ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЕМЕРОВСКОЙ ОБЛАСТИ

Государственное профессиональное образовательное учреждение

«Новокузнецкий строительный техникум»

(ГПОУ НСТ)

## Методические указания по дисциплине ЕН.01 Прикладная математика

Специальность 07.02.01 «Архитектура»

Разработчики: Серозудинова Галина Васильевна, преподаватель

Россия

Новокузнецк 2016

**Аннотация**

Методические указания по проведению практических работ разработаны согласно рабочей программе по учебной дисциплине ЕН.01 Прикладная математика и требованиям к умениям и знаниям Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 07.02.01 «Архитектура».

Методические указания по проведению практических работ предназначены для студентов обучающихся по специальности 07.02.01 «Архитектура»., с целью освоения практических умений и навыков и профессиональных компетенций:

У1 выполнять измерения и связанные с ними расчеты;

У2 решать простейшие планиметрические и стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов);

У3 вычислять площади и объёмы деталей архитектурных и строительных конструкций, объёмы земляных работ;

У4 находить производные элементарных функций;

У5 использовать производную для нахождения наибольших и наименьших значений величин площадей, объёмов тел;

У6 использовать определенный интеграл для нахождения площадей плоских фигур;

У7 решать простейшие комбинаторные задачи с использованием известных формул;

У8 вычислять в простейших случаях вероятности событий на основе подсчета числа исходов;

У9 по заданной выборке строить эмпирический ряд, гистограмму;

У10 вычислять статистические числовые параметры распределения.

З1 Основные формулы для вычисления площадей фигур и объёмов тел, используемых в архитектуре;

З2 Основные понятия о математическом синтезе и анализе, дискретной математики, теории вероятности и математической статистики.

ПК 1.1. Разрабатывать проектную документацию объектов различного назначения.

ПК 1.2. Участвовать в согласовании (увязке) проектных решений с проектными разработками смежных частей проекта.

ПК 1.3. Осуществлять изображения архитектурного замысла, выполняя архитектурные чертежи и макеты.

ПК 2.2. Осуществлять корректировку проектной документации по замечаниям смежных и контролирующих организаций и заказчика.

Практические работы следует проводить по мере прохождения студентами теоретического материала.

Практические работы рекомендуется производить в следующей последовательности:

- вводная беседа, во время которой кратко напоминаются теоретические вопросы по теме работы, разъясняется сущность, цель, методика выполнения работы;

- самостоятельное выполнение необходимых заданий;

- защита практической работы в форме собеседования по результатам проделанной работы.

**Содержание:**

Оглавление

[Практическая работа №1 5](#_Toc474143191)

[Практическая работа №2 15](#_Toc474143197)

[Практическая работа №3 30](#_Toc474143276)

[Вычисление производной. 30](#_Toc474143277)

[Практическая работа №4 40](#_Toc474143278)

[Практическая работа №5 42](#_Toc474143280)

[Практическая работа №6 46](#_Toc474143282)

[Практическая работа №7 54](#_Toc474143284)

[Практическая работа №8 59](#_Toc474143286)

[Практическая работа №9 69](#_Toc474143288)

[Практическая работа №10 77](#_Toc474143290)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Номер пр. работы** | **Количество часов на пр. работу** | **Тема** |
|  | 2 | Практическая работа №1  Вычисление площадей поверхностей и объемов многогранников. |
|  | 2 | Практическая работа №2  Упражнения на вычисления площадей поверхностей и объемов тел вращения. |
|  | 2 | Практическая работа №3  Вычисление производной. |
|  | 2 | Практическая работа №4  Вычисление площадей обьемов тел с помощью дифференциала |
|  | 2 | Практическая работа №5  Вычисление определенных интегралов |
|  | 2 | Практическая работа №6  Вычисление площадей плоских фигур. |
|  | 2 | Практическая работа №7  Элементы комбинаторики |
|  | 2 | Практическая работа №8  Задачи с применением формул комбинаторики |
|  | 2 | Практическая работа №9  Вероятность события |
|  | 2 | Практическая работа №10  Построение функции распределения. Вычисление статистических параметров распределения. |
| **Всего** | 20 |  |

## Практическая работа №1

## Вычисление площадей поверхностей и объемов многогранников.

* 1. Призма:

Цели работы: Сформировать умение находить площадь поверхностей и объем различных видов призм.

Оборудование: модели прямоугольного параллелепипеда, призм, линейки, карандаши, калькулятор.

Литература:

* Атанасян Л.С. и др. Геометрия. 10 (11) кл. – М., 2012.
* Аксенова М.Д. и др. Энциклопедия для детей. Т.11. Математика. – М., 1998.
* Справочный материал

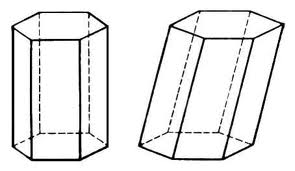
Содержание работы:

Теоретический материал. Атанасян Л.С. и др. Геометрия. 10 (11) кл. – М., 2012.стр.25-27, 63-65, 157-161, 167-168.

Призма — многогранник, две грани которого являются многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях, а остальные грани — параллелограммами, имеющими общие стороны с этими многоугольниками.

Виды призм

* Призма, основанием которой является параллелограмм, называется параллелепипедом.
* Прямая призма - это призма, у которой боковые ребра перпендикулярны плоскости основания. Другие призмы называются наклонными.
* Правильная призма - это прямая призма, основанием которой является правильный многоугольник. Боковые грани правильной призмы - равные прямоугольники.
* Правильная призма, боковые грани которой являются квадратами (высота которой равна стороне основания), является полуправильным многогранником.



прямая призма наклонная призма

Свойства призмы:

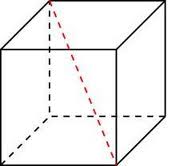
* Основания призмы являются равными многоугольниками.
* Боковые грани призмы являются параллелограммами.
* Боковые ребра призмы параллельны и равны.

Площадь боковой поверхности прямой призмы: Sб.п. = P•H где P — периметр основания призмы (сумма всех сторон основания), H — высота призмы.

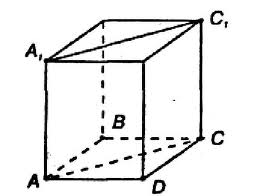
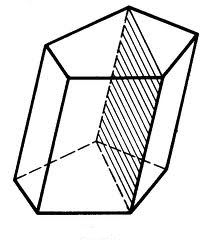
Объём призмы равен произведению её высоты на площадь основания: V = Sосн.•H

Площадь полной поверхности призмы равна сумме площади её боковой поверхности и удвоенной площади основания: Sп.п. = P•H +2• Sосн

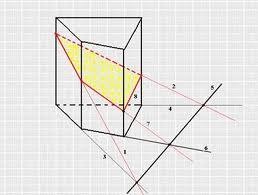
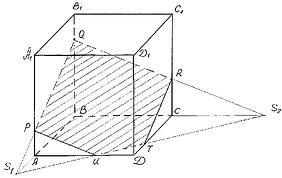
Диагональ прямой призмы:

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его линейных размеров: d2 = a2 +b2 +c2

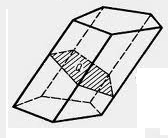
Сечения призмы: диагональные сечения



Сечения призмы под углом к плоскости основания:

Сечение плоскостью перпендикулярной ребрам наклонной призмы:



Практическое задание выполняют в парах: на каждую парту выдается модель призмы (треугольная, четырехугольная, прямоугольный параллелепипед).

Задание к практической работе: по данным вам моделям найти площадь боковой, полной поверхности, объем.

Пример: Найти площадь боковой, полной поверхности, объем призмы.

Ход работы

А) Для нахождения площади боковой поверхности призмы нужно измерить линейкой следующие элементы призмы: стороны основания, высоту. Подставить значения в формулу для нахождения пощади (если призма прямая). Если призма наклонная, то боковую поверхность находим из суммы площадей граней.

Б) Для нахождения площади полной поверхности призмы нужно найти площадь основания призмы (площадь треугольника, прямоугольника, ромба)

Площадь полной поверхности призмы находиться как сумма площадей боковой поверхности и двух оснований.

В) Для нахождения объема нужно знать высоту призмы и площадь основания.

Оформление работы:

|  |  |
| --- | --- |
|  | Дано: АВСС1В1А1 треугольная призма, прямая, правильная  АВ=ВС=АС = 5 см, Н = 10 см  Найти: Sб.п., Sп.п. V  Решение: Sб.п. = P•H  Р=5+5+5=15, Н=10  Sб.п.= 15•10 = 150 (см2)  Фо́рмула Герона позволяет вычислить площадь треугольника (S) по его сторонам a, b, c:  Sосн= √р(р-а)(р-в)(р-с)  где p — полупериметр треугольника: р = (а+в+с):2  р= 15:2 =7,5 |
| Sосн= √7,5(7,5-5)(7,5-5)(7,5-5)= 7,7 (см2)  Sп.п. = P•H +2• Sосн, = 150 + 2•7,7 = 164,4 (см2)  V = Sосн.•H = 7,7•10 =77 (см3) | |

Выполнить задания для самостоятельной работы (тесты, состоящие из трех вопросов и двух задач).

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1

1. Сколько ребер у шестиугольной призмы?

Ответ: а)18, б)6, в)24, г)12, д)15

2. Какое наименьшее число граней может иметь призма?

Ответ: а)3, б)4, в)5, г)6, д)9

3.Выберите верное утверждение.

а) У n-угольной призмы 2 n граней;

б) призма называется правильной, если ее основания - правильные многоугольники;

в) у треугольной призмы нет диагоналей;

г) высота призмы равна ее боковому ребру;

д) площадью боковой поверхности призмы называется сумма площадей всех ее граней.

е) квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений;

4. Найдите длину диагонали прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны 2м, 3м, 5м.

Ответ: а)10м, б) 38м, в)м, г)м, д)4м.

5. Найдите длину ребра куба, если длина его диагонали равна 18см.

Ответ: а)6см, б)6см, в)3см, г)см, д)3см.

Вариант 2

1.Сколько граней у шестиугольной призмы?

Ответ: а)6, б)8, в)10, г)12, д)16

2.Какое наименьшее число ребер может иметь призма?

Ответ: а)9, б)8, в)7, г)6, д)5

3. Выберите верное утверждение.

а) У n – угольной призмы 2 n ребер;

б) площадь полной поверхности призмы называется сумма площадей ее боковых граней;

в) у треугольной призмы две диагонали;

г) высота прямой призмы равна ее боковому ребру;

д) призма называется правильной, если в основании лежит правильный многоугольник.

е) квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме трех его измерений;

4. Найдите длину диагонали прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны 3см, 4см, 5см.

Ответ: а)5 см, б)2см, в)50см, г)12см, д)4см.

5. Найдите длину ребра куба, если длина его диагонали равна 12см.

Ответ: а)2см, б)2см, в)4см, г)4см, д)4см.

* 1. Пирамида:

Цели работы: Научиться вычислять площадь поверхностей и объемы различных видов пирамид.

Оборудование: модели пирамид, таблица с формулами Sб.п., Sп.п., V, линейки, карандаши, калькулятор, карточки вопрос - ответ (из истории пирамид), плакат с изображением египетских пирамид, диск «Энциклопедия», тесты приложение

Литература:

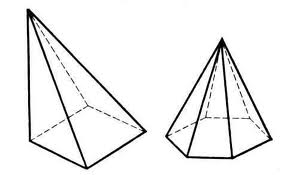
* Атанасян Л.С. и др. Геометрия. 10 (11) кл. – М., 2006.
* Аксенова М.Д. и др. Энциклопедия для детей. Т.11. Математика. – М., 1998.
* Справочный материал

Содержание работы:

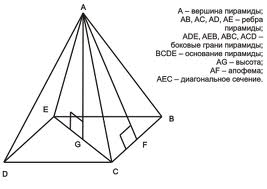
Теоретический материал. Атанасян Л.С. и др. Геометрия. 10 (11) кл. – М., 2006.стр.24-25, 27-29, 69-71, 168-169.

Пирами́да — многогранник, основание которого — многоугольник, а остальные грани — треугольники, имеющие общую вершину. По числу углов основания различают пирамиды треугольные, четырёхугольные и т. д.

