**Министерство образования Красноярского края**

**Краевое государственное АВТОНОМНОЕ профессиональное образовательное учреждение**

**«Ачинский техникум нефти и газа»**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ**

**ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ**

учебной дисциплины **ЕН.01 Математика**

для специальностей технического профиля

Разработчик: Константинова Наталья Андреевна, преподаватель

Ачинск 2017

|  |  |
| --- | --- |
| РАССМОТРЕНО  предметно-цикловой комиссией \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  Протокол № \_\_\_  от «\_\_\_\_» \_\_\_\_\_\_ 201\_\_г.  Председатель предметно-цикловой  комиссии \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ИОФ | РЕОМЕНДОВАНО  экспертно-методическим  советом АТНГ  Протокол № \_\_\_от «\_\_\_\_» \_\_\_\_\_\_201\_\_ г.  Председатель совета  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ИОФ |
|  |  |

Методические указания по выполнению практических работ по учебной дисциплине ***ЕН.01 Математика*** разработаны на основе ФГОС специальностей среднего профессионального образования по подготовке специалистов среднего звена технического профиля

Организация-разработчик: краевое государственное автономное профессиональное образовательное учреждение "Ачинский техникум нефти и газа»".

**Содержание**

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Пояснительная записка 2. Перечень практических работ 3. Методические указания по выполнению практических работ 4. Дополнительные источники | 4  5  6  72 |

1. **Пояснительная записка**

Методические указания по выполнению практических работ по учебной дисциплине ЕН.01 Математика способствуют формированию у студентов системы знаний, практических умений, элементов профессиональных и общих компетенций.

Учебная дисциплина ЕН.01 Математика входит в естественнонаучный цикл обязательной части основной профессиональной образовательной программы.

Цели и задачи учебной дисциплины- требования к результатам освоения дисциплины:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Код** | **образовательный результат** | |
| **Уметь:** | | |
| У1 | анализировать сложные функции и строить их графики; | |
| У2 | выполнять действия над комплексными числами; | |
| У3 | вычислять значения геометрических величин; | |
| У4 | производить операции над матрицами и определителями; | |
| У5 | решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики; | |
| У6 | решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений; | |
| У7 | решать системы линейных уравнений различными методами; | |
| **Знать:** | | |
| З1 | основные математические методы решения прикладных задач; | |
| З2 | основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятности и математической статистики; | |
| З3 | основы интегрального и дифференциального исчисления; | |
| З4 | роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности | |
| **Формируемые общие компетенции** | | |
| ОК 1. | | Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес. |
| ОК 3 | | Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность. |
| ОК 4 | | Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития. |
| ОК 5 | | Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности. |
| ОК 8 | | Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации. |
| ОК 9 | | Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности. |

### ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ работ

|  |  |
| --- | --- |
| Практическая работа № 1 Основы линейной алгебры. Матрицы. Определители. |  |
| Практическая работа № 2 Построение обратной матрицы. |  |
| Практическая работа № 3 Методы решения систем линейных уравнений. |  |
| Практическая работа № 4 Скалярное произведение векторов и его свойства. |  |
| Практическая работа № 5 Векторное произведение векторов и его свойства. |  |
| Практическая работа № 6 Смешанное произведение векторов |  |
| Практическая работа № 7 Уравнение прямой на плоскости. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой. Прямая в пространстве и способы ее задания. Определение угла между прямыми. Определение угла между прямой и плоскостью. Расстояние от точки до прямой. |  |
| Практическая работа № 8 Определение видакривой 2-го порядка. |  |
| Практическая работа № 9 Комплексные числа. |  |
| Практическая работа № 10 Вычисление пределов. |  |
| Практическая работа № 11 Дифференцирование простых и сложных функций |  |
| Практическая работа № 12 Приближенные вычисления с помощью дифференциала. |  |
| Практическая работа № 13 Исследование функции средствами дифференциального исчисления и построение графиков. Определение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке. |  |
| Практическая работа № 14 Решение неопределенных интегралов различными методами. |  |
| Практическая работа № 15 Применение определенного интеграла для вычисления площадей плоских фигур. |  |
| Практическая работа № 16 Вычисление определенных интегралов с помощью приближенных формул. |  |
| Практическая работа № 17 Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. |  |
| Практическая работа № 18 Решение задач по теории вероятности. |  |
| Практическая работа № 19 Основы математической статистики |  |
|  |  |

1. **МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ**

**ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ**

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1**

**Тема:** Основы линейной алгебры. Матрицы. Определители.

**Цель:** отработка умений и навыков выполнения действий с матрицами, вычисления определителей.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вид**  **работы** | **Образовательный результат** | **Трудоемкость, ч.** | **Форма контроля** | **Отчетный**  **материал** |
| *Решение*  *задач* | З2, У4, ОК3, ОК4, ОК 5 | 2 | Проверка задания  Ответы на контрольные вопросы проверка отчета | Рабочая тетрадь |

**Обеспечение выполнения работы:**

***Учебное оборудование:***

1. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика».

