Государственное профессиональное образовательное учреждение

«Тульский областной медицинский колледж»

Узловский филиал

**«Методические рекомендации для самостоятельной работы по математике по теме: Дифференциальное и интегральное исчисление»**

**для специальностей**  34.02.01 *Сестринское дело,*

*31.02.01Лечебное дело*

**Составил: Змеева Л.Г.,**

**Преподаватель математики**

**высшей квалификационной категории**

**2017г**

Методическое пособие предназначено для использования студентами на аудиторных и внеаудиторных занятиях по математике. Составлено в соответствии с требованиями ФГОС для специальностей СПО 31.02.01 Лечебное дело, 34.02.01 Сестринское дело на базе полного среднего образования. В методических рекомендациях дан необходимый теоретический материал и образцы решения задач и упражнений по основным темам курса математики для СПО «Дифференциальное и интегральное исчисление». Образцы решения типичных задач приводятся подробно, с комментариями. Рассмотрено решение задач разного уровня сложности. Обращено внимание на основные трудности и типичные ошибки, которые встречаются при выполнении практических работ студентами. Для самостоятельного решения даны задачи разного уровня сложности.

Методическое пособие создано для оказания помощи студентам в достижении образовательного стандарта при освоении основной профессиональной программы СПО при выполнении практических работ, при подготовке к зачету, а также для ликвидации пробелов в знаниях по математике.

**СОДЕРЖАНИЕ**

1. Введение \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_с. 6
2. Темы
3. Пределы функций, основные теоремы о пределах.\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ с. 8
4. Производная. Правила вычисления производной.\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_с.13
5. Применение производной для исследования функции.\_\_\_\_\_\_\_\_\_ с.19
6. Неопределенный интеграл. Методы интегрирования.\_\_\_\_\_\_\_\_\_ с.28
7. Определенный интеграл. Применение интеграла для вычисления площадей фигур.\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ с.43
8. Дифференциальные уравнения.\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ с.47
9. Ряды. Сходимость рядов. Признак Даламбера \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ с.53
10. Список использованных источников\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ с.60

**ВВЕДЕНИЕ**

Тема «Дифференциальное и интегральное исчисление» в курсе математики СПО для обучающихся является наиболее сложной.

***Целью***данного пособия является изложение необходимого теоретического материала в доступной и краткой форме и в соответствии с требованиями ФГОС для использования его при решении задач и упражнений, для повышения качества математического образования.

***Задачей***  *я*вляется формирование следующих ключевых компетенций: ценностно-смысловой, учебно-познавательной, личностной.

Пособие направлено на ***формирование*** у учащихся следующих ***умений***:

***-в направлении личностного развития***: понимать смысл своей учебной деятельности (для подготовки к зачету, для применения знаний в профессии, для возможности продолжить образование и т.д.);

**- *в метапредметном направлении***: самоорганизовываться для достижения своих целей, корректировать свои действия (вовремя исправить ошибки и получить оценку успешности усвоения), выбирать рациональный путь для решения задач, эффективно взаимодействовать с преподавателем .

**-*в предметном направлении***: применять изученные методы при решении задач базового и углубленного уровней содержания математического образования.

В пособии в кратком виде изложен необходимый теоретический материал по темам «Дифференциальное и интегральное исчисление, пределы и ряды», рассматривается решение типичных задач с применением правил и методов дифференциального и интегрального исчисления, задач на применение производной к исследованию функций, применение интеграла для нахождения площадей фигур, вычисление пределов, задач на сходимость рядов. Рассмотрено решение задач разного уровня сложности. Показана взаимосвязь дифференциального и интегрального исчисления при проведении проверки решения задач на нахождение интегралов. После каждой темы даны задания для самостоятельного решения различного уровня сложности. В пособии рассмотрено решение достаточно большого количества примеров, что поможет студентам при выполнении самостоятельных работ для выработки навыков решения и применения полученных знаний на контрольных работах и зачете.

В пособии представлены следующие разновидности заданий для самостоятельной работы:

* задания, проверяющие усвоение важнейших элементов содержания темы ;
* задания, проверяющие усвоение знаний о взаимосвязи дифференциального и интегрального исчиснения;
* расчетные задачи на вычисление значений функции в указанной точке, вычисление площадей.

Успешность выполнения заданий во многом определяется осознанным пониманием соответствующего теоретического материала, владением обширным объемом фактологических сведений, а также умением применять полученные знания в различных взаимосвязях. Темы и задания для самостоятельного решения в пособии структурированы. В структуре каждой темы материал для усвоения и систематизации знаний предложен в справочном формате , приведены задания с решениями и комментариями, в которых описаны подходы к выполнению задания , даны задания для самостоятельного решения, которые студент может выбирать по своему усмотрению, в соответствии со своими на данный момент знаниями и умениями. При выполнении заданий имеется возможность оценить свои знания, убедиться в том, какой материал усвоен прочно, а какой требует дополнительного изучения. Задания для самостоятельного решения может использовать и преподаватель для мониторинга и объективной оценки знаний.

Содержание пособия направлено на достижение следующих целей: усвоение правил дифференцирования , таблицы производных, выработке умений нахождения производных элементарных и сложных функций, умений применять производную для исследования функций и построения графика, умений вычислять интегралы с помощью методов интегрирования, пределы, решать задачи на сходимость ряда, т.е. на формирование владения основными понятиями дифференциального и интегрального исчисления.

Наличие положительной оценки по практическим работам необходимо для получения зачета по дисциплине, поэтому в случае отсутствия на занятии по любой причине или получении неудовлетворительной оценки за практическую работу, данное пособие поможет самостоятельно подготовиться и успешно выполнить работу.

***1.Предел функции. Теоремы о пределах.***

*Цель: изучить основные теоремы о пределах и научиться применять их при выполнении упражнений, усвоить методы ликвидирования неопределенностей вида ;*

***Определение*** Число **А** называется **пределом функции y=*f(x)* при *х*, стремящемся к бесконечности,** если для любого, сколь угодно малого положительного числа http://ok-t.ru/studopediaru/baza2/3114344713090.files/image195.gif, найдется такое положительное число М>0 (зависящее от http://ok-t.ru/studopediaru/baza2/3114344713090.files/image195.gif, т.е. М=М(http://ok-t.ru/studopediaru/baza2/3114344713090.files/image195.gif)), что при http://ok-t.ru/studopediaru/baza2/3114344713090.files/image197.gif>M верно неравенство http://ok-t.ru/studopediaru/baza2/3114344713090.files/image199.gif<http://ok-t.ru/studopediaru/baza2/3114344713090.files/image195.gif.

|  |
| --- |
|  |

Пусть существуют конечные пределы и . Тогда справедливы следующие утверждения:

* *;*
* *;*
* *,* где *с* – число;
* , если .