наклонная прямая



Элементы пирамиды



апофема — высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины [ℓ];

боковые грани — треугольники, сходящиеся в вершине пирамиды;

боковые ребра — общие стороны боковых граней;

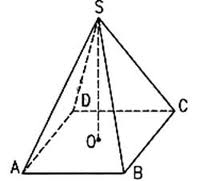
вершина пирамиды — точка, соединяющая боковые рёбра и не лежащая в плоскости основания;

высота — отрезок перпендикуляра, проведённого через вершину пирамиды к плоскости её основания (концами этого отрезка являются вершина пирамиды и основание перпендикуляра) (Н);

диагональное сечение пирамиды — сечение пирамиды, проходящее через вершину и диагональ основания;

основание — многоугольник, которому не принадлежит вершина пирамиды.

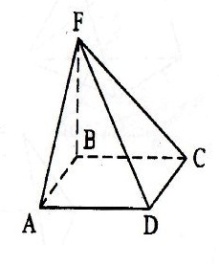
Правильная пирамида



Пирамида называется правильной, если основанием её является правильный многоугольник, а вершина проецируется в центр основания. Тогда она обладает такими свойствами:

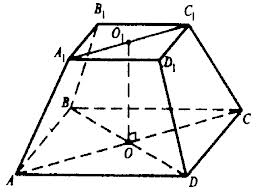
боковые ребра правильной пирамиды равны; в правильной пирамиде все боковые грани — равные равнобедренные треугольники; в любую правильную пирамиду можно как вписать, так и описать около неё сферу;

Прямоугольная пирамида



Пирамида называется прямоугольной, если одно из боковых рёбер пирамиды перпендикулярно основанию. В данном случае, это ребро и является высотой пирамиды.

Усечённая пирамида



Усечённой пирамидой называется многогранник, заключённый между основанием пирамиды и секущей плоскостью, параллельной её основанию.

Боковая поверхность — это сумма площадей боковых граней.

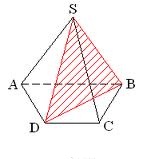
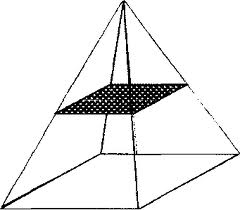
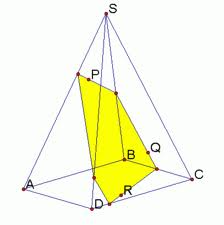
Для нахождения боковой поверхности в правильной пирамиде можно использовать формулу: Sб.п.= 1/2•Р•ℓ

Полная поверхность — это сумма площади боковой поверхности и площади основания.

Для нахождения полной поверхности в правильной пирамиде можно использовать формулу: Sп.п. = 1/2•Р•ℓ+Sосн.

Объем пирамиды (любой) может быть вычислен по формул: V = 1/3•Sосн.•Н

Сечения пирамиды:

диагональное сечение плоскостью параллельной сечение плоскостью проходящей

сечение основанию под углом к основанию

Практическая часть: выполняют практическую работу в парах: на каждую парту выдается модель пирамиды (треугольная, четырехугольная).

Задание к практической работе: по данным вам моделям найти площадь боковой, полной поверхности, объем пирамиды. Выполнить тесты.

Пример: Найти площадь боковой, полной поверхности, объем пирамиды.

Ход работы

А) Для нахождения площади боковой поверхности пирамиды нужно измерить линейкой следующие элементы: апофему, стороны основания, высоту. Подставить значения в формулу для нахождения пощади (если пирамида правильная). Если пирамида наклонная, то боковую поверхность находим из суммы площадей граней.

Б) Для нахождения площади полной поверхности пирамиды нужно найти площадь основания пирамиды (площадь треугольника, прямоугольника, ромба)

В) Площадь полной поверхности пирамиды находиться как сумма площадей боковой поверхности и основания.

Г) Для нахождения объема нужно знать высоту пирамиды и площадь основания.

Оформление работы:

|  |  |
| --- | --- |
|  | Дано: SАВСД – пирамида, АВ=3см, ВС= 6см, пирамида неправильная, Н=10см, ℓ1=10,5см., ℓ2=10,2см  Найти: Sб.п. Sп.п. V  Решение: т.к. пирамида неправильная, то Sб.п. находят как сумму площадей ее боковых граней, т.е. площадей треугольников.  S1 = 1/2 ·ℓ1·АВ=1/2·10,5·3=15,75(см2) - это площадь одной грани, а их две одинаковых, т.е  S1,2 =15,75·2=31,5(см2) |
| S3=1/2·ℓ2·ВС= 1/2·10,2·6=30,6 (см2), S3,4=2·30,6=61,2(см2)  Sб.п.= 31,5+61,2 =92,7(см2)  Sосн.= АВ·ВС=3·6=18(см2), Sп.п.= Sб.п+ Sосн.= 92,7+18=110,7 (см2)  (если пирамида правильная, то пользуемся формулами)  V=1/3· Sосн·Н = 1/3·18·10 = 60(см3) – формула объема справедлива для любой пирамиды.  Выполняют тесты, состоящие из двух вопросов и двух задач. | |

**Задания для самостоятельной работы:**

Вариант 1

1. Сколько ребер у шестиугольной пирамида:

Ответ: а)6; б)12; в)18; г)24; д)8

2. Какое наименьшее число граней может иметь пирамида:

Ответ: а)5; б)12); в)10; г)6; д)4

3.Выберите верное утверждение:

а) Многогранник, составленный из n-треугольников, называется пирамидой;

б) пирамида называется правильной, если ее основание – правильный многоугольник;

в) высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется апофемой;

4. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 4см, а длина диагонали основания - 6см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Ответ: а)96см2; б)156см2; в)36см2; г)60см2; д)150см2

Вариант 2

1. Сколько граней у шестиугольной пирамиды:

Ответ: а)6; б)7; в)8; г)10; д)12

2. Какое наименьшее число ребер может иметь пирамида:

Ответ: а)6; б)5; в)4; г)7; д)8

3.Выберите верное утверждение:

а) Высота пирамиды называется высотой грани;

б) площадь боковой поверхности пирамиды равна произведению периметра основания на высоту;

в) пирамида называется правильной, если ее основание – правильный многоугольник;

4. Высота правильной треугольной пирамиды равна 12см, сторона основания 15см. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

Ответ: а)75см2; б)195см2; в)270см2; г)810см2;

д)120см2.

## Практическая работа №2

## Упражнения на вычисления площадей поверхностей и объемов тел вращения.

Цилиндр

Цели работы: Сформировать умения вычислять площадь поверхностей и объемы различных видов цилиндров.

Оборудование: модели цилиндра, плакат с формулами площадей, объема цилиндра, тесты, калькулятор, линейки, карандаши, тесты

Литература:

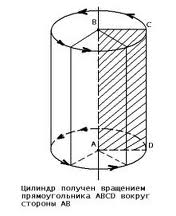
* Атанасян Л.С. и др. Геометрия. 10 (11) кл. – М., 2006.
* Аксенова М.Д. и др. Энциклопедия для детей. Т.11. Математика. – М., 1998.
* Справочный материал

Содержание работы:

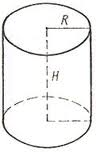
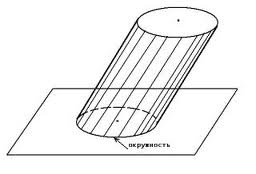
Теоретический материал. Атанасян Л.С. и др. Геометрия. 10 (11) кл. – М., 2006.стр.130-133, 163-164.

Цили́ндр — геометрическое тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями, пересекающими её. Цилиндрическая поверхность — поверхность, получаемая таким поступательным движением прямой (образующей) в пространстве, что выделенная точка образующей движется вдоль плоской кривой (направляющей).

Цилиндр прямой круговой может быть получен путем вращения прямоугольника вдоль стороны как оси.

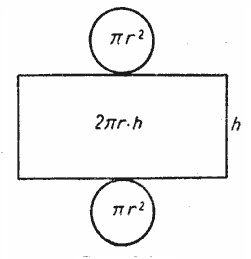


Виды цилиндров:

прямой наклонный

Площадь боковой поверхности прямого цилиндра вычисляется по его развёртке. Развёртка цилиндра представляет собой прямоугольник с высотой h (H) и длиной равной длине окружности основания 2πR.

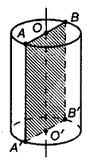
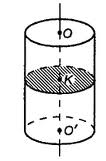
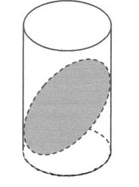


Следовательно, площадь боковой поверхности цилиндра равна площади его развёртки и вычисляется по формуле: Sб.п.= 2πR•Н

Площадь полной поверхности находиться как сумма боковой поверхности и двух площадей основания (круга), вычисляется по формуле: Sп.п.= 2πR•Н+2πR2

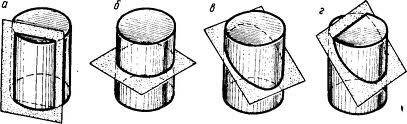
Объем цилиндра вычисляется по формуле: V = πR2H

Сечения цилиндра:

осевое сечение сечение плоскостью сечение плоскостью проходящей

перпендикулярной оси под углом к основанию

различные сечения

Практическая часть: выполняют практическую работу в парах на каждую парту выдается модель цилиндра

Задание: по данным вам моделям найти площадь боковой поверхности, полной поверхности и объем цилиндра.

Ход работы:

а) Для нахождения площади боковой поверхности цилиндра нужно измерить линейкой следующие элементы: диаметр, высоту. Подставить значения в формулу для нахождения площади боковой поверхности цилиндра.

б) Для нахождения площади полной поверхности цилиндра нужно найти площадь основания цилиндра (площадь круга π·R2). Подставить данные в формулу площади полной поверхности или найти как сумму площадей боковой поверхности и двух оснований.

в) Для нахождения объема нужно знать высоту цилиндра и площадь основания.

Пример: Найти площадь боковой, полной поверхности и объем цилиндра.

Оформление работы:

|  |  |
| --- | --- |
|  | Дано: цилиндр, Н=12см, R=3см  Найти: Sб.п. Sп.п. V  Решение: Sб.п.= 2·π·R·Н = 2·π·3·12=72π(см2)  Sп.п.= 2·π·R·Н+2·π·R2 = 72π + 2·π·32 = 72π+18π = 90π (см2)  V = πR2•H = π•32•12 = 108π (см3) |

4.Выполняют тесты, состоящие из одного вопроса и двух задач.

Задания для самостоятельной работы:

I вариант

1. Выберите верное утверждение.
   1. Длина образующей цилиндра называется радиусом цилиндра;

б) Цилиндрическая поверхность называется боковой поверхностью цилиндра;

в) Сечение цилиндра, перпендикулярное оси цилиндра, называется осевой;

с) Площадь боковой поверхности цилиндра вычисляется по формуле ;

д) Цилиндр может быть получен в результате вращения треугольника вокруг одной из сторон.

1. Сколько понадобится краски, чтобы покрасить бак цилиндрической формы с крышкой, имеющий диаметр основания 1,25 м и высоту 1,44 м, если на один квадратный метр расходуется 0,25 кг краски (найдите с точностью до 0,1 кг)?

а) 2,0 кг;

б) 2,1 кг;

в) 2 кг;

с) 1,9 кг;

д) 2,03 кг.

1. Развертка боковой поверхности цилиндра – квадрат со стороной 1. Найдите площадь полной поверхности цилиндра с точностью до 0,001.

II вариант

1. Выберите верное утверждение.

а) Радиус цилиндра не может равняться высоте цилиндра;

б) Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению площади основания цилиндра на его высоту;

с) Сечение цилиндра, параллельное оси цилиндра, называется осевым;

д) Площадь полной поверхности цилиндра вычисляется по формуле ;

е) Цилиндр может быть полечен в результате вращение прямоугольника вокруг одной из его сторон.

1. Сколько понадобится краски, чтобы покрасить бак цилиндрической формы с крышкой, имеющий диаметр основания 1,44 м и высоту 1,25 м, если на один квадратный метр расходуется 0,25 кг краски (найдите с точностью до 0,1 кг)?

а) 2,0 кг;

б) 2,2 кг;

с) 2,3 кг;

д) 2,1 кг;

е) 2,23 кг.

1. Развертка боковой поверхности цилиндра – квадрат со стороной 2. Найдите площадь полной поверхности цилиндра с точностью до 0,001.
   1. Конус:

Цели работы: Сформировать умение вычислять площадь поверхностей и объемы различных видов конусов.

Оборудование: модели конуса, плакат с формулами площадей, объема конуса, линейки, карандаши, калькулятор.

