выполнения всего объема работ при наличии несущественных ошибок при вычислениях, повлиявших на общий результат работы.

Оценка «3» (удовлетворительно) выставляется в случае недостаточно полного выполнения всех заданий работы, при наличии ошибок, которые не оказали существенного влияния на окончательный результат.

Оценка «2» (неудовлетворительно) выставляется в случае, если допущены принципиальные ошибки в решении, вычислениях, работа выполнена крайне небрежно.

**Литература**

Основные источники:

1. Математика: учеб. Пособие/В.П. Омельченко, Э.В. Курбатова. – Изд. 6-е, стер. – Ростов н/Д: Феникс, 2012. – 380с. – (Среднее профессиональное образование.

1. Математика: учебник для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования/ И.Д. Пехлецкий. – 6-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 304 с.
2. Сборник задач по математике/А.А. Дадаян. М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2015. – 352 с. (Профессиональное образование).

Дополнительные источники:

1. Сборник задач по математике с решениями для техникумов/ И.Л. Соловейчик, В.Т. Лисичкин. – М.: ООО «Издательский дом ОНИКС 21 век»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2008. – 464 с.: ил.