***Бесконечно малые и бесконечно большие функции.***

*Бесконечно малой функцией при * называется функция , предел которой равен нулю при : *.*

Если значения функции *f(x)* неограниченно возрастают по абсолютной величине при , то такую функцию называют *бесконечно большой при .* Предел этой функции обозначают знаком бесконечности : *.*

*Теорема о связи бесконечно малых и бесконечно больших функций.*

Если , то .

Если , то 

Пример 1)



***2*)** 

Здесь применима теорема о пределе частного, так как существуют конечные пределы числителя и знаменателя, и предел знаменателя не равен нулю.

***3*)** 

Здесь использована теорема о связи бесконечно малой и бесконечно большой функций.

***4*)** .

Пределы числителя и знаменателя дроби равны . В этом случае говорят, что имеется неопределенность вида «бесконечность на бесконечность». Теорема о пределе частного здесь не применима.

*Чтобы раскрыть неопределенность вида  при , каждый член числителя и знаменателя дроби делят на x в наивысшей степени (в нашем примере на х2), отчего величина дроби не изменится, но исчезнет неопределенность.*



так как    

**Задача.** Вычислить пределы функции  при

**

**Решение.** В задаче следует найти предел частного. С этой целью необходимо вычислить пределы числителя и знаменателя дроби, подставив в них предельное значение аргумента*.*

***А)*** .

Здесь применима теорема о пределе частного.

***Б)*** **.

При подстановке  в числитель и знаменатель дроби убеждаемся, что их значения равны нулю, поэтому теорема о пределе частного здесь не применима. В данном случае говорят, что имеется неопределенность вида .

*Неопределенность вида  при  может быть раскрыта сокращением дроби на множитель вида* *(х–х0)*, *который обращает числитель и знаменатель дроби в нуль, в данном случае на* *(х+4)*. Поэтому, следует разложить на множители числитель и знаменатель дроби.

|  |  |
| --- | --- |
| 3*х2+*10*х –* 8 = 0; | 4*х2*+15*х*– 4 = 0; |
| *D* = | *D* = |
|  |  |
| 3*х2+*10*х*–8 = 3(*х+*4)(*х*–2/3) = | 4*х2+*15*х* – 4 = 4(*х+*4)(*х*–1/4 ) = |
| = (*х*+4)(3*х*–2). | = (*х*+4)(4*х*–1). |

**Самостоятельно**

Вычислить пределы функции *y=f(x),* при указанном поведении аргумента *x*.

**1**. ;

*а) ; б ); в) ; г) ; д) .*

**2**. ;

*а) ; б ); в) ; г) ; д) .*

**3**. ;

*а) ; б) ; в) ; г) ; д).*

**4**. ;

*а) ; б) ; в) ; г) ; д)*.

**5**. ;

*а); ; б) ; в) ;г). Д) *

**6**. ;

*а) ; б) ; в) ; г) ; д) .*

**7**. ;

*а) ; б) ; в) ; г) ; д) .*

**8**. ;

*а) ; б) ; в) ; г) ; д) .*

**9**. ;

*а) ; б) ; в) ; г) ; д) .*

**10**. ;

*а) ; б) ; в) ; г) ; д) .*

***Критерии оценки:***

*Выполнены правильно 5 заданий –3 (удовлетворительно);*

*Выполнены правильно 8заданий – 4 (хорошо);*

*Выполнены правильно 10 заданий-5 (отлично)*

***2. Производная функции***

##### *Цель: изучить правила дифференцирования и таблицу производных и научиться применять их для дифференцирования функций.*

##### ***Правила дифференцирования.***

Пусть даны дифференцируемые функции *u(x)* и *(x)*, тогда справедливы формулы:



Отметим также, что

*а*) производная от независимой переменной равна единице:



*б*) производная постоянной величины *с* равна нулю:



*в*) постоянный множитель выносится за знак производной:



# *Производная сложной функции.*

*Сложная функция (суперпозиция функций) –* это функция вида

*y = f(u),* где *u = u(x)* , т.е. функция от функции.

Например, функция  является сложной, так как ее можно представить в виде, где 

функция  является сложной, так как ее можно представить в виде , где 

Производную сложной функции находят по правилу

.

# *Таблица производных.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Производные основных**  **элементарных функций** | **Производные сложных**  **функций** |
| 1. | 1. |
|  |  |
|  |  |
| 2. | 2. |
|  |  |
| 3. | 3. |
| 4. | 4. |
| 5. | 5. |
| 6. | 6. |
| 7. | 7. |
| 8. | 8. |
| 9. | 9. |
| 10. | 10. |
| 11. | 11. |

**Задача.** Найти производные функций :

*а) ; б) ;*

*в) ; г) .*

**Решение.**

***А*)** .

Приведем функцию *y*  к виду, удобному для дифференцирования, используя правила действий со степенями .



По правилу дифференцирования суммы и разности функции:



***Б)*** 

Воспользуемся правилом дифференцирования частного , где .



***в)*** *.*

Функция  сложная. Ее можно представить в виде , где  Применим формулу .



Производную функции  находим по правилу дифференцирования произведения:

, где 



Таким образом,



Тогда дифференциал функции *y:*

.

***Г)*** *.*

Производную первого слагаемого найдем как производную сложной функции  где  применяя формулу

:

**

Производную функции  найдем как производную функции , где  применяя формулу

.