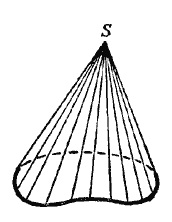
Литература:

* Атанасян Л.С. и др. Геометрия. 10 (11) кл. – М., 2006.
* Аксенова М.Д. и др. Энциклопедия для детей. Т.11. Математика. – М., 1998.
* Справочный материал

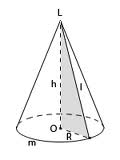
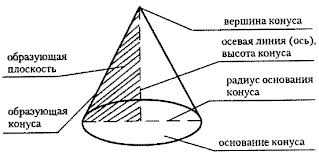
Содержание работы:

Теоретический материал. Атанасян Л.С. и др. Геометрия. 10 (11) кл. – М., 2006.стр.135-138, 170.

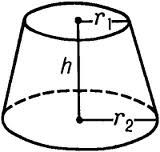
Конусом называется тело, которое состоит из круга - основание конуса, точки, не лежащей в плоскости этого круга - вершины конуса, и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания.



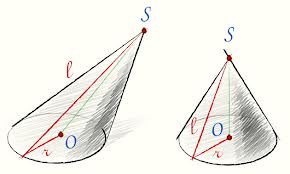
* Отрезок, соединяющий вершину и границу основания, называется образующей конуса (ℓ).
* Объединение образующих конуса называется образующей (или боковой) поверхностью конуса. Образующая поверхность конуса является конической поверхностью.
* Отрезок, опущенный перпендикулярно из вершины на плоскость основания (а также длина такого отрезка), называется высотой конуса (Н).
* Угол раствора конуса — угол между двумя противоположными образующими (угол при вершине конуса, внутри конуса).
* Если основание конуса имеет центр симметрии (например, является кругом или эллипсом) и ортогональная проекция вершины конуса на плоскость основания совпадает с этим центром, то конус называется прямым. При этом прямая, соединяющая вершину и центр основания, называется осью конуса.
* Косой (наклонный) конус — конус, у которого ортогональная проекция вершины на основание не совпадает с его центром симметрии.
* Круговой конус — конус, основание которого является кругом.
* Прямой круговой конус (часто его называют просто конусом) можно получить вращением прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей катет (эта прямая представляет собой ось конуса).

* Конус, опирающийся на эллипс, параболу или гиперболу, называют соответственно эллиптическим, параболическим и гиперболическим конусом (последние два имеют бесконечный объём).
* Часть конуса, лежащая между основанием и плоскостью, параллельной основанию и находящейся между вершиной и основанием, называется усечённым конусом, или коническим слоем.

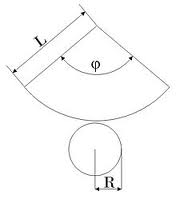
 усеченный конус

Виды конусов:



наклонный прямой

Площадь боковой поверхности прямого конуса вычисляется по его развёртке.

Можно найти как площадь кругового сектора по формуле: 

где, R – радиус круга, а α - градусная мера соответствующего центрального угла.

Боковая поверхность конуса можно вычислить по формуле: Sб.п.= πRℓ, где R — радиус основания, ℓ — длина образующей.

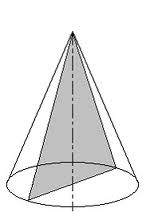
Полная поверхность конуса равна сумме площадей боковой поверхности и площади основания: Sп.п. = πRℓ + πR2 .

Объем кругового конуса: V=1/3πR2•Н

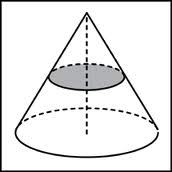
Сечения конуса:

Сечение конуса плоскостью, проходящей через его ось, называют осевым сечением.

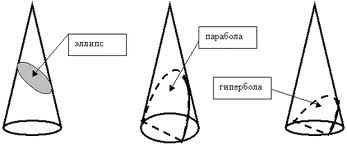
(сечением является равнобедренный треугольник)



Сечение плоскостью перпендикулярной оси конуса:

 (сечением является круг).

Конические сечения как результат пересечения плоскости с конусом. Возможны три основных типа конических сечений: эллипс, парабола, гипербола



Центр тяжести любого конуса лежит на четверти высоты считая от основания.

Практическая часть: выполняют практическую работу в парах на каждую парту выдается модель конуса.

Задание: по данным вам моделям найти площадь боковой поверхности, полной поверхности и объем конуса.

Ход работы:

а) Для нахождения площади боковой поверхности цилиндра нужно измерить линейкой следующие элементы: диаметр, высоту. Подставить значения в формулу для нахождения площади боковой поверхности цилиндра.

б) Для нахождения площади полной поверхности цилиндра нужно найти площадь основания цилиндра (площадь круга π·R2). Подставить данные в формулу площади полной поверхности или найти как сумму площадей боковой поверхности и двух оснований.

в) Для нахождения объема нужно знать высоту цилиндра и площадь основания.

Пример: Найти площадь боковой, полной поверхности и объем конуса

Оформление работы:

|  |  |
| --- | --- |
|  | Дано: конус, Н=10см, R=6см, ℓ= 11,6см  Найти: Sб.п. Sп.п. V  Решение: Sб.п.= πRℓ= π•6•11,6 = 69,6π (см2)  Sп.п.= πRℓ + πR2 = π•6•11,6 + π•62 = 105,6π (см2)  V = 1/3πR2•H =1/3•π•62•10 = 120π (см3) |

Выполняют тесты.

Задания для самостоятельной работы:

I вариант

1. Выберите верное утверждение.

а) Конус может быть получен в результате вращения равностороннего треугольника вокруг его стороны;

б) Прямая, проходящая через вершину конуса и центр его основания, называется осью конуса;

в) Разверткой боковой поверхности усеченного конуса является круговым сегментом;

г) Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна произведению суммы длин окружностей оснований на образующую;

д) Сечение конуса, проходящее через ось, есть круг.

* 1. Образующая конуса, равна 8 см, наклонена к плоскости основания под углом 30о. Найдите площадь осевого сечения конуса.

а)  см2;

б)  см2;

в)  см2;

г)  см2;

д)  см2.

II вариант

1. Выберите неверное утверждение.

а) Конус может быть получен в результате вращения прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов;

б) Прямая, проходящая через вершину конуса и центр его основания, называется осью конуса;

в) Площадь боковой поверхности конуса может быть вычислена по формуле ;

г) Осевым сечением усеченного конуса может является равнобедренная трапеция;

д) Конус называется равносторонним, если его осевое сечение – правильный треугольник.

1. Образующая конуса, равная 4 см, наклонена к плоскости основания под углом 60о. Найдите площадь осевого сечения конуса.

а) см2;

б)  см2;

в)  см2;

г) 4√3 см2

* 1. Шар:

Цели работы:

* закрепление понятий: шар, сфера, площадь сферы, объем шара, сечения.
* содействовать воспитанию интереса к математике и её приложениям, способствовать формированию таких качеств личности как: внимательность, трудолюбие, уверенность в себе, способность к самовыражению;
* способствовать развитию математического мышления и речи, памяти, формировать умения анализировать, сравнивать, оценивать, систематизировать, развивать пространственное воображение.

Оборудование: модели шара (клубки), плакат с формулами площади сферы, объема шара, линейки, карандаши, калькулятор.

Литература:

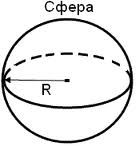
* Атанасян Л.С. и др. Геометрия. 10 (11) кл. – М., 2006.
* Аксенова М.Д. и др. Энциклопедия для детей. Т.11. Математика. – М., 1998.
* Справочный материал

Содержание работы:

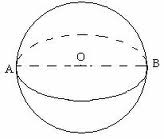
Теоретический материал. Атанасян Л.С. и др. Геометрия. 10 (11) кл. – М., 2006 стр.140-147, 174-177.

Сфе́ра — замкнутая поверхность, геометрическое место точек в пространстве, равноудалённых от данной точки, называемой центром сферы. Сфера также является телом вращения, образованным при вращении полуокружности вокруг своего диаметра. Площадь сферы в градусной мере с учётом непостоянства значения размеров дуг составляет 41252.96 кв. градусов.

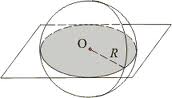
Сфера является поверхностью шара.

Шар - это тело, ограниченное сферической поверхностью. Можно получить шар, вращая полукруг ( или круг ) вокруг диаметра.



Сечения шара

 Наибольший круг лежит в сечении, проходящем через центр шара, и называется большим кругом. Его радиус равен радиусу шара.

Все плоские сечения шара – круги.

Практическая часть: выполняют практическую работу в парах на каждую парту выдается модель шара (клубок ниток).

Задание: по данным вам моделям найти площадь сферы, объем шара.

Ход работы:

а). Для нахождения площади сферы нужно нитью клубка измерить «экватор», т.е длину окружности большого круга. Выразить из формулы длины окружности радиус и подставить в формулу площади сферы.

б). Для нахождения объема шара, нужно в формулу подставить значение радиуса.

в). Выполняют задачи.

Пример:

|  |  |
| --- | --- |
|  | Дано: шар, ℓ= 15см.  Найти: Sсферы , V  Решение: длина окружности вычисляется по формуле:ℓ=2πR,  отсюда найдем R= ℓ/2π = 15/2•3,14= 2,39см  Sсферы = 4π·R2 = 4π•2,392 = 22,85π (см2)  V = 4/3πR3 = 4/3π•2,393 = 18π (см3) |

Выполняют задание.

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1

1. Внешний диаметр полого шара 18см, толщина стенок 3см. Найдите объем материала, из которого изготовлен шар.
2. Из куба выточен наибольший шар. Сколько процентов материала сточено?
3. Какую часть (%) объема шара составляет объем шарового сегмента, у которого высота равна 0,1 диаметра шара?

Вариант 2

1. Диаметр свинцового шара равен 30см. Сколько шариков, диаметром 3см, можно сделать из этого свинца?
2. Площадь поверхности куба равна площади поверхности шара. Найдите отношение объемов куба и шара.
3. Сечение шара плоскостью перпендикулярной его радиусу, делит радиус пополам. Найдите отношение объемов частей шара.

Ответы к практическому заданию зависят от размеров выданных моделей.

Ответы к тестовым заданиям:

«Призма»

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| задание | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Вариант 1 | а | в | б, в, е | г | а |
| Вариант 2 | б | а | г, д, е | а | д |

«Пирамида»

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| задание | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Вариант 1 | б | д | б,в | а |
| Вариант 2 | д | а | в | а |

«Цилиндр»

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| задание | 1 | 2 | 3 |
| Вариант 1 | б | д (1,9 кг) | 1,157 |
| Вариант 2 | е | а (1,6 кг) | 4,497 |

«Конус»

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| задание | 1 | 2 |
| Вариант 1 | б | в |
| Вариант 2 | в | г |

«Шар»

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| задание | 1 | 2 | 3 |
| Вариант 1 | 684π | 52,3% | 2,8% |
| Вариант 2 | 125 | 0,7 | 0,18 или 5,4 |

## Практическая работа №3

## Вычисление производной.

Цель: Сформировать умения находить производные функций, заданных в явном, логарифмическом и параметрическом виде, находить производные сложных функций, геометрический смысл производной, применять правило Лопиталя для нахождения пределов.

Теоретические сведения к практической работе

Производной функции  называется конечный предел отношения приращения функции  к приращению независимой переменной  при стремлении последнего к нулю:

 (1)

Обозначения производной в точке х0:

 и другие.

Если функция в точке х0 (или на промежутке Х) имеет конечную производную, то функция называется дифференцируемой в этой точке (или на промежутке Х).

Процесс отыскания производной называется дифференцированием.



















***N***



###### Геометрический смысл производной.

###### Если кривая задана уравнением , то — угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке ().

Уравнение касательной к кривой  в точке х0 (прямая М0Т) имеет вид:

 (2)

а уравнение нормали (М0N):

 (3)

Правила дифференцирования

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № пп | U = u(x), V=V(x) —  дифференцируемые функции | № пп | U = u(x), V=V(x) —  дифференцируемые функции |
| I |  | VI | Производная сложной функции |
| II |  | VII | Функция задана параметричес-кими уравнениями |
| III |  |
| IV |  | VIII | Если  и  — взаимно обратные функции,  то |
| V |  |

Формулы дифференцирования основных элементарных функций

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № пп | с=const, х — независимая переменная,  u = u(x) — диф­ференцируемая функция | | |
| 1 | С’= 0 | 9 |  |
| 2 | x’= 1 | 10 |  |
| 3 |  | 11 |  |
| 4 |  | 12 |  |
| 5 |  | 13 |  |
| 6 |  | 14 |  |
| 7 |  | 15 |  |
| 8 |  |  |  |

Производной n-го порядка называется производная от производной (n–1)-го порядка. Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

Производная второго порядка  или 

Производная третьего порядка  или  и т. д.