***Информационные источники:***

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования. – 6-е. изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. – 320 с.
2. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по высшей математике: учеб.пособие для студ. учреждений сред. проф. Образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 160 с.

**Критерии оценки:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Оценка** | **Критерии оценки** |
| отлично | работа выполнена полностью, в решении нет математических ошибок (возможна одна неточ­ность, описка, не являющаяся следствием незнания или непо­нимания учебного материала), получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| хорошо | работа выполнена полностью, допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| удовлетворительно | решено первое задание и пример а) из второго задания, получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| неудовлетворительно | Не решено первое задание и пример а) из второго задания, не получены правильные ответы на контрольные вопросы |

**Инструкция по выполнению работы:**

1. Запишите в тетрадь для практических работ тему и цель занятия.
2. Внимательно ознакомьтесь с Основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.
3. Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
4. После выполнения работы ответьте письменно (в тетради) на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

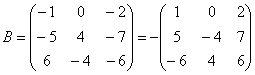
**Основные теоретические сведения и примеры решения заданий**

Матрица – это прямоугольная таблица каких-либо **элементов**. В качестве **элементов** мы будем рассматривать числа, то есть числовые матрицы. **ЭЛЕМЕНТ** – это термин. Термин желательно запомнить, он будет часто встречаться.

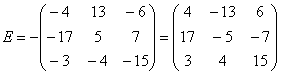
**Обозначение:** матрицы обычно обозначают прописными латинскими буквами *А, В, С,…*

**Действия с матрицами:**

**1) Вынесение минуса из матрицы (внесение минуса в матрицу).**

**Вынесем минус за пределы матрицы, сменив у КАЖДОГО элемента матрицы знак:**

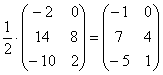
**Внесем минус в матрицу, сменив у КАЖДОГО элемента матрицы знак:**



**2)** **Умножение матрицы на число.**

*Пример:*  
http://www.mathprofi.ru/f/deistviya_s_matricami_clip_image034.gif

*Пример:*

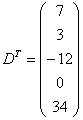


**3) Транспонирование матрицы**

Для того чтобы транспонировать матрицу, нужно ее строки записать в столбцы транспонированной матрицы.

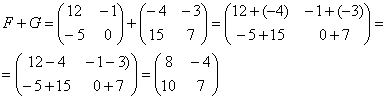
*Пример:*  
Транспонировать матрицу *D* = (7 3 – 12 0 34).

Строка здесь всего одна и, согласно правилу, её нужно записать в столбец:

 – транспонированная матрица.

**4) Сумма (разность) матриц.**

**Для того чтобы сложить матрицы, необходимо сложить их соответствующие элементы:**

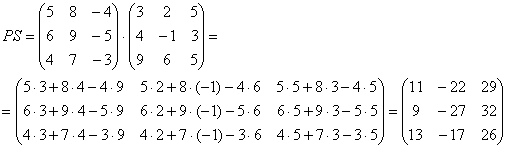


Для разности матриц правило аналогичное, **необходимо найти разность соответствующих элементов**.

**5) Умножение матриц.**

Чтобы матрицу *К*  можно было умножить на матрицу *L* необходимо, **чтобы число столбцов матрицы *К*  равнялось числу строк матрицы *L*.**

*Пример:*



**Внимание! Понятия квадрата матрицы не существует!**

**Если для матрицы А необходимо вычислить , то это означает, что необходимо выполнить действие А\*А.**

**Вычисление определителей**

**Определитель можно вычислить только для квадратной матрицы!**

На практике чаще всего можно встретить определитель второго порядка, например:

**Обозначения:** Если дана матрица , то ее определитель обозначают . Также очень часто определитель обозначают латинской буквой *D*  или греческой Δ.

**Начнем с определителя «два» на «два»:**

http://www.mathprofi.ru/f/kak_vychislit_opredelitel_clip_image018.gif

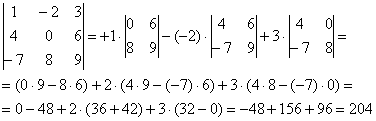
Сразу рассмотрим пример:

http://www.mathprofi.ru/f/kak_vychislit_opredelitel_clip_image020.gif

Самое главное, НЕ ЗАПУТАТЬСЯ В ЗНАКАХ.