Таким образом,



**Задания для самостоятельной работы**

Найти производные данных функций

|  |  |
| --- | --- |
| **1.** *а)* ; | *б)* ; |
| *в)*; | *г) .* |
|  |  |
|  |  |
| **2*.*** *a)*; | *б)* ; |
| *в)*; | *г) .* |
|  |  |
| **3.** *а)*; | *б)* ; |
| *в)*; | *г) .* |
|  |  |
|  |  |
| **4.** *а)*; | *б)* ; |
| *в)*; | *г) .* |
|  |  |
|  |  |
| **5.** *а)*; | *б)* ; |
| *в)*; | *г) .* |
|  |  |
|  |  |
| **6.** *а)***;** | *б)* ; |
| *в)*; | *г) .* |
|  |  |
|  |  |
| **7.** *а)*; | *б)* **;** |
| *в)*; | *г) .* |
| **8.***а)*; | *б)* ; |
| *в)*; | *г) .* |
| **9.** *а)*; | *б)* ; |
| *в)*; | *г ) .* |
| **10.** *а)*; | *б)*; |
| *в)*;  ***Критерии оценки:***  ***Выполнено правильно 5 любых номеров задания – 3 (удовлетворительно);***  ***Выполнено правильно 8 любых номеров задания -4 (хорошо);***  ***Выполнено правильно 10 заданий-5 (отлично)***  ***3.Применение производной для исследования функции***  Внимательно изучите материал по теме и его применение на примере исследования конкретной функции. Запомните план исследования функции и выполните сами примеры к теме. | *Г)* |
|  |  |
|  |  |
| ***Исследовать функцию y = f (x) и построить ее график.***  *y*  *x*  ***A***  ***B***  *b*  *c*  *a*  ***DA***  ***C***  *d*  На рисунке изображен график некоторой функции |  |
|  |  |

Интервалы монотонности этой функции:

функция возрастает при ;

* функция убывает при  и .

Точки экстремума:

*С* – точка максимума (max); *A* – точка минимума (min).

Интервалы выпуклости:

* функция выпуклая при ;
* функция вогнутая при  и при .

Точки *В* и *D* являются точками перегиба*,* так как в них происходит смена выпуклости на вогнутость или наоборот.

1. ***Чтобы исследовать функцию y = f(x) на монотонность и***

***точки экстремума нужно:***

*а)* Вычислить производную .

*Б)* Найти ***критические точки***, т.е. точки, в которых производная равна нулю или не существует.

*В)* Определить знак производной на интервалах между критическими

точками в области определения функции.

*Г)* Сделать выводы о промежутках монотонности функции согласно

***признакам монотонности****:*

если  на  *(a;b*), то функция убывает при ,

если  на  *(a;b),* то функция возрастает при *.*

*Д)* Сделать выводы о наличии точек экстремума.

Если при переходе через критическую точку  произ­вод­ная меняет знак с плюса на минус, то  – точка максимума; если с минуса на плюс, то  – точка минимума.

***Правило исследования функции y = f(x) на выпуклость, вогнутость и точки перегиба.***

*А*) Вычислить вторую производную .

*Б*) Найти точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует, эти точки называются подозрительными на перегиб.

*В*) Определить знак второй производной на интервалах между найденными точками в области определения функции.

*Г*) Сделать выводы о промежутках выпуклости и вогнутости согласно *признакам выпуклости и вогнутости:*

если  на *(a;b),* то график функции вогнутый при ,

если  на *(a;b),* то график функции выпуклый при *.*

*Д*) Сделать выводы о наличии точек перегиба .

Если при переходе через точку вторая производная меняет знак, то в этой точке имеется перегиб графика функции.

1. ***Четность и периодичность функции.***

Функция *y = f(x)* называется *четной*, если для любых *x* из области определения функции справедливо равенство *f(–x)= f(x)*, в этом случае график симметричен относительно оси *Oy*.

Для *нечетной* функции для любых *x* из области определения справедливо равенство *f(–x)= – f(x)*, ее график симметричен относительно начала координат.

Функция *y = f(x)* называется *периодической*, если существует число  такое, что для любых *x* из области определения функции справедливо *f(x+T)= f(x).*

###### **Пример .** Исследовать функцию и построить ее график.

**Решение.** Исследование будем проводить по следующей схеме.

1. *Область определения функции*.

Данная функция –многочлен, поэтому ее областью определения является множество всех действительных чисел,

т.е. *x* (–;+).

2. *Четность и нечетность* *функции.*



Функция не обладает свойствами четности или нечетности, т.е. функция ни четная, ни нечетная. Следовательно, график функции не будет симметричен ни относительно оси O*у*, ни относительно начала координат.

1. *Периодичность функции*.

Данная функция непериодическая, так как является многочленом.

1. *Непрерывность функции*.

На всей области определения данная функция непрерывна как многочлен.

Этот пункт дается для ознакомления, включать его в самостоятельную работу необязательно

1. ***Поведение функции на концах области определения.***

Концами области определения являются  и , так как  Найдем пределы функции при .



Таким образом, слева, при , график функции уходит неограниченно вниз, а справа, при , – неограниченно вверх.

1. ***Интервалы монотонности и точки экстремума.***

Вычислим производную функции и найдем критические точки.

.

Производная существует при любых *x*.

Решим уравнение .

 ; 





Следовательно,



Точки  и  критические. Они делят область определения функции на интервалы:  Изобразим эти интервалы на числовой оси

**

*y*



4

***x***



max

min

Поведение функции на каждом интервале определяется знаком производной. Для определения знака  на интервале достаточно взять любое значение *х* из рассматриваемого интервала и подставить его в производную .

***А*)** На интервале  выберем число, например, , и подставим его в производную: .

Так как на интервале  производная , следовательно, функция *y*  возрастает на этом интервале

***Б*)** На интервале  возьмем , подставим в производную, получим  Следовательно, на интервале  функция убывает.

***В*)** На интервале  возьмем значение . Видим, что  следовательно, на интервале  функция возрастает.

Знаки первой производной проставим на рисунке.

Замечаем, что при переходе через точку  производная поменяла знак с плюса на минус, значит,  является точкой максимума (признак экстремума).

Найдем значение функции *y* в этой точке:



Таким образом, график имеет максимум в точке *А*.

При переходе через точку  производная меняет знак с минуса на плюс ( см. рисунок) Это означает, что  – точка минимума.



В точке *B*(4;0) график функции имеет минимум.

1. ***Интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.***

Найдем производную второго порядка от рассматриваемой функции . Так как  то .

Вторая производная существует при любых значениях *x.*

Найдем точки, где :

3*x –* 8 = 0.

Значение  является единственным подозрительным на перегиб. Эта точка делит область определения  на интервалы  и 

***А*)** На интервале  выберем любое число, например,  и подставим его во вторую производную . Получим , значит, на интервале  график функции выпуклый ( признак выпуклости и вогнутости).

***Б*)** На интервале  возьмем, например,  и подставим во вторую производную. Получим , значит, на интервале  график функции вогнутый.

Знаки второй производной проставим на рисунке.

Так как при переходе через точку  вторая производная  меняет знак, то  – точка перегиба (см. условие перегиба).