Пример 1. Найти производные функций:

а)  б)  в)  г) 

Решение.

а) Используя правила I, III и формулу (3), получим:



б) Используя правила дифференцирования произведения функций II, разности I, формулы (5), (7), (8) и учитывая, что независимая переменная есть t, т. е. t=1, получим:



в) Сложная степенная функция, независимая переменная есть v,   
т. е. v=1; используя формулу (3), получим:



г) Используя правила дифференцирования частного IV, суммы I, III   
и формулы (3), (14), учитывая, что t=1, получим:



Пример 2. Составить уравнение касательной и нормали к кривой в точке с абсциссой х0=2.

Используем уравнения касательной (2) и нормали (3):

1) 

2) 



Подставим  в уравнения и получим: 

или  — уравнение касательной.

 или — уравнение нормали.

Пример 3. Найти производную , если функция задана парамет-рически: 

Используем правило VII 





Пример 4. Найти дифференциалы функций:

а)  б)  в) 

Для дифференциала функции  справедлива формула  т. е. дифференциал функции равен произведению производной от функции на дифференциал независимой переменной.

Решение.

а) 

б) 

в) 

Пример 5. Найти производную второго порядка функции 

Решение.  поэтому найдём производную первого порядка,   
а затем второго.





Пример 6. Найти производную функции  логарифмическим дифференцированием



Правило Лопиталя. Предел отношения двух б.м.  или б.б.  функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует:

 (5)

Чтобы использовать правило Лопиталя для раскрытия неопределённостей других типов, выражение под знаком предела следует преобразовать элементарными способами так, чтобы получить неопределенность  или  и затем использовать формулу (5).

Пример 7. Найти пределы, используя правило Лопиталя или элементарные способы раскрытия неопределённостей:

а)  б) 

Решение.

а) Подставляя в функцию вместо х предельное значение , определим предел числителя и знаменателя.

 т. к. 

Аналогично: 

Имеем неопределенность вида . Используем правило Лопиталя:



б) 



Содержание практической работы

Задание 1. Найти производные 1-го порядка данных функций

1)  

2) 3)  

4) 

5) 

6)  

Задание 2. Составить уравнение касательной и нормали к кривой y=f(x) в точке с абсциссой х0.

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

6) 

Задание 3. Найти производную  функции y=у(x), заданной параметрически: 

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

6)

Задание 4. Найти дифференциалы функций:

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

6) 

Задание 5. Найти производную второго порядка функции y=f(x).

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

6) 

Задание 6. Найти производную функции логарифмическим дифференцированием

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

6) 

Задание 7. Найти пределы, используя правило Лопиталя.

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

6) 

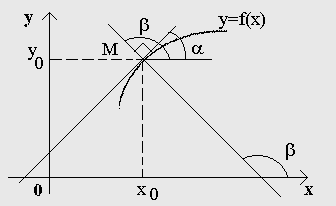
## Практическая работа №4

## Вычисление площадей объемов тел с помощью дифференциала

Цель: Сформировать умение вычисления площадей объемов тел с помощью дифференциала .

Пусть даны два уравнения x=x(t),y=y(t), где t Î [T1, T2]. (1) Каждому значению t из [T1, T2] соответствуют определенные значения x и y. Если рассматривать значения x и y как координаты точки на плоскости xOy, то каждому значению t будет соответствовать определенная точка плоскости. Когда t изменяется от T1 до T2, эта точка на плоскости описывает некоторую кривую.

Уравнения (1) называются параметрическими уравнениями этой кривой, t называется параметром, а способ задания кривой уравнениями (1) называется параметрическим.



Предположим, что функция x=x(t) имеет обратную t=t(x). Тогда, очевидно, у является функцией от x: y=y[t(x)]. Следовательно, уравнения (1) определяют y как функцию от x, и говорят, что функция y от x задается параметрически. При рассмотрении функций, заданных параметрически, исключение параметра не всегда возможно. Во многих случаях удобнее задавать различные значения t и затем вычислять соответствующие значения аргумента x и функции y. Пример. Пусть кривая задана параметрическими уравнениями: Построим эту кривую на плоскости, придавая различные значения параметру t и находя соответствующие значения х и у. При t =0 M(R, 0).

Таким образом, получаем окружность с центром в начале координат, радиуса R. Здесь t обозначает угол, образованный радиусом, проведенным в некоторую точку окружности М(x, y), и осью Ox.

Если исключим из этих уравнений параметр t, то получим уравнение окружности, содержащее только x и y. Возводя в квадрат параметрические уравнения и складывая их, находим: x2+ y2=R2(cos2t + sin2t) или x2+ y2=R2. Выведем правило нахождения производных функций, заданных параметрически.

Пусть x=x(t), y=y(t), причем на некотором отрезке [T1, T2] функции x(t) и y(t) дифференцируемы и x' ≠ 0. Т.к. у – функция, зависящая от переменной x, то будем считать, что функция x=x(t) имеет обратную t=t(x). Будем обозначать: yx' – производная функции по переменной x, yt', xt', tx' – соответственно производные по t и х. Воспользовавшись правилом дифференцирования сложной функции, получим . Производную tx' найдем по правилу дифференцирования обратной функции .

Итак, Полученную функцию можно рассматривать как функцию, заданную параметрически: . Используя эту формулу, можно находить и производные высших порядков функций, заданных параметрически.

Найдем .

По определению второй производной . Учитывая, что yx' есть функция параметра t, yx'=f(t), получаем: Примеры. , y = arcsin (t–1). Найдем .

Следовательно, . Найти угловой коэффициент касательной к циклоиде x = a·(t – sin t), y = a·(1 – cost) в произвольной точке (0 ≤t≤ 2·π). Угловой коэффициент касательной . x' = a·(1 – cost) ,y' = a·sin t. Поэтому . Найти . УРАВНЕНИЯ КАСАТЕЛЬНОЙ И НОРМАЛИ К КРИВОЙ Рассмотрим кривую, уравнение которой есть y=f(x). Возьмем на этой кривой точку M(x0, y0), и составим уравнение касательной к данной кривой в точке M, предполагая, что эта касательная не параллельна оси Oy.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом в общем виде есть у=kx + b. Поскольку для касательной k= f'(x0), то получаем уравнение y= f'(x0)·x + b. Параметр b найдем из условия, что касательная проходит через точку M(x0, y0). Поэтому ее координаты должны удовлетворять уравнению касательной: y0= f'(x0)·x0 + b. Отсюда b=y0– f'(x0)·x0. Таким образом, получаем уравнение касательной y= f'(x0)·x +y0 – f'(x0)·x0 или y = f '(x0)·(x – x0) + f(x0) Если касательная, проходящая через точку М(x0,y0) параллельна оси ординат (т.е. производная в этой точке не существует), то ее уравнение x= x0.

Наряду с касательной к кривой в данной точке часто приходится рассматривать нормаль. Нормалью к кривой в данной точке называется прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно к касательной в данной точке.

Из определения нормали следует, что ее угловой коэффициент kn связан с угловым коэффициентом касательной k равенством: .

Учитывая, что нормаль также как и касательная проходит через точку M(x0, y0), то уравнение нормали к кривой y= f(x) в данной точке M имеет вид: Ясно, что если касательная параллельна оси Ox, т.е.f'(x0) = 0 и ее уравнение имеет вид y= y0, то нормаль в этой же точке будет перпендикулярна оси Ox. Значит, ее уравнение имеет вид x= x0. Примеры.

Составить уравнения касательной и нормали к графику функции у = tg2x в точке с абсциссой x0=π/4. Уравнение касательной имеет вид y =4·(x – π/4) + 1 или y = 4x – π + 1. Уравнение нормали будет y = –1/4·(x – π/4) + 1 или у = –1/4·x + π/16 + 1.

Составить уравнения касательной и нормали к графику функции у = 0.5·(x – 2)2 + 5 в точке M(2; 5). y'= x – 2, y'(2) = 0 .

Следовательно, касательная параллельна оси Ox, а значит ее уравнение y= 5 . Тогда нормаль параллельна оси Oy и имеет уравнение x= 2 . Найти уравнение касательной и нормали к эллипсу в точке M(2; 3). Найдем y' по правилу дифференцирования неявной функции . Уравнение касательной: ,т.е. .

Уравнение нормали: , т.е. . Составить уравнения касательной и нормали к циклоиде x= t – sin t, y= 1 – cos tв точке М(x0; y0), которая соответствует значению параметра t = π/2. При t=π/2x0= π/2 – 1, y0=1. . Уравнение касательной: y = x – π/2 + 1 + 1, т.е. у = x – π/2 + 2. Уравнение нормали: y = – x – π/2 – 1 + 1, т.е. у = – x – π/2

## Практическая работа №5

## Вычисление определенных интегралов

Цель: Научиться вычислять определенные интегралы, используя различные методы интегрирования.

Теоретические сведения к практической работе

Таблица основных интегралов

1.  2. 

3.  

4.  5. 

6.  7.

8.  9. 

10.  11. 

12.  13. 

14.  15. 

16.  17. 

18. 

Определенный интеграл, его вычисление и свойства

Определенный интеграл от функции, непрерывной на отрезке , вычисляется по формуле:

 (5)

где — первообразная для функции , т. е. 

Формула (5) называется формулой Ньютона — Лейбница.

Свойства определенного интеграла:







6) Если  для всех , то 

7) Если  для всех , то 

При вычислении определенного интеграла для нахождения первообразной используют те же методы, что и для нахождения неопределенного интеграла, т. е. замену переменной, интегрирование по частям и т. д. Однако есть ряд особенностей. При замене переменной по формуле (1) необходимо в соответствии с заменой менять пределы интегрирования:

 (6)

где  — обратная к  функция.

Формула интегрирования по частям (3) приобретает вид:

 (7)

Пример 4. Вычислить определенный интеграл 

Решение.



Содержание практической работы

Вычислить определенный интеграл.

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

6) 

## Практическая работа №6

## Вычисление площадей плоских фигур.

Цель: Применять определенный интеграл для вычисления площадей, длин и объемов фигур.

Теоретические сведения к практической работе

Площади плоских фигур

1. Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

Если плоская фигура (рис. 1) ограничена линиями  , где  для всех , и прямыми , , то ее площадь вычисляется по формуле:

 (8)

|  |  |
| --- | --- |
| рис | рис2_ред1 |
| Рис. 1 | Рис. 2 |

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:



Решение. Построим схематический рисунок (рис. 2). Для построения параболы возьмем несколько точек:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 1 | –1 | 2 | –2 | 3 | –3 | 4 | –4 |
| y | –2 | –1 | –1 | 2 | 2 | 7 | 7 | 14 | 14 |

Для построения прямой достаточно двух точек, например  и .

Найдем координаты точек  и  пересечения параболы  и прямой .

Для этого решим систему уравнений



Тогда  Итак, 

Площадь полученной фигуры найдем по формуле (8), в которой

 поскольку  для всех . Получим:



2. Вычисление площадей фигур, ограниченных линиями, заданными параметрически

Если функции  и  имеют непрерывные производные первого порядка для всех , то площадь плоской фигуры, ограниченной линией  прямыми x = a, x = b, где a = x(t0),

b = x(t1), и осью OX, вычисляется по формуле:

 (9)

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически:



Решение. Для построения фигуры составим таблицу значений координат (x, y) точек кривой, соответствующих различным значениям параметра 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| t | 0 |  |  |  |  |
| x | 2 | 0 | –2 | 0 | 2 |
| y | 0 | 3 | 0 | –3 | 0 |

|  |
| --- |
| рис |
| Рис. 3 |

Нанесем точки (x, y) на координатную плоскость XOY и соединим плавной линией. Когда параметр изменяется от  до , соответствующая точка  описывает эллипс (известно, что  — параметрические формулы, задающие эллипс с полуосями a и b). Учитывая симметрию фигуры относительно координатных осей OX и OY, найдем её площадь S, умножив на 4 площадь криволинейной трапеции AOB. Согласно формуле (9) получим:



Длина дуги плоской кривой

1. Вычисление дуги плоской кривой в декартовых координатах

|  |
| --- |
| рис |
| Рис. 4 |

Если кривая задана уравнением , функция  имеет непрерывную первую производную при всех , то длина дуги  (рис. 4) этой кривой, заключенной между точками  и , вычисляется по формуле:

 (10)

2. Вычисление длины дуги кривой, заданной параметрически

Если кривая задана параметрически , и функции  имеют непрерывные производные 1-го порядка при всех , то длина дуги , соответствующей изменению параметра от  до , вычисляется по формуле:

 (11)

Пример. Найти длину дуги кривой

а) б) 

Решение.