**Определитель матрицы «три на три»**

*Пример:*



**Задания для самостоятельной работы**

**Задание 1.** Найти значение матричного многочлена 2АВ + 5В2+3ВА, если:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | | | | |  | 6 |  |
| 2 | | | | |  | 7 |  |
| 3 | | | | |  | 8 |  |
| 4 | | | | |  | 9 |  |
| 5 | | | | |  | 10 |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

**Задание 2.** Вычислить определители:

1. а)  б)  в) 

2. а)  б)  в) 

3. а)  б)  в) 

4. а)  б)  в) 

5. а)  б)  в) 

6. а)  б)  в) 

7. а)  б)  в) 

8. а)  б)  в) 

9. а)  б)  в) 

10. а)  б)  в) 

**Контрольные вопросы**

1. Перечислите свойства определителей.
2. Дайте определение ранга матрицы.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2**

**Тема:** Построение обратной матрицы.

**Цель:** отработка умений и навыков нахождения обратной матрицы.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вид**  **работы** | **Образовательный результат** | **Трудоемкость, ч.** | **Форма контроля** | **Отчетный**  **материал** |
| *Решение*  *задач* | З2, У4, ОК3, ОК4, ОК 5 | 2 | Проверка задания  Ответы на контрольные вопросы проверка отчета | Рабочая тетрадь |

**Обеспечение выполнения работы:**

***Учебное оборудование:***

1. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика».

***Информационные источники:***

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования. – 6-е. изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. – 320 с.
2. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по высшей математике: учеб.пособие для студ. учреждений сред. проф. Образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 160 с.

**Критерии оценки:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Оценка** | **Критерии оценки** |
| отлично | работа выполнена полностью, в решении нет математических ошибок (возможна одна неточ­ность, описка, не являющаяся следствием незнания или непо­нимания учебного материала), получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| хорошо | работа выполнена полностью, допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| удовлетворительно | решено первое и третье задания, получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| неудовлетворительно | не решены первое и третье задания, не получены правильные ответы на контрольные вопросы |

**Инструкция по выполнению работы:**

1. Запишите в тетрадь для практических работ тему и цель занятия.
2. Внимательно ознакомьтесь с Основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.
3. Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
4. После выполнения работы ответьте письменно (в тетради) на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

**Основные теоретические сведения и примеры решения заданий**

Пусть *A* = (*aij*) – квадратная матрица **с определителем, не равным нулю.**

Тогда существует обратная матрица **A**–1, которая вычисляется по формуле

.

Последняя формула означает, что **в** *i***-й строке и** *j***-м столбце** обратной матрицы располагается алгебраическое дополнение элемента, стоящего **в** *j***-й строке и в** *i***-м** столбце исходной матрицы, деленное на определитель исходной матрицы.

Напомним здесь, что *Apq* = (–1)*p*+*qMpq*, где *Mpq* называется минором и представляет собой определитель, получающийся из определителя det**A** вычеркиванием *p*-й строки и *q*-го столбца.

*Пример.* Дана матрица . Найти .

###### Решение

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **Алгоритм** | **Конкретное действие** |
| **1** | Вычислим определитель матрицы *А*. | Det *A* = 20 + 6 – 24 = 2 |
| **2** | Найдем алгебраические дополнения матрицы *А*. |  |
| **3** | Построим обратную матрицу по формуле . |  |

**Задания для самостоятельной работы**

Даны две матрицы *A* и *B*. Найти:

№ 1. *А* – 1;

№ 2. *В* – 1;

№ 3. *АА* – 1;

№ 4. *А* – 1*А*.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | **Матрица А** |  | **Матрица В** |
| 1А |  | 1В |  |
| 2А |  | 2В |  |
| 3А |  | 3В |  |
| 4А |  | 4В |  |
| 5А |  | 5В |  |
| 6А |  | 6В |  |
| 7А |  | 7В |  |
| 8А |  | 8В |  |
| 9А |  | 9В |  |
| 10А |  | 10В |  |

**Контрольные вопросы**

1. Сформулируйте необходимое условие существования обратной матрицы.
2. Существует ли обратная матрица по отношению к матрице размера 4×5?

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3**

**Тема:** Методы решения систем линейных уравнений.

**Цель:** отработка умений и навыков выполнения действий с матрицами, вычисления определителей, решения систем линейных уравнений методом Крамера.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вид**  **работы** | **Образовательный результат** | **Трудоемкость, ч.** | **Форма контроля** | **Отчетный**  **материал** |
| *Решение*  *задач* | З2, У7, ОК3, ОК4, ОК 5 | 2 | Проверка задания  Ответы на