*y*

Рис. 6



***x***

перегиб





Таким образом, точка *С* – единственная точка перегиба.

1. *Точки пересечения графика с осями координат*.

На оси O*у ,*   Получили точку пересечения с осью O*у:* (0;0).

На оси O*x ,* тогда ,



Произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю, в нашем случае  или 

Решим квадратное уравнение: 



Значения функции в точках  и  были найдены ранее:



Таким образом, график функции пересекает ось О*x* в точках (0;0) и (4;0).

1. ***Дополнительные точки*.**

Для более точного построения графика можно найти дополнительные точки. Например, найдем значение функции *y* при :



*D* – дополнительная точка для построения графика.

*Выпишем результаты исследования функции *.

1. Область определения .

2. 

3. Функция возрастает на промежутках  и 

убывает на промежутке.

4. Максимум функции в точке *А*, минимум – в точке *В*(4;0).

5. График выпуклый на интервале  и вогнутый на интервале .

6. Точка перегиба *С.*

7. Точки пересечения с осями координат: (0;0), (4;0).

8. Дополнительная точка *D*.

*Построим график функции*

На плоскости O*xy* отметим все характерные точки:

точки пересечения с осями координат, точки экстремумов, точку перегиба, а также дополнительную точку.

В силу непрерывности функции соединим все отмеченные точки плавной кривой, продолжив график влево вниз и вправо вверх согласно поведению функции на концах области определения и учитывая характер монотонности и выпуклости графика функции. На рисунке изображен

искомый график. **Примечание.** Графики многочленов представляют собой непрерывные линии, весьма разнообразные по форме. Они могут иметь различное количество точек экстремумов и перегибов, а также по-разному вести себя на бесконечности, т.е. при .

***A***

***B***

***C***

***D***

1

2

4

5

–1

0

1

2

3

4

5

*x*

*y*

Рис. 7

**Задания для самостоятельной работы**

Исследуйте функции и постройте график

**1. . 2. .**

**3. . 4. .**

**5. . 6. .**

**7. . 8. .**

**9. . 10. .**

***Критерии оценки:***

*Правильно выполнены любые 5 заданий – оценка 3 (удовлетворительно);*

*Выполнено правильно 8 заданий- оценка 4-(хорошо);*

*Выполнено правильно 10 заданий- оценка 5( отлично)*

1. **Неопределенный интеграл, методы интегрирования**

*Цель: изучить понятие неопределенного интеграла, его свойства и таблицу интегралов, ознакомиться с методами интегрирования и научиться интегрировать функции.*

***1. Понятия первообразной и неопределенного интеграла.***

Функция  называется *первообразной* для функции , если .

Множество всех первообразных функции  задается формулой *F(x)+C*, где *С* – произвольное число, и называется *неопределенным интегралом* от функции  :

.

1. **Свойства неопределенного интеграла.**

;

,

где *k* – постоянная, отличная от нуля.

**Таблица интегралов***.*

1.  8. 

2.  9. 

3.  10. 

4.  11. 

5.  12. 

6.  13. 

7.  14. 

15. 

**4. Основные методы интегрирования.**

Идея всех методов интегрирования заключается в приведении искомого интеграла к табличному интегралу или сумме табличных интегралов.

***1. Непосредственное интегрирование.***

Интеграл приводится к табличному виду путем алгебраических или тригонометрических преобразований.

**2. *Замена переменной (интегрирование подстановкой).***

Приведение интеграла к табличному виду осуществляется с помощью подстановки *t = ϕ(x)*. Тогда дифференциал *dt* равен 

Рекомендации по введению новой переменной рассмотрим в примерах.

**3. *Интегрирование по частям.***

Интегрирование по частям производится по формуле



Этим методом интегрируются некоторые произведения, например, произведения степенной функции на логарифмическую, или на показательную, или на тригонометрическую, или на обратные тригонометрические функции.

Чтобы воспользоваться формулой, следует один множитель в подынтегральном выражении обозначить *u*, а другой множитель вместе с *dx* принять за *dv*.

Для того, чтобы интеграл в правой части был проще данного интеграла, надо правильно выбрать множители *u* и *dv*.

В интегралах, берущихся по частям, обычно *логарифмическую* и *обратные тригонометрические* функции принимают за *u*, а *показательную*  или *тригонометрические* функции относят к *dv*.

***Связь между интегрированием и дифференцированием.***

Интегрирование – это операция, обратная дифференцированию. Если интеграл взят правильно, то производная от интеграла равна подынтегральной функции:

.

Теперь рассмотрим задачи на нахождение неопределенного интеграла.

**Задача.**Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

**Решение.** Интеграл под буквой ***а*** берется методом непосредственного интегрирования. При этом используются табличные интегралы от степенных функций:

***а*) **









**Проверка.**







Получена подынтегральная функция, что и требовалось показать.

***Б.*1) **

Интеграл в примерах  ***Б***  берется методом замены переменной (подстановкой).

За новую переменную возьмем *аргумент подынтегральной функции*  и найдем *dt*по формуле:



Тогда

****



В последнем действии осуществлен переход к исходной переменной *x* с учетом, что .

**Проверка.**





Что и требовалось показать.

***Б*.2) **.

За новую переменную возьмем *показатель степени* .

Тогда

****

**Проверка.**



.

Получена подынтегральная функция.

***Б*.3) **.

За новую переменную возьмем *подкоренное выражение* .

****

**Проверка.**

****

**** Что и требовалось показать.

***Б*.4) **.

За новую переменную возьмем *функцию, стоящую в основании степени*  . Тогда





**Проверка.**

****

***.***

Получена подынтегральная функция.

Интеграл под буквой ***в*** также берется методом замены переменной (подстановкой

***В*.1) **.

За новую переменную удобно взять *аргумент тригонометрической функции,* если к тому же под интегралом присутствует производная этого аргумента (с точностью до постоянного множителя).

****

****

**Проверка.**

****

Что и требовалось показать.

***В*.2) **.

Здесь за новую переменную удобно принять *показатель степени*, учитывая, что под знаком интеграла присутствует производная этого показателя (с точностью до постоянного множителя).

****

**Проверка.**

******

Верно

***в*.3) **.

За новую переменную удобно взять *подкоренное выражение*, так как под интегралом присутствует также его производная (с точностью до постоянного множителя).

******

**Проверка**.





***в*.4)** .

За новую переменную берем функцию, стоящую в *основании степени*, так как подынтегральное выражение содержит производную этой функции (с точностью до постоянного множителя).