а) Так как кривая задана в декартовой системе координат уравнением , то для вычисления длины дуги воспользуемся формулой (10). Найдем :  и подставим в (10):



б) 

Кривая задана параметрически, поэтому воспользуемся формулой (11). Найдем :

и подставим в (11):



Вычисление объемов тел вращения

Если тело образовано вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной кривой , осью OX и прямыми ,  (рис. 5), то его объем вычисляется по формуле:

 (12)

|  |  |
| --- | --- |
| рис | рис |
| Рис. 5 | Рис. 6 |

Пример. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями: 

Решение. Построим криволинейную трапецию, вращением которой получается тело вращения (рис. 6).

Чтобы получить объем тела вращения из объема  тела, полученного вращением фигуры ОАВС, вычтем объем  тела, полученного вращением фигуры ОАВ. Тогда искомый объем . По формуле (12) найдем  и :  (ед. объема);

 (ед. объема);

(ед. объема).

Содержание практической работы

Задание 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

6) 

Задание 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически.

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

6) 

Задание 3. Найти длину дуги кривой.

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

6) 

Задание 4. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями.

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

6) 

## Практическая работа №7

## Элементы комбинаторики

***Цель:***приобретение базовых знаний в области фундаментальных разделов математики*.* Повторить и систематизировать знания по данной теме.

***Задачи:***

• развитие творческого профессионального мышления;

• познавательная мотивация;

• овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;

• овладение умениями и навыками постановки и решения задач;

• углубление теоретической и практической подготовки;

• развитие инициативы и самостоятельности студентов.

**Теоретические сведения:**

Элементы теории множеств

1. Логические символы

Квантор  - заменяет выражение "для любого", "для произвольного", "для какого бы ни было".

Квантор - заменяет выражение "существует", "найдется".

Запись  (импликация) означает, что из справедливости высказывания A вытекает справедливость высказывания B. Если, кроме того, из справедливости высказывания B вытекает справедливость A, то записываем . Если  , то высказывание B является необходимым и достаточным условием для того, чтобы выполнялось высказывание A.

Если предложения A и B справедливы одновременно, то записываем  . Если же справедливо хотя бы одно из предложений A или B, то записываем  .

2. Операции над множествами

Математическое понятие множества элементов принимается в качестве интуитивного. Множество задается правилом или признаком, согласно которому определяем, принадлежит ли данный элемент множеству или не принадлежит.

Множество обозначают символом A = {x}, где x - общее наименование элементов множества A. Часто множество записывают в виде A = {a, b, c, ...}, где в фигурных скобках указаны элементы множества A. Будем пользоваться обозначениями:

N - множество всех натуральных чисел;

Z - множество всех целых чисел;

Q - множество всех рациональных чисел;

R - множество всех действительных чисел;

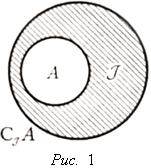
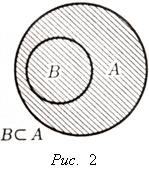
C - множество всех комплексных чисел;

Z0 - множество всех неотрицательных целых чисел.

Запись  означает, что элемент a принадлежит множеству A.

Запись  означает, что элемент a не принадлежит множеству A. Множество B, все элементы которого принадлежат множеству A, называется подмножеством множества A, и при этом записывают 

(см. рис. 1).

Всегда , так как каждый элемент множества, естественно, принадлежит A. Пустое множество, т. е. множество, не содержащее ни одного элемента, обозначим символом  . Любое множество содержит пустое множество в качестве своего подмножества.

Если , то A и B называются равными множествами, при этом записывают A = B.

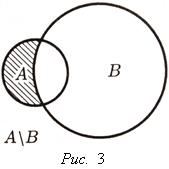
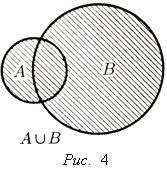
Если  , то множество ℐ элементов множества А , не принадлежащих A, называется дополнением множества A к множеству (см. рис. 2).

Дополнение множества A к множеству ℐ обозначают символом ; или просто CA, если известно, к какому множеству берется  дополнение. Таким образом,СА=

Если А⊂ℐ , то иногда дополнение множества B к множеству A называют разностью множеств A и B и обозначают A\B (см. рис. 3), т. е.   

Пусть A и B - подмножества множества ℐ.

Объединением множеств A и B называется множество А⋂В(см. рис. 4)   

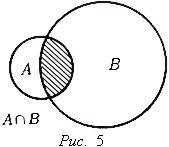
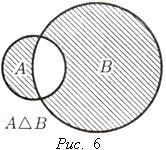
** **

Аналогично, если   подмножества множества ℐ, то их объединением будет множество

Пересечением подмножеств A и B называется множество (см. рис. 5)

Рисунки 1-6 называются диаграммы Эйлера-Венна.

Аналогично, символом   обозначают пересечение подмножеств множества ℐ,т.е.    

Два элемента a и b называются упорядоченной парой, если указано, какой из этих элементов первый, какой второй, при этом

Упорядоченную пару элементов a и b обозначают символом (a, b).

Аналогично определяется упорядоченная система из n элементов a1, a2, ..., an, которую обозначают символом (a1, a2, ..., an). Элементы a1, a2, ..., an называются координатами упорядоченной системы (a1, a2, ..., an).

Совокупность всевозможных упорядоченных пар (a, b), где, называется произведением множеств A и B и обозначается символом .

Аналогично, символом обозначают произведение множеств , т. е. совокупность всевозможных упорядоченных систем (a1, a2, ..., an),

где   .

1. **Свойства операций над множествами**

Пусть A, B и D - произвольные подмножества множестваℐ . Тогда непосредственно из определений объединения, пересечения и дополнения вытекают следующие предложения:

1. Закон идемпотентности для объединения и пересечения множеств:

А⋃А=А, А⋂А=А

1. Закон коммутативности:

А⋃В=В⋃А; А⋂В=В⋂А.

1. Закон ассоциативности:

А⋃(В⋃D)= (А⋃В)⋃D; А⋂(В⋂D)= (А⋂В)⋂D

1. Закон дистрибутивности:

А⋂(В⋃D)=(А⋂В)⋃(А⋂D); А⋃(В⋂D)=(А⋃В)⋂(А⋃D)

1. Закон поглощения:

А⋃(В⋂D)=А, А⋂(А⋃D)=А

1. Закноны, описывающие свойства пустого и универсального множества по отношению к объединению и пересечению:

А⋃∅=А, А⋂∅=∅, А⋃ℐ=ℐ, А⋂ℐ=А

1. Законы дополнения: А⋃=ℐ, А⋂=∅
2. Закон инволютивности дополнения: =А
3. Закон Де Моргана: =, =

Истинность каждого тождества проще всего проверяется построением диаграмм Эйлера-Венна.

1. **Выполните самостоятельно:**

проверку следующих утверждений диаграммой Эйлера-Венна:

|  |  |
| --- | --- |
| Вариант 1 |  |
| Вариант 2 |  |
| Вариант 3 |  |

## Практическая работа №8

## Задачи с применением формул комбинаторики

Цель: Научиться решать задачи на нахождение вероятностей

Теоретические сведения к практической работе

*Классическое определение вероятности*

Раздел математики, изучающий закономерности случайных событий, называется теорией вероятностей.

Вероятностью Р(А) события А в испытании с равновозможными элементарными исходами называют отношение числа исходов m, благоприятствующих событию А, к числуn всех исходов испытания.



*Пример 1*: В партии из 30 миксеров 2 бракованных. Найти вероятность купить исправный миксер.



Аксиомы вероятностей:

Каждому событию А поставлено в соответствие неотрицательное число Р(А), называемое вероятностью события А.

Если события А1, А2 … попарно несовместны, то Р(А1+А2+…)=Р(А1)+Р(А2)+…

Свойства вероятностей:

Вероятность невозможного события равна нулю Р=0.

Вероятность достоверного события равна единице Р=1.

Вероятность произвольного случайного события А заключается между 0 и 1: 0<Р(А)<1.

*Пример 2*: Из 34 экзаменационных билетов, пронумерованных с помощью чисел от 1 до 34, наудачу извлекается один. Какова вероятность, что номер вытянутого билета есть число, кратное трем.

*Решение:* Найдем количество чисел от 1 до 34, кратных трем. Это числа 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33. Всего таких чисел 11. Таким образом, искомая вероятность 

События А и В называются совместными, если они могут одновременно произойти, и несовместными, если при осуществлении одного события не может произойти другое.

События А и В называются независимыми, если вероятность наступления одного события не зависит от того, произошло другое событие или нет.

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей слагаемых без вероятности произведения: Р(А+В)=Р(А)+Р(В)-Р(АВ)

*Пример 3*: Вероятность поражения одной мишени – 0,7, а другой – 0,8. Какова вероятность, что будет поражена хотя бы одна мишень, если по ним стреляют независимо друг от друга.

*Решение*: Т.к. события совместны, то 

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей слагаемых: Р(А+В)=Р(А)+Р(В).

Р(А)+Р()=1



Условная вероятность – вероятность одного события, при условии, что другое событие уже произошло.

Вероятность произведения событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого: Р(АВ)=Р(А)∙Р(А/В) или Р(ВА)=Р(А)∙Р(В/А)

Вероятность произведения двух независимых событий А и В равна произведению вероятностей сомножителей: Р(АВ)=Р(А)∙Р(В).

*Пример 4*: В двух коробках лежат ручки разного цвета. В первой коробке – 4 красных и 6 черных, во второй – 3 красных, 5 синих и 2 черных. Из обеих коробок вынимают по одной ручки. Найти вероятность, что обе ручки красные.

*Решение*: Найдем вероятности вытащить красную ручку из каждой коробки



Тогда вероятность того, что обе ручки красные: 

*Полная вероятность. Формула Байеса*

Если событие А может произойти только при выполнении одного из событий Н1, Н2, …, которые образуют полную группу несовместных событий, то вероятность события А вычисляется по формуле



Эта формула называется формулой полной вероятности.

Если выполняются все условия, имеющие место для формулы полной вероятности, и , то выполняется равенство, называемое формулой Байеса:



*Пример 1*: В первой партии 20 ламп, во второй – 30 ламп и в третьей – 50 ламп. Вероятности того, что проработает заданное время, равна для первой партии 0,7, для второй – 0,8 и для третьей партии – 0,9. Какова вероятность того, что наудачу взятая лампа проработает заданное время? Найти вероятность, что эта лампа принадлежит первой партии?

*Решение*: Пусть событие А – наудачу взятая лампа проработает заданное время.

Тогда, пусть Н1 – лампа из первой партии, Н2 – лампа из второй партии и Н3 – лампа из третьей партии. Тогда событие А/Н1 – лампа из первой партии проработает заданное время, А/Н2 – лампа из второй партии проработает заданное время и А/Н3 – лампа из третьей партии проработает заданное время. Найдем вероятности



Теперь, используя формулу Байеса найдем вероятность того, что эта лампа принадлежит первой партии



*Пример 2*: Имеются 3 одинаковые урны. В первой урне находятся 5 белых и 7 черных шаров, во второй – только белые и в третьей – только черные. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар белый?

*Решение*: Пусть событие А – извлекается белый шар.

Тогда, пусть Н1 – шар из первой урны, Н2 – шар из второй урны и Н3 – шар из третьей урны. Тогда событие А/Н1 – белый шар из первой урны, А/Н2 – белый шар из второй урны и А/Н3 – белый шар из третьей урны. Найдем вероятности



*Формула Бернулли*

1. Вероятность того, что событие А наступит ровно m раз при проведении n независимых испытаний, каждый из которых имеет ровно два исхода вычисляется по формуле Бернулли 

*Пример 1*: Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,2. Найти вероятность, что из 6 приобретенных билетов 2 окажутся выигрышными.

*Решение:*



1. Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, равна 

*Пример 2*: Прибор состоит из шести элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за определенное время равна 0,6. Для безотказной работы прибора необходимо, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность, что за данное время прибор будет работать безотказно?

*Решение*:



1. Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, наступит не менее m1 и не более m2 раз вычисляется по формуле 

*Пример 3*: Найти вероятность осуществления от двух до четырех разговоров по телефону при наблюдении пяти независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,7.

*Решение:*



1. Наивероятнейшее значение m0 числа наступления события А при проведении n повторных независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, вычисляется по формуле 

*Пример 4*: Магазин получил 50 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0,05. Найти наиболее вероятное число нестандартных деталей в партии.

*Решение*:



*Дискретная случайная величина и ее числовые характеристики*

Случайная величина Х – это числовая функция , определенная на пространстве элементарных событий. Случайные величины, имеющие счетные множества возможных значений, называются дискретными. Дискретная случайная величина определена, если известны все ее значения и соответствующие им вероятности. Соотношение между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями называют распределением вероятностей случайной величины. Для дискретной случайной величины это соответствие может быть записано в виде таблицы: 

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | x1 | x2 | … | xn |
| pi | p1 | p2 | … | pn |

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины Х называют сумму произведений всех ее возможных значений на соответствующие им вероятности 

Дисперсией дискретной случайной величины Х называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания . Дисперсия дискретной случайной величины вычисляется по формулам:





Средним квадратичным отклонением дискретной случайной величины называют корень квадратный из дисперсии .

Если случайная величина Х имеет биномиальное распределение вероятностей, то



*Пример 1*: Случайная величина Х задана таблицей распределения вероятностей. Найти М(Х), D(Х), σ(Х).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| хi | 2 | 5 | 8 | 9 |
| рi | 0,1 | 0,4 | 0,3 | 0,2 |

*Решение:*



*Пример 2*: Найти математическое ожидание и дисперсию числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 100 билетов, а вероятность выигрыша на каждый билет равна 0,05.

*Решение*:



Содержание практической работы

Задание 1. Используя классическое определение вероятности события, решить следующие задачи:

1. В коробке 4 красных, 5 зеленых, 8 желтых, 7 белых и 1 черный шар. Найти вероятность вытащить: красный шар; синий шар; белый шар; цветной шар; или зеленый или белый шар; не красный шар; шар одного из цветов светофора.

2. В семье – двое детей. Какова вероятность, что старший ребенок – девочка, если известно, что в семье есть дети обоего пола?

3. Мастер, имея 10 деталей, из которых 4 – нестандартных, проверяет детали одну за другой, пока ему не попадется стандартная. Какова вероятность, что он проверит ровно две детали?

4. В одном ящике 3 белых и 7 черных шаров, в другом ящике – 6 белых и 8 черных шара. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут белый шар, если из каждого ящика вынуто по одному шару.

5. Издательство отправило газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,9, во второе - 0,7, в третье - 0,85. Найти вероятность следующих событий:

а) только одно отделение получит газеты вовремя;

б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

6. В первой урне находятся 12 белых и 4 черных шаров, а во второй 5 белых и 10 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными? Какова вероятность, что оба шара окажутся белыми?

7. В партии из 25 деталей находятся 8 бракованных. Вынимают из партии наудачу две детали. Определить, какова вероятность того, что обе детали окажутся бракованными.

8. Подброшены две игральные кости. Найти вероятность события A того, что выпадет хотя бы одна шестерка.

9. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, большее 4.

10. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, не меньшее 2 и не большее 5.

Задание 2. Используя формулы полной вероятности и Байеса, решить следующие задачи:

1. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне находятся 7 белых и 3 черных шаров, во второй – 6 белых и 4 черных. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Выбранный шар оказался черным. Какова вероятность, что этот шар из 2 урны?

2. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру =0,5, ко второму =0,6. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером =0,94, а вторым =0,92. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

3. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартная равна 0,9, а второго – 0,8. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь – стандартная.

4. Имеются 3 одинаковые урны. В первой урне находятся 6 синих и 4 черных шаров, во второй – только синие и в третьей – только черные. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар синий?

5. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне находятся 7 белых и 3 черных шаров, во второй – 6 белых и 4 черных. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Выбранный шар оказался черным. Какова вероятность, что этот шар из 1 урны?

Задание 3. Используя формулу Бернулли, решить следующие задачи:

1. Вероятность того, что расход электроэнергии на продолжении одних суток не превысит установленной нормы равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

2. Найти вероятность осуществления от одного до трех разговоров по телефону при наблюдении шести независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,6.

3. Прибор состоит из пяти элементов, включенных в цепь параллельно и работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за время Т равна 0,5. Для безаварийной работы прибора достаточно, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность того, что за время Т прибор будет работать безотказно?

4. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету =0,3. Какова вероятность того, что из семи приобретенных билетов три билета окажутся выигрышными?

5. Магазин получил 40 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0,04. Найти наиболее вероятное число нестандартных деталей в этой партии.

6. Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,8. Найдя вероятности возможного числа появления бракованных деталей среди 5 отобранных, найти наивероятнейшее число появления бракованных деталей из 5 отобранных, указав его вероятность.

7. Сколько раз необходимо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее выпадение тройки было равно 10?

8. Для данного участника игры вероятность набросить кольцо на колышек =0,3. Какова вероятность того, что при шести бросках 3 кольца окажутся на колышке?

9. На самолете имеются 4 одинаковых двигателя. Вероятность нормальной работы каждого двигателя в полете равна р. Найти вероятность того, что в полете могут возникнуть неполадки в одном двигателе.

10. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,4. Что вероятнее ожидать: отказ двух приборов при испытании четырех или отказ трех приборов при испытании шести, если приборы испытываются независимо друг от друга?

11. Вероятность того, что на некотором предприятии расход электроэнергии не превысит суточной нормы равна 0,8. Какова вероятность того, что в течение пяти рабочих дней из семи перерасхода электроэнергии не будет?

Задание 4. Найти числовые характеристики дискретных случайных величин:

1. Найти математическое ожидание случайной величины Х, зная закон ее распределения:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| хi | 3 | 5 | 2 |
| рi | 0,1 | 0,6 | 0,3 |

2. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия 0,6. Найти математическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.

3. Найти дисперсию случайной величины Х, которая задана следующим законом распределения:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| хi | 1 | 2 | 5 |
| рi | 0,3 | 0,5 | 0,2 |

4.Найти дисперсию случайной величины Х, которая задана следующим законом распределения:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| хi | 2 | 3 | 5 |
| рi | 0,1 | 0,6 | 0,3 |

5. Производится 10 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события равна 0,6. Найти дисперсию случайной величины Х – числа появления события в этих испытаниях.

## Практическая работа №9

## Вероятность события

***Цель:***приобретение базовых знаний в области фундаментальных разделов математики. Повторить и систематизировать знания по данной теме.

***Задачи:***

• развитие творческого профессионального мышления;

• познавательная мотивация;

• овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;

• овладение умениями и навыками постановки и решения задач;

• углубление теоретической и практической подготовки;

• развитие инициативы и самостоятельности студентов.

**Теоретические сведения:**

**1.** Приведите примеры: 1) достоверных событий; 2) невозможных событий; 3) случайных событий.

**2.** Что вероятнее — появление герба при бросании монеты или появление не­четного числа очков при бросании игральной кости?

**3.** Что вероятнее при бросании двух монет — выпадение двух цифр или цифры и герба?

**4.** Что вероятнее получить при делении домино между 4 игроками — все «дубли» или же все кости с «шестерками»?

**5.** Проведите следующий эксперимент: бросьте 50 раз две игральные кости и запишите сумму для каждого броска. Какая сумма появилась чаще всего? Какая реже всего? Какое число очков появилось чаще: 3 или 12?

**6.** Из мешка с 33 жетонами, на которых написаны русские буквы, вытаскивают один за другим 4 жетона. Сколько раз, по вашему мнению, нужно повторить этот эксперимент, чтобы из этих букв получилось слово «барс»? Во сколько раз будет меньше число необходимых экспериментов, если 4 жетона выта­скивают сразу (т. е. порядок их появления несуществен)?

**7.** Что вероятнее — угадать 6 номеров из 49 или 5 номеров из 36?

**8.** При 10 бросаниях правильной монеты выпадал герб. Что вероятнее при следующем броске — выпадение цифры или герба?

**2. Опыт, испытание.** Основным понятием, с ко­торым мы будем иметь дело в дальнейшем, является понятие опы­та, или испытания. Этому понятию нельзя дать математическое определение, однако ясно, что значат слова «подбросим монету и посмотрим, упала она вверх гербом или цифрой» или «включить электрическую лампочку и поглядеть, через какое время она пере­горит». Для нас будет существенно лишь то, что данное испытание может иметь различные исходы. При этом для простоты будем рас­сматривать лишь случаи, когда множество этих исходов конеч­но и равно n.С каждым опытом можно связать различные множества исходов. Важно лишь то, что при каждом испытании происходит один и только один исход.

Пример 1. При бросании игральной кости возможны сле­дующие исходы:

1) А1, А2, А3, А4, А5, А6 это означает выпадение очков от 1 до 6 включительно;

2) *В1* — выпадение нечетного числа очков, а *В2* — выпадение четного числа очков;

Пример 2. При бросании монеты возможны исходы А1 – выпал герб, А2 – выпала «решка»

Пример 3. Произведен выстрел по мишени: А1 – попадание, А2 – промах.

Введем следующее определение:

*Определение . Событием* при данном испытании назы­вается любое подмножество *X* множества *U* исходов.

В дальнейшем, говоря об исходах, из которых состоит собы­тие *X,* мы будем говорить, что они благоприятствуют этому собы­тию. Про остальные же исходы будем говорить, что они не благо­приятствуют событию *X.*

*Определение 2. Вероятностью события X* называют сум­му вероятностей исходов, благоприятствующих этому событию.

Пример 1. Бросают игральную кость, событие А – выпадение четного числа очков. Ему благоприятствуют случаи А2, А4, А6, т.о. 3 исхода из 6-ти возможных.

Пример 2. Бросают монету, событие В – выпадение герба, ему благоприятствует один исход из двух возможных.

Если испытание может привести к одному и только одному из n различных равновозможных исходов и если m из этих исходов благоприятствуют появлению события А определяется формулой

Р(А)=m/n

Это классическое определение вероятности.

Основные свойства:

1. Вероятность любого события заключена между 0 и единицей: 0≤ Р(А)≤ 1
2. Вероятность достоверного события U, т.е. такое событии обязательно произойдет при испытании: Р(U)=1
3. Вероятность испытание невозможного события V равна нулю: Р(V)=0
4. Сумма вепроятностей двух противоположных событий А и Ā, т.е. таких событий, что появление одного из них исключает появление другого, равна единице:

Р(А)+Р(Ā)=1

**Пример 1.**

Из урны, в которой находится 4 белых, 9 черных, 7 красных шаров. Наудачу вынимают один шар. Какова вероятность, что этот шар белый?

Решение:

Элементарным исходом является извлечение любого шара. Число таких исходов равно числу шаров: 4+9+7=20, т.е. n=20. Событие А – извлечение белого шара, ему благоприятствуют 4 исхода, т.к. белых шаров 4, значит m=4, поэтому по формуле Р(А)=m/n находим: Р(А)=4/20=1/5=20%

**Пример 2**. **Задача о выборке**.

В партии из S деталей имеются Т нестандартных. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу p деталей нестандартными окажутся ровно t деталей.

Решение:

Элементарным исходом является выборка любых p изделий из общего числа S. Число таких исходом равно числу сочетаний из S по p, т.е.n=

Интересующее нас событие А – это извлечение p деталей, из которых t нестандартные. Следовательно, благоприятными для А являются такие группы по p изделий, в которых p-t изделий – качественные, а t – нестандартные.

Число таких групп

m=·, где , причем события из группы стандартных комбинируются из группы нестандартных, тогда

Р(А)=

**2. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ**

***Суммой***нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

***Произведением***нескольких событий называется событие, состоя­щее в совместном осуществлении всех этих событий.

**Теорема сложения вероятностей.**

***Если события Ах, А2, ... , А п несовместны, т. е. никакие два из них не могут осуществиться вместе, то***

***P(А1+* А2+ ...+ *Ап) = Р (A1)* + *Р(А2)* + ... + *Р(Аn)* (1)**

Вероятность события *А,* вычисленная в предположении, что произошло событие *В,* называется *условной вероятностью события А при условии В* {обозначается *Р (А/В).*

**Теорема умножения вероятностей.**

***Вероятность произведения нескольких независимых событий равна произведению вероятности этих событий:***

**Р(А1А2 ... Аn) = = Р (A1)·P (А2) ·Р(А3) ... Р (Аn )(2)**

(события *А1, А2,* ..., *Ап независимы,* т. е. осуществление любого числа из них не меняет вероятностей осуществления ос­тальных).