***В*.5) **.

Здесь под интегралом содержится *логарифмическая функция,* удобно принять ее за новую переменную, учитывая, что под знаком интеграла присутствует производная этой функции (с точностью до постоянного множителя).





**Проверка**.



Верно.

***В*.6) .**

Часто удобно обозначать за новую переменную *знаменатель дроби подынтегральной функции.*





Интеграл под буквой ***г*** берется методом интегрирования по частям:

.

***Г*.1) **.







Проверка.



Что и требовалось показать.

***Г*.2) **.\*

****

****

****

**\*Решения задач *г*.2 и *г.*3 даны без проверки. Вы можете выполнить её самостоятельно**.

***Г*.3) **.







В пункте ***д*** надо взять интеграл от рациональной дроби.

*Рациональная дробь* – это отношение двух многочленов. Если степень многочлена в числителе строгоменьше степени многочлена в знаменателе, то дробь называется *правильной*. В противном случае дробь *неправильная*, она представляется в виде суммы некоторого многочлена и правильной рациональной дроби.

***Д*) **.

Под знаком интеграла стоит неправильная рациональная дробь, так как и в числителе и в знаменателе стоят многочлены первой степени (наивысшая степень ). Выделим целую часть с помощью следующих преобразований дроби:





Подставим полученное выражение под знак интеграла.

**=**

****



**Проверка**.







Получена подынтегральная функция.

**Решите самостоятельно:**

**1часть**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1.** | **6** | **11** |
| **2** | **7** | **12** |
| **3** | **8** | **13** |
| **4** | **9** | **14** |
| **5** | **10** | **15** |

**2часть**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **2.1** | **2.6** | **2.11** |
| **2.2** | **2.7** | **2.12** |
| **2.3** | **2.8** | **2.13** |
| **2.4** | **2.9** | **2.14** |
| **2.5** | **2.10** | **2.15** |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **3.1** | **3.6** | **3.11** |
| **3.2** | **3.7** | **3.12** |
| **3.3** | **3.8** | **3.13** |
| **3.4** | **3.9** | **3.14** |
| **3.5** | **3.10** | **3.15** |

**4 часть**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **4.1** | **4.4** | **4.7** |
| **4.2** | **4.5** | **4.8** |
| **4.3** | **4.6** | **4.9** |

***Критерии оценивания:***

***На оценку 3 ( удовлетворительно) достаточно правильно решить по 4 задания из каждой части.***

***На оценку 4 (хорошо) необходимо правильно решить по 6 заданий из каждой части.***

***На оценку 5 (отлично) необходимо правильно решить по 10 заданий из 1,2, 3 части и все задания 4 части.***

1. ***Определенный интеграл, применение интеграла для вычисления площадей фигур.***

*Цель: изучить понятие определенного интеграла, научиться вычислять определенные интегралы и площади фигур, заданных графиками функций.*

***Понятие определенного интеграла.***

*Определенный интеграл* – это число, которое находится по **формуле Ньютона-Лейбница:**

,

где  – первообразная для функции , то есть ;

,  – нижний и верхний пределы интегрирования, показывающие, как меняется переменная интегрирования *х*.

**Формула Ньютона-Лейбница** связывает определенный и неопределенный интегралы. Чтобы ею воспользоваться, следует взять сначала неопределенный интеграл, т.е. найти первообразную, причем удобно взять произвольную постоянную равной нулю: , а затем вычислить разность значений этой первообразной от верхнего и нижнего пределов.

Например:

.

*Геометрический смысл* *определенного интеграла.*

Если функция  неотрицательная на отрезке , то

, где *S* – площадь под кривой  на отрезке 

*Y* *y* 



0 ***a b*** *x*



***Применение интеграла для вычисления площадей плоских фигур.***

Площадь фигуры, заключенной между кривыми  и  на отрезке , вычисляется по формуле

,

при этом  для 

**Задача.**Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

 и . Сделать рисунок.

**Решение.** Выполним рисунок.

Первое уравнение определяет параболу, а второе – прямую линию.

Для построения параболы найдем координаты вершины и точки пересечения ее с осями координат.

Уравнение параболы , вершина параболы находится в точке .

В данной задаче , .

Итак, вершина параболы – точка (3;– 4).

Точки пересечения параболы с осями.

*С осью Ox:* , тогда . Решив квадратное уравнение (прил.1, п. 2), получаем . Точки пересечения параболы с осью  есть точки (1;0) и (5;0).

*С осью Oy:* , тогда . Точка пересечения параболы с осью  есть точка (0;5).

Строим параболу по найденным точкам, замечая, что ветви параболы направлены вверх, т.к.  , прямую  строим по двум точкам, например, при  ; при  .

Получены точки: .

Найдем точки пересечения параболы и прямой, решив систему уравнений:

.

Решим полученное квадратное уравнение:



Найдем соответствующие ординаты  из уравнения *y = x*–1*:* . Итак, точки пересечения параболы и прямой есть точки .

Заштрихуем плоскую фигуру, ограниченную параболой и прямой Здесь функции  и  ограничивают фигуру соответственно снизу и сверху, то есть  при .



5

1

0 1 3 5 6

–1

Для нахождения искомой площади воспользуемся формулой





.

**Ответ.** Искомая площадь равна: 

**Замечание.** Если одна из линий – гипербола, например, *xy = –6*, то ее можно построить по точкам. Удобно взять точки с абсциссами  и вычислить соответствующие им ординаты *y.*

**Самостоятельно вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями. Сделать чертеж.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1.** |  |  |
|  |  |  |
| **2.** |  |  |
|  |  |  |
| **3.** |  |  |
|  |  |  |
| **4.** |  |  |
|  |  |  |
| **5.** |  |  |
|  |  |  |
| **6.** |  |  |
|  |  |  |
| **7.** |  |  |
|  |  |  |
| **8.** |  |  |
|  |  |  |
| **9.** | **;** |  |
|  |  |  |
| **10.** |  |  |

1. ***Дифференциальные уравнения***

*Цель: изучить понятие дифференциального уравнения, его общего и частного решения, научиться решать дифференциальные уравнения.*

***Понятие дифференциального уравнения и его решения.***

*Дифференциальное уравнение* (ДУ) первого порядка – это уравнение вида  или , содержащее производную  от неизвестной функции .

Решением ДУ называется функция *y = y(x)*, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Например, решением уравнения  является функция  или , где *С* – произвольная постоянная.

***Общим решением*** ДУ называется функция , зависящая от произвольной постоянной *С* и удовлетворяющая ДУ при любом значении *С*.

***Частное решение*** получается из общего при конкретных значениях *С*. Чтобы выделить частное решение из общего задают начальное условие: при  или 

Совокупность дифференциального уравнения и начального условия



называется ***задачей Коши*** (для ДУ первого порядка).

**2***.* ***Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными*.**

Дифференциальное уравнение первого порядка вида 

называется уравнением *с разделяющимися переменными.*

Это уравнение можно привести к виду: ,

где переменные *x* и *y* содержатся в разных слагаемых (разделены).

Чтобы разделить переменные нужно производную  представить как отношение дифференциалов  и выполнить ряд дополнительных преобразований (примеры ниже). После разделения переменных производится почленное интегрирование обеих частей равенства. Интегралы берутся с помощью таблицы интегралов с учетом их зависимости от произвольной постоянной *С*. Затем, выражая *y*, находят общее решение ДУ: . Например, найдем общее решение уравнения .



Переменные разделились, производим почленное интегрирование.



Обозначим , получим  – общее решение ДУ.

**3.**  ***Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.***

ДУ первого порядка называется *линейным*, если его можно привести к виду: , гдеискомая функция *y* и ее производная  содержатся в первых степенях (в разных слагаемых).

Разделить переменные для такого уравнения не удается, если правая часть  отлична от нуля.

Линейные ДУ можно решать *методом Бернулли*. При этом неизвестную функцию *y* представляют в виде произведения двух функций: , для каждой из которых получают ДУ с разделяющимися переменными. Решая первое из этих уравнений, берут его частное решение, например, полагая, что *С* = 0. Для второго уравнения находят его общее решение (с учетом зависимости от *С*).

Алгоритм применения метода Бернулли показан ниже на примерах.

**Задача.** Найти общее решение дифференциального уравнения и частное решение, удовлетворяющее начальному условию , если

*а) *

*б)* 

**Решение.**

***а)*** ** Пусть , тогда 

Подставим эти выражения в дифференциальное уравнение:

**.

Сгруппируем слагаемые, имеющие общий множитель *u*:

.

Подберем функцию *v* так, чтобы обратилось в нуль выражение, стоящее в скобках:

*.*

Тогда уравнение примет вид

*.*

Два последних уравнения решаются разделением переменных, поочередно.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. ; ; | 2. Подставим  в |
|  | уравнение *.* |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Поскольку *y = uv*, то *y = (x+С)e2x* – общее решение уравнения.

Для нахождения частного решения обратимся к начальному условию:  при . Подставим эти значения в общее решение дифференциального уравнения:



Так как , то .

Подставляя найденное значение *С* = 2 в общее решение уравнения, находим частное решение:

*y = (х+2)е2х.*

**Ответ.**  *у=(х+С)е2х* – общее решение уравнения;

*у=(х+2)е2х–* частное решение уравнения, удовлетворяющее

начальному условию *y*(0) = 2.

***б)*** 

Пусть *у = uv,* тогда . Подставим *y* и  в данное уравнение:



Группируем 2-е и 3-е слагаемые: 

Потребуем, чтобы , тогда исходное уравнение примет вид: 

Решим последовательно оба уравнения, причем для первого из них берем лишь частное решение при *С* = 0.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. ; ; | 2. Подставим |
|  | в уравнение |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Так как , то  – общее решение исходного уравнения.

Для нахождения частного решения обратимся к начальным условиям: *х0* = 1; *у0* = 2 – и подставим их в найденное общее решение:



Искомое частное решение получим из общего, подставив в него найденное значение , 

**Ответ. ** – общее решение уравнения;

 – частное решение, удовлетворяющее начальному условию *y*(1) = 2.

**Задания для самостоятельного решения:**

* 1. **Уравнения с разделенными переменными**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1.1** | **1.6** | **1.11** |
| **1.2** | **1.7** | **1.12** |
| **1.3** | **1.8** | **1.13** |
| **1.4** | **1.9** | **1.14** |
| **1.5** | **1.10** | **1.15** |

1. **Уравнения с разделяющимися переменными**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **2.1** | **2.6** | **2.11** |
| **2.2** | **2.7** | **2.12** |
| **2.3** | **2.8** | **2.13** |
| **2.4** | **2.9** | **2.14** |
| **2.5** | **2.10** | **2.15** |

1. **Найти частное решение дифференциального уравнения (задача Коши).**

**3.1**



**3.2**



**3.3**



***Критерии оценивания:***

***На оценку 3 ( удовлетворительно ) достаточно правильно решить по 5 примеров из 1 и 2 части.***

***На оценку 4 (хорошо) необходимо правильно решить по 7 примеров из каждой части.***

***На оценку 5 ( отлично ) необходимо правильно решить все задания 1части, 7 заданий 2 части и 2 задания 3 части***

1. **Числовые ряды. Сходимость рядов. Признак Даламбера**

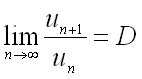
*Цель: изучить понятие числового ряда, признак сходимости ряда, научиться исследовать ряды на сходимость.*

 Пусть задана бесконечная последовательность чисел http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/theory/th_1.gif. Выражение http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/theory/th_2.gifназывается **числовым рядом**. При этом числа http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/theory/th_1.gifназываются **членами ряда**. Числовой ряд часто записывают в виде http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/theory/th_3.gif.

**Теорема** (необходимый признак сходимости ряда). Если ряд сходится, то его http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/theory/th_5.gif-й член стремится к нулю при неограниченном возрастании http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/theory/th_5.gif.

**Следствие.** Если http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/theory/th_5.gif-й член ряда не стремится к нулю при http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/theory/th_6.gif, то ряд расходится.

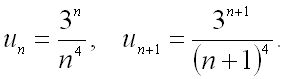
Жан Лерон Даламбер – знаменитый французский математик 18-го века.

**Теорема** (признак Даламбера). Если в ряде с положительными членами http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/theory/th_2.gifотношение http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/theory/th_4.gif-го члена ряда к http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/theory/th_5.gif-му при http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/theory/th_6.gifимеет конечный предел http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/theory/th_7.gif, т.е. , то:  
- ряд сходится в случае http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/theory/th_9.gif,  
- ряд расходится в случае http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/theory/th_10.gif.  
В случаях, когда предел не существует или он равен единице, ответа на вопрос о сходимости или расходимости числового ряда теорема не дает. Необходимо провести дополнительное исследование.