**Пример 3.** Впартии из 50 изделий содержится пять брако­ванных. Какова вероятность того, что из выбранных нау­дачу 30 изделий не более одного бракованного?

Решение. Пусть *А* — событие, состоящее в том, что 30 изделий выборки — качественные, *В* — в рассматриваемой выборке из 30 изделий только одно брако­ванное, С— не более одного бракованного. Тогда, оче­видно, *С = А* + *В.* Так как события *А* и *В* несовместны, то по формуле (1) имеем

*Р(С) = Р(А) + Р(В).*

Найдем вероятности событий *А* и *В:*

Р(А)= ≈ 0,007 Р(В)= ≈0,065

Отсюда Р(С)≈ 0,072

**Пример 4.** Два станка работают независимо друг от друга. Вероятность бесперебойной работы первого станка в те­чение некоторого времени *t* равна p1= 0,9, второго — *р2=* 0,8. Какова вероятность бесперебойной работы обоих станков в течение указанного промежутка времени?

Решение. Рассмотрим следующие события: *A1* и *А2*— бесперебойная работа соответственно первого и вто­рого станков в течение времени *t; A* — бесперебойная ра­бота обоих станков в течение указанного времени. Тогда событие *А* есть совмещение событий А*1* и А2, т. е. *А* = *А1·A2.* Так как события *At* и А2 независимы (станки работают независимо друг от друга), то по формуле (3) получим

*Р(А)* = *Р(А1)·Р(А2) =* 0,9·0,8 =0,72.

**Пример 5.** В примере 3 определить вероятность беспере­бойной работы хотя бы одного из двух станков в течение времени *t* (событие *В).*

Решение. Первый способ. Рассмотрим про­тивоположное событие *В,* означающее простой обоих стан­ков в течение времени /. Очевидно, что событие *В* есть совмещение событий *A1* и А2 простоев первого и второго станков, т. е. *В* = *Ā1 ·Ā2.* Так как события *Ā1* и Ā2? неза­висимы, то

*Р(В) = Р* (Ā1) *.Р(Ā2)* = ( 1- Р(А1))· ( 1- *Р(А2))* = = 0,1·0,2 = 0,02.

Отсюда

*Р{В) =* 1 — *Р(В)* = 0,98.

Второй способ. Событие *В* происходит в том случае, когда имеет место одно из следующих трех несов­местных событий: либо *A1·Ā2*—совмещение событий *A1* 4 и Ā2 (первый станок работает, второй — не работает), либо *Ā1·А2*— совмещение событий *Ā1* и А2 (первый станок не работает, второй — работает), либо *А1А2*— совмещение событий *А1* и Л2 (оба станка работают), т. е.

*В =* А1 Ā2+Ā1А2+ A1A2*.*

По формуле (1) получим

*Р(В) = Р(А1 Ā2)* + *P(Ā1A2)* + *P(A1A2).*

В силу того, что события *A1* и А2, а следовательно, *Ā1* и Ā2, независимы, имеем

Р(В)=Р(А1)·Р(Ā2)+Р(Ā1).Р(А2) + Р(А1)·Р(А2) = = Р(А1)[1-Р(А2)]+[1-Р(А1)]Р(А2) + Р(А1).Р(А2)=0,98.

**Формула полной вероятности. Формула Байеса**

Если с некоторым опытом связано *п* исключающих друг друга событий (гипотез)Н1 *,* Н2*,* ..., Нnи если событие *А* может осу­ществиться только при одной из этих гипотез, то вероятность со­бытия *А* вычисляется по ***формуле полной вероятности****:*

***Р(А)* = *P(H1)P(A/H1)* + Р(А2)Р(А/Н2) + ... + *Р(Нп)Р(А/Нп).***

После проведения опыта, в результате которого осуще­ствилось событие *А,* вероятности гипотез Нi можно переоценить по ***формуле Байеса****:*

**Р (Нi / А) = Р(Нi) · Р( А / Нi )**

**Р (А)**

**Пример 5**. Имеется три урны с шарами. В первой урне 4 белых и 5 черных, во второй — 5 белых и 4 черных, в третьей — 6 белых шаров. Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что: а) этот шар окажется белым; б) белый шар вынут из второй урны.

Решение, а) Пусть *А* — событие, означающее, что извлечен белый шар. Рассмотрим три гипотезы:

H*1*— выбрана первая урна; Н2— выбрана вторая урна ; Нз— третья .Так как урна, из которой извлекают шар, выбирается нау­гад, то

Р(Н1) = Р(Н2) = Р(Нз) = ⅓

Условные вероятности события *А* соответственно равны:

*P(A/Н1)* = 4/9 (вероятность извлечения белого шара из первой урны),

*Р(А/Н2) =* 5/9 (вероятность извлечения белого шара из второй урны),

*Р(А/Н3)* = 1 (вероятность извлечения белого шара из третьей урны).

а) Отсюда по формуле полной вероятности получим

Р(А)=1/3×4/9 + 1/3×5/9 + 1/3×1 = 2/3

б) Для определения вероятности того, что белый шар извлечен из второй урны, воспользуемся формулой Байеса:

*Р{Н2 /А) = Р(Н2)Р(А/Н2) ‗ 1/3×5/9*

*P(A) 2/3*

**Схема повторных испытаний. Формула Бернулли**

Если при одних и тех же условиях определенный опыт по­вторяется *п* раз и если вероятность появления некоторого события *А* в каждом опыте равна *р,* то вероятность того, что событие *А* в серии из *п* опытов произойдет ровно *k* раз, находится по ***формуле Бернулли****:*

**Рn (k) = С рk q n-k , где q=1- р**

**Выполните самостоятельно:**

|  |  |
| --- | --- |
| Вариант 1  №1.  В группе 20 студентов, среди них 14 юношей. Найти вероятность того, что среди наудачу выбранных 6-ти студентов будут 3 девушки и 3 юноши.  №2.  Имеются 4 коробки с шарами.  1-я: 4 синих и 5 красных;  2-я: 5 синих и 4 красных;  3-я: 7 красных;  4-я: 12 синих.  Наудачу берут шар. Он красный. Найти вероятность того, что он из 2-й коробки.  №3  Двум студентам предложена задача. Вероятность того, что её решит 1-й студент равна 0,72, что решит 2-й – 0,65. Найти вероятность того, что задачу решат оба студента; что решит только один? | Вариант 2  №1  Имеются 23 детали и среди них 19 стандартные. Случайным образом выбирают сразу 6. Какова вероятность, что среди выбранных ровно 5 стандартных?  №2  В цехе продукция производится на 3-х станках:  1-й станок 45% всей продукции, из них брак 5%;  2-й станок 35% всей продукции, из них брак 10%;  3-й станок 20% всей продукции, из них брак 2%.  Найти вероятность, что наудачу взятая деталь из всех произведенных стандартная. Какова вероятность, что она была произведена на 1-м станке?  №3  Два стрелка независимо друг от друга производят выстрел по мишени. Вероятность попадания 1-м -  0,8, 2-м – 0,9. Какова вероятность, что после одного выстрела в мишени будет только одна пробоина? |
| Вариант 3  №1  В урне лежат шары: 7 белых, 4 черных и 9 красных. Наудачу вынимают сразу два шара. Какова вероятность, что они окажутся одного цвета?  №2  В автоколонне 12 машин. Вероятность выхода на линию каждой машины – 0,8. Найти вероятность, что работа автоколонны будет осуществляться без сбоев, если для этого требуется, чтоб не менее 10 машин вышли на линию?  №3  Цех производит продукцию на 2-х станках:  70% изготавливается на 1-м станке, среди них 12% составляют бракованные детали, остальные детали производятся на втором станке, среди них 15% бракованные. Какова вероятность, что наудачу взятая деталь окажется бракованной? Какая вероятность, что бракованная деталь произведена на 2-м станке? | Вариант 4  №1  Три стрелка стреляют независимо друг от друга по цели. Вероятность попадания 1-м -0,8; 2-м – 0,75; 3-м – 0,7. Найти вероятность того, что будет:  1) хотя бы одно попадание;  2) ровно одно попадание;  если произведен один выстрел каждым.  №2  В магазин поступают часы, выпускаемые на 3-х заводах. Первый завод поставляет 40%, второй – 45%, третий – 15%. В продукции первого завод 20% часов спешат, второго завода – 30% часов спешат, третьего – 10% спешат. Найти вероятность того, что купленные часы спешат?  №3  Какова вероятность, что при десяти бросках игральной кости пять очков выпадут ровно 3 раза? |
| Вариант 5  №1  В мастерской работают 6 моторов. Для каждого мотора вероятность перегрева к обеденному перерыву равна 0,8. Найти вероятность того, что к обеденному перерыву перегреются:  1) ровно 4 мотора;  2) перегреются все моторы?  №2  Детали на сборку попадают из трёх автоматов. Известно, что первый автомат дает 3% брака, второй – 2% брака, третий – 4% брака. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если 1-й автомат произвел 1000 деталей, 2-й – 2000 деталей и 3-й – 2500 деталей. Какова вероятность, что бракованная деталь произведена на 2-м автомате?  №3  Из 3000 лотерейных билетов выигрышными являются 12. Какова вероятность, что из наудачу взятых 15 билетов хоть один будет с выигрышем? | Вариант 6  №1  В белом ящике 12 красных и 6 синих шаров, в желтом ящике 15 красных и 10 синих шаров. Наудачу из некоторого ящика выбирают шар. Какая вероятность, что он красный? Какова вероятность, что красный шар вынут из белого ящика?  №2  По самолету противника производят три выстрела. Вероятность попадания при 1-м выстреле-0,5, при 2-м – 0,6, при 3-м – 0.8. Вероятность сбить самолет при условии попадания при 1-м выстреле – 0,3, при 2-м – 0,6 и при 3-м – 0,9. Найти вероятность того, что самолет будет сбит. Какова вероятность, что он будет сбит при 1-м выстреле?  №3  Два студента решают задачу независимо друг от друга. Вероятность того, что решит 1-й – 0,7, что решит 2-й – 0,8. Найти вероятность того, что:  а) решат оба;  б) решит только один? |

## Практическая работа №10

## Построение функции распределения. Вычисление статистических параметров распределения

Цель: Научиться строить функцию распределения и вычислять статистические параметры распределения.

Перед решением задачи убедитесь, что Вы знаете о:

* дискретных случайных величинах;
* формах задания закона распределения дискретной случайной величины;
* математическом ожидании, дисперсии и среднем квадратичном отклонении случайной величины;
* функции распределения случайной величины и вероятности попадания значений случайной величины в заданный интервал;
* биномиальном законе распределения;
* законе распределения Пуассона.

Стрелок производит четыре выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,4. За каждое попадание стрелку насчитывается 5 очков.

а) Построить ряд распределения числа полученных очков (случайная величина Х) по биномиальному закону. Проверить условие нормировки.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины Х. Сделать выводы.

г) Записать функцию распределения случайной величины Х, построить график функции.

д) Найти вероятности того, что стрелок получит:

- менее 10 очков;

- от 5 до 15 очков;

- более 10 очков.

*Решение*.

а) Дискретная случайная величина Х – число полученных очков. Определим ее возможные значения:

х1 = 0, если стрелок ни разу не попал в мишень;

х2 = 5, если стрелок попал в мишень 1 раз;

х3 = 10, если стрелок попал в мишень 2 раза;

х4 = 15, если стрелок попал в мишень 3 раза;

х5 = 20, если стрелок попал в мишень 4 раза.

Чтобы построить ряд распределения, нужно определить вероятности, соответствующие каждому возможному значению случайной величины:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | х1 | х2 | х3 | х4 | х5 |
| pi | р1 | р2 | р3 | р4 | р5 |

Для определения вероятностей используем формулу биномиального закона распределения (формулу Бернулли):

,

где n – количество независимых испытаний (4 выстрела, n = 4);

р – вероятность события (попадания) в каждом из испытаний (р = 0,4);

k – количество произошедших событий (попаданий);

Сnk – число сочетаний из n элементов по k – неупорядоченные наборы по k элементов, взятых из n. Число сочетаний определяется по формуле:



Вероятность появления значения х1 соответствует вероятности того, что стрелок ни разу не попал в мишень (событие ни разу не произошло), вероятность появления значения х2 соответствует вероятности того, что стрелок попал в мишень 1 раз (событие произошло 1 раз) и т.д.:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | х1 | х2 | х3 | х4 | х5 |
| pi | Р4(0) | Р4(1) | Р4(2) | Р4(3) | Р4(4) |

Рассчитаем вероятности:

k=0 Р4(0) = С40 \* р0 \* (1 – р)4-0



Р4(0) = 1 \* 0,40 \* 0,64 = 1 \* 0,1296 = 0,1296

k = 1 Р4(1) = С41 \* р1 \* (1 – р)4-1



Р4(1) = 4 \* 0,41 \* 0,63 = 4 \* 0,4 \* 0,216 = 0,3456

k = 2 Р4(2) = С42 \* р2 \* (1 – р)4-2



Р4(2) = 6 \* 0,42 \* 0,62 = 6 \* 0,16 \* 0,36 = 0,3456

k = 3 Р4(3) = С43 \* р3 \* (1 – р)4-3



Р4(3) = 4 \* 0,43 \* 0,61 = 4 \* 0,064 \* 0,6 = 0,1536

k = 4 Р4(4) = С44 \* р4 \* (1 – р)4-4



Р4(4) = 1 \* 0,44 \* 0,60 = 0,0256 \* 1 = 0,0256

Построим ряд распределения:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 |
| pi | 0,1296 | 0,3456 | 0,3456 | 0,1536 | 0,0256 |

Проверим условие нормировки: 0,1296 + 0,3456 + 0,3456 + 0,1536 + 0,0256 = 1.

б) Многоугольник распределения – диаграмма, которая позволяет наглядно представить закон распределения случайной величины Х:



в) Математическое ожидание дискретной случайной величины определяется по формуле:

,

где xi – возможные значения случайной величины Х;

pi – соответствующие этим значениям вероятности.

Рассчитаем математическое ожидание случайной величины Х:

М(Х) = 0 \* 0,1296 + 5 \* 0,3456 + 10 \* 0,3456 + 15 \* 0,1536 + 20 \* 0,0256 = 8

*Вывод*: среднее число очков, которое может получить стрелок, равно 8.

Дисперсию дискретной случайной величины определим по формуле:



D(X) = 02 \* 0,1296 + 52 \* 0,3456 + 102 \* 0,3456 + 152 \* 0,1536 + 202 \* 0,0256 – 82 = 24

Среднее квадратичное отклонение представляет собой корень из дисперсии:



*Вывод*: число полученных очков может отличаться от математического ожидания (равного 8) в среднем на 4,9.

г) Определим функцию распределения случайной величины Х.

Аналитическая запись функции распределения складывается из отдельных записей для каждого диапазона, на которые разбивается числовая ось возможными значениями случайной величины Х. Число диапазонов равно *n+1*, где *n* – число возможных значений случайной величины.

n=5, значит, число диапазонов равно 6.

Для дискретной случайной величины ,

т.е. чтобы найти значение функции распределения для значения аргумента *х*, нужно сложить все вероятности, соответствующие значениям случайной величины, меньшим, чем *х*.



Построим график функции F(x):



д) Чтобы определить вероятность попадания значений случайной величины в заданный интервал, следует использовать формулу:

P(a ≤ X < b) = F(b) − F(a),

где а – нижняя граница заданного интервала;

b – верхняя граница заданного интервала;

F(b) − функция распределения случайной величины при Х = b;

F(a) – функция распределения случайной величины при Х = a.

Определим вероятность того, что стрелок получит менее 10 очков:

a = 0, b = 10

P(0 ≤ X < 10) = F(10) − F(0)

Значения функции распределения при Х=10 и Х=0 определим из аналитической записи функции F(x) в п. г):

значение Х=0 входит в первый интервал, значит, F(0) = 0,

значение Х=10 входит в третий интервал, значит, F(10) = 0,4752.

P(0 ≤ X < 10) = 0,4752 – 0 = 0,4752.

Таким образом, в 47,52% случаев стрелок получит менее 10 очков.

Определим вероятность того, что стрелок получит от 5 до 15 очков.

Преобразуем заданный интервал таким образом, чтобы он соответствовал формуле для определения вероятности:

Р(5 ≤ Х ≤ 15) = Р(5 ≤ Х < 20)

a = 5, b = 20

P(5 ≤ X < 20) = F(20) − F(5) = 0,9744 – 0,1296 = 0,8448.

Таким образом, в 84,48% случаев стрелок получит от 5 до 15 очков.

Определим вероятность того, что стрелок получит более 10 очков.

Преобразуем заданный интервал таким образом, чтобы он соответствовал формуле для определения вероятности:

Р(10 < Х < ∞) = Р(15 ≤ Х < ∞)

a = 15, b = ∞

P(15 ≤ X < ∞) = F(∞) − F(15) = 1 – 0,8208 = 0,1792.

Таким образом, в 17,92% случаев стрелок получит более 10 очков.

# Задачи по теме «Построение закона распределения дискретной случайной величины»

1. По дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» предусмотрено 16 лекций. Вероятность посещения студентом любой лекции составляет 90%.

а) Построить ряд распределения числа посещенных лекций (случайная величина Х) по биномиальному закону. Проверить условие нормировки.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины Х. Сделать выводы.

г) Записать функцию распределения случайной величины Х, построить график функции.

д) Найти вероятность того, что студент посетит более половины лекций.

2. Бетонные блоки поступают на строительную площадку с интенсивностью 2 блока/час.

а) Построить ряд распределения количества блоков, поступивших за 2 часа, (случайная величина Х) по закону Пуассона. Использовать 10 первых значений случайной величины.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины Х. Сделать выводы.

г) Записать функцию распределения случайной величины Х, построить график функции.

д) Найти вероятность того, что количество блоков, поступивших за 2 часа, составит от 3 до 5 шт.

3. Учебник издан тиражом 100 000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001.

а) Построить ряд распределения количества бракованных книг (случайная величина Х) по закону Пуассона. Использовать 13 первых значений случайной величины.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины Х. Сделать выводы.

г) Записать функцию распределения случайной величины Х, построить график функции.

д) Найти вероятность того, что тираж содержит менее 8 бракованных книг.

4. Фирма по доставке горячих обедов планирует позвонить в 8 крупных организаций с предложением своих услуг. Каждый звонок с вероятностью 20% приводит к заказу.

а) Построить ряд распределения числа заказанных обедов (случайная величина Х) по биномиальному закону. Проверить условие нормировки.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины Х. Сделать выводы.

г) Записать функцию распределения случайной величины Х, построить график функции.

д) Найти вероятность того, что более половины фирм закажут горячие обеды.

В неудачный день на фондовой бирже 80% ценных бумаг падает в цене.

5. Оценивается портфель, содержащий 12 ценных бумаг.

а) Построить ряд распределения количества ценных бумаг, упавших в цене, (случайная величина Х) по биномиальному закону. Проверить условие нормировки.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины Х. Сделать выводы.

г) Записать функцию распределения случайной величины Х, построить график функции.

д) Найти вероятность падения в цене менее половины ценных бумаг.

6. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002.

а) Построить ряд распределения количества изделий, поврежденных в пути, (случайная величина Х) по закону Пуассона. Использовать 8 первых значений случайной величины.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины Х. Сделать выводы.

г) Записать функцию распределения случайной величины Х, построить график функции.

д) Найти вероятность того, что в пути будет повреждено хотя бы одно изделие.

7. На заседании совета директоров должно состояться голосование по важному вопросу. Число директоров – 10 человек, а вероятность того, что каждый из них будет голосовать «за», составляет 0,53.

а) Построить ряд распределения числа положительных голосов (случайная величина Х) по биномиальному закону. Проверить условие нормировки.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины Х. Сделать выводы.

г) Записать функцию распределения случайной величины Х, построить график функции.

д) Найти вероятность того, что решение будет принято, т.е. что большинство директоров выскажутся за него.

8. На автоматическую телефонную станцию (АТС) поступает в среднем 3 вызова в минуту.

а) Построить ряд распределения количества вызовов, поступивших за 2 минуты (случайная величина Х) по закону Пуассона. Использовать 10 первых значений случайной величины.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины Х. Сделать выводы.

г) Записать функцию распределения случайной величины Х, построить график функции.

д) Найти вероятность того, что за 2 минуты на станцию поступит от 3 до 5 вызовов.

9. На ткацком станке нить обрывается в среднем 0,375 раза в течение часа работы станка.

а) Построить ряд распределения количества обрывов нити за 8 часов (случайная величина Х) по закону Пуассона. Использовать 10 первых значений случайной величины.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины Х. Сделать выводы.

г) Записать функцию распределения случайной величины Х, построить график функции.

д) Найти вероятность того, что за 8 часов число обрывов нити будет заключено в границах от 2 до 4.

10. Страховая фирма имеет 6 крупных клиентов. Каждый из них может позвонить завтра с вероятностью 0,25.

а) Построить ряд распределения числа позвонивших клиентов (случайная величина Х) по биномиальному закону. Проверить условие нормировки.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины Х. Сделать выводы.

г) Записать функцию распределения случайной величины Х, построить график функции.

д) Найти вероятность того, что позвонят 4 и более крупных клиентов.

11 Средняя плотность болезнетворных микробов в одном кубическом метре воздуха равна 150. Берется на пробу 5 дм3 воздуха.

а) Построить ряд распределения количества микробов, обнаруженных в пробе воздуха, (случайная величина Х) по закону Пуассона. Использовать 7 первых значений случайной величины.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины Х. Сделать выводы.

г) Записать функцию распределения случайной величины Х, построить график функции.

д) Найти вероятность того, что в пробе воздуха будет обнаружен хотя бы один микроб.

12 Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 мин. равна 0,004.

а) Построить ряд распределения количества веретен, на которых в течение 1 мин. произошел обрыв нити, (случайная величина Х) по закону Пуассона. Использовать 10 первых значений случайной величины.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины Х. Сделать выводы.

г) Записать функцию распределения случайной величины Х, построить график функции.

д) Найти вероятность того, что в течение 1 мин. обрыв произойдет не более, чем на пяти веретенах.

13 Монета подброшена 6 раз.

а) Построить ряд распределения числа выпадений «орла» (случайная величина Х) по биномиальному закону. Проверить условие нормировки.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины Х. Сделать выводы.

г) Записать функцию распределения случайной величины Х, построить график функции.

д) Найти вероятность того, что «орел» выпадет от 2 до 4 раз.

14 Рукопись объемом в 1000 страниц машинописного текста содержит 2000 опечаток.

а) Построить ряд распределения количества опечаток на одной странице (случайная величина Х) по закону Пуассона. Использовать 8 первых значений случайной величины.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины Х. Сделать выводы.

г) Записать функцию распределения случайной величины Х, построить график функции.

д) Найти вероятность того, что наудачу взятая страница содержит не менее двух опечаток.

15 Проведен маркетинговый анализ количества автомобилей в домохозяйствах района для определения целесообразности строительства станции техобслуживания. Обнаружено 9 000 автомобилей. Вероятность поломки автомобиля в день равна 0,0005.

а) Построить ряд распределения количества сломанных за 1 день автомобилей (случайная величина Х) по закону Пуассона. Использовать 10 первых значений случайной величины.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины Х. Сделать выводы.

г) Записать функцию распределения случайной величины Х, построить график функции.

д) Станция будет рентабельна, если ее ежедневная загрузка составит не менее 5 автомобилей. Найти вероятность того, что станция будет рентабельна.

16 Фирма изучает влияние своей рекламы на потенциальных покупателей. Для исследования отобрано 15 человек. Обычно 30% человек помнят рекламные ролики на следующий день после просмотра.

а) Построить ряд распределения числа человек, вспомнивших рекламу, (случайная величина Х) по биномиальному закону. Проверить условие нормировки.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины Х. Сделать выводы.

г) Записать функцию распределения случайной величины Х, построить график функции.

д) Найти вероятность того, что рекламу вспомнят от 10 до 15 человек.

17 Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени Т равна 0,002.

а) Построить ряд распределения количества элементов, отказавших за время Т, (случайная величина Х) по закону Пуассона. Использовать 8 первых значений случайной величины.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины Х. Сделать выводы.

г) Записать функцию распределения случайной величины Х, построить график функции.

д) Найти вероятность того, что за время Т откажут не более 3-х элементов.