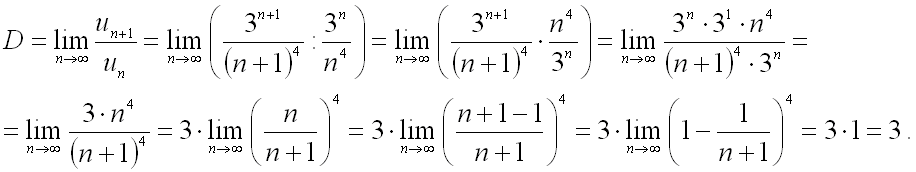
**Примеры решения задач**

**Пример 1.** Исследовать сходимость ряда .

**Решение.**

Применим признак сходимости Даламбера. Сначала запишем формулы для http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_1/e_1_2.gif-го и http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_1/e_1_3.gif-го членов ряда:  


Затем найдем предел отношения http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_1/e_1_3.gif-го члена ряда к http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_1/e_1_2.gif-му при http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_1/e_1_5.gif:

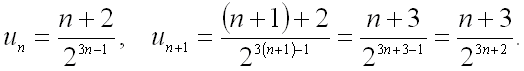


И последнее, сделаем вывод о сходимости ряда, сравнив полученное значение предела с 1. Поскольку http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_1/e_1_7.gif, то данный ряд расходится. **Ответ:** ряд расходится.

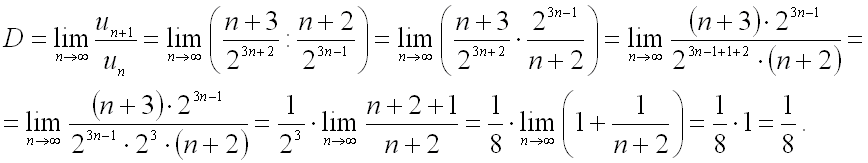
**Пример 2.** Исследовать сходимость ряда .

**Решение.**

Применим признак сходимости Даламбера. Запишем формулы для http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_2/e_2_2.gif-го и http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_2/e_2_3.gif-го членов ряда:



Найдем предел отношения http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_2/e_2_3.gif-го члена ряда к http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_2/e_2_2.gif-му при http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_2/e_2_5.gif:

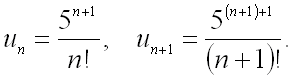


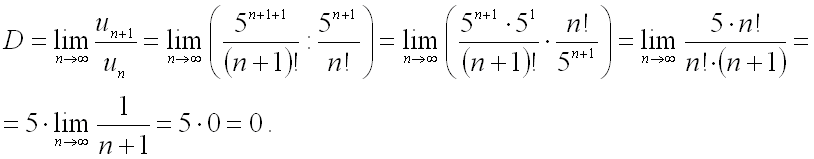
Сравним полученное значение предела с 1. Поскольку http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_2/e_2_7.gif, то данный ряд сходится.

**Ответ:** ряд сходится.

**Пример 3.** Исследовать сходимость ряда .

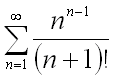
**Решение.**

Используем признак сходимости Даламбера, а также определение функции факториал. Поскольку для каждого целого положительного числа http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_3/e_3_2.gifфункция http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_3/e_3_3.gif(читается «n факториал»), по определению, равна произведению всех целых чисел от 1 до http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_3/e_3_2.gif, т.еhttp://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_3/e_3_4.gif, то http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_3/e_3_5.gif Теперь запишем формулы дляhttp://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_3/e_3_2.gif го иhttp://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_3/e_3_6.gif го членов ряда:  С учетом вышесказанного найдем предел отношения http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_3/e_3_6.gif-го члена ряда к http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_3/e_3_2.gif-му при http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_3/e_3_8.gif:



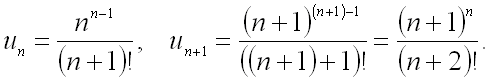
Вывод о сходимости ряда: сравнив полученное значение предела с 1 http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_3/e_3_10.gif, устанавливаем, что данный ряд сходится.

**Ответ:** ряд сходится.

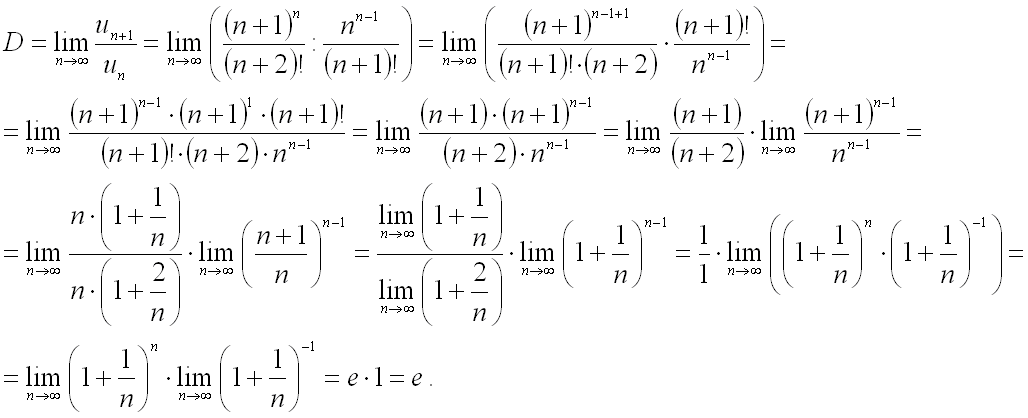
**Пример 4.** Исследовать сходимость ряда .

**Решение.**

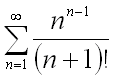
Используем признак сходимости Даламбера. Запишем формулы для http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_4/e_4_2.gif-го и http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_4/e_4_3.gif-го членов ряда:

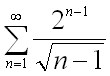


С учетом того, что http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_4/e_4_5.gif, найдем предел отношения http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_4/e_4_3.gif-го члена ряда к http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_4/e_4_2.gif-му при http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_4/e_4_6.gif:



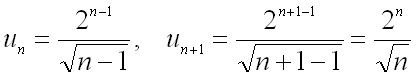
Вывод о сходимости ряда: сравнив полученное значение предела с 1 http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_4/e_4_8.gif, устанавливаем, что данный ряд расходится.

**Ответ:** ряд расходится.

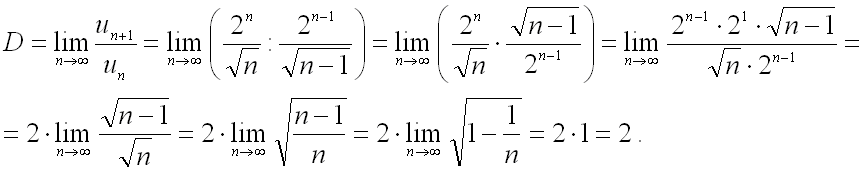
**Пример 5.** Исследовать сходимость ряда , пользуясь признаком сходимости Даламбера.

**Решение.**

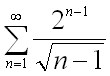
Запишем формулы для http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_5/e_5_2.gif-го и http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_5/e_5_3.gif-го членов ряда:

.

Далее найдем предел отношения http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_5/e_5_3.gif-го члена ряда к http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_5/e_5_2.gif-му при http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_5/e_5_5.gif:

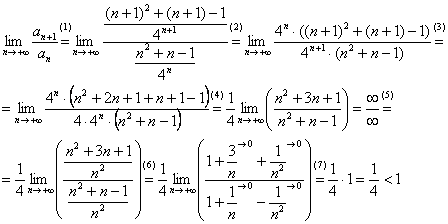


Вывод о сходимости ряда: сравнив полученное значение предела с 1 http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/example_5/e_5_7.gif, устанавливаем, что данный ряд расходится.

**Ответ:** ряд расходится.

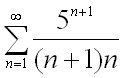
**Пример 6.** Исследовать ряд http://www.mathprofi.ru/g/priznak_dalambera_priznaki_koshi_clip_image040.gif на сходимость

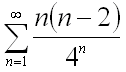
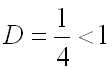
Решение:  
Мы видим, что в общем члене ряда у нас есть http://www.mathprofi.ru/g/priznak_dalambera_priznaki_koshi_clip_image042.gif, а это верная предпосылка того, что нужно использовать признак Даламбера.

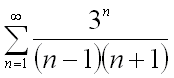


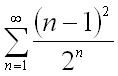
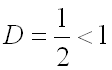
Таким образом, исследуемый ряд **сходится.**

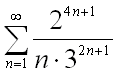
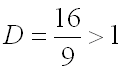
**Задания для самостоятельной работы**

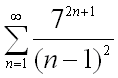
Исследовать сходимость ряда, пользуясь признаком сходимости Даламбера:  
**1.** . **Ответ:** http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/examples_yourselves/e_y_1_2.gif, ряд расходится.

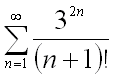
**2.** . **Ответ:** , ряд сходится.

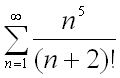
**3.** . **Ответ:** http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/examples_yourselves/e_y_3_2.gif, ряд расходится.

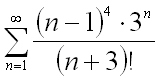
**4.** . **Ответ:** , ряд сходится.

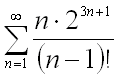
**5.** . **Ответ:** , ряд расходится.

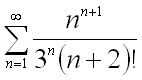
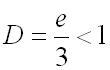
**6.** . **Ответ:** http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/examples_yourselves/e_y_6_2.gif, ряд расходится.

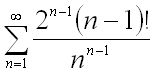
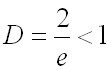
**7.** . **Ответ:** http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/examples_yourselves/e_y_7_2.gif, ряд сходится.

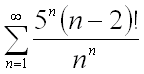
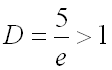
**8.** . **Ответ:** http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/examples_yourselves/e_y_8_2.gif, ряд сходится.

**9.** . **Ответ:** http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/examples_yourselves/e_y_9_2.gif, ряд сходится.

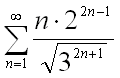
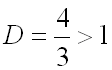
**10.** . **Ответ:** http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/examples_yourselves/e_y_10_2.gif, ряд сходится.

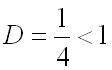
**11.** . **Ответ:** , ряд сходится.

**12.** . **Ответ:** , ряд сходится.

**13.** . **Ответ:** , ряд расходится.

**14.** . **Ответ:** http://pgsksaa07.narod.ru/Images/examples/examples_ryad_Dalamber/examples_yourselves/e_y_14_2.gif, ряд сходится.

**15.** . **Ответ:** , ряд расходится.

**16.** . **Ответ:** , ряд сходится.

***Критерии оценки:***

***На 3 (удовлетворительно) достаточно решить любые 5 примеров.***

***На 4 (хорошо) достаточно решить любые 8 примеров.***

***На 5 (отлично ) достаточно решить любые 10 примеров.***

**ЛИТЕРАТУРА**

Высшая математика для экономистов/ Под ред. Н. Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, 2013.

1. Кудрявцев В. А., Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 2010.
2. Красс М. С., Чупрынов Б. П. Основы математики и ее приложение в экономическом образовании. – М.: Дело, 2012.
3. Математический анализ: Учебно-методическое пособие. – Новосибирск: СибУПК, 2013.
4. Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике: В 2-х ч. М.:Рольф, 2015.
5. Богомолов Н.В. Математика: учеб. для ССУЗов /Н.В. Богомолов. -.М: Дрофа, 2008. – 395 с.
6. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ССУЗов / Н.В.Богомолов. - М.: Дрофа, 2008, 204 с.
7. А.А. Дадаян. Математика.- Москва, Форум-Инфра-М., 2005. Н.В Богомолов. Практические занятия по математике. – Москва, Высшая школа, 1990.

9.Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – Москва: АСТ: Астрель, 2010. – 703 с.  
  
10. Высшая математика / А. И. Астровский, Е. В. Воронкова, О. П. Степанович: учебно-методический комплекс. – Минск: Издательство МИУ, 2009. – 383 с.  
  
11. Высшая математика: учебник / К. В. Балдин, В. Н. Башлыков, А. В. Рукосуев. – Москва: Флинта: МПСИ, 2010. – 359 с. Москва: Эконом, 2009. – 351 с.  
  
12.Высшая математика: курс лекций: для студентов экономических специальностей / Г. М. Булдык. – Минск: ФУАинформ, 2010. – 541 с.  
  
13.Краткий курс высшей математики: учебник / К. В. Балдин [и др.]. – Москва: Дашков и Кº, 2012. – 510 с.  
14. Математика для медицинских колледжей. Изд.3-е – Ростов н/Д:Феникс, 2014 – 442с

**ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСЫ:**

**Математика для ССУЗ. 4-е изд., доп.и перераб**

**www.chtivo.ru/book/1374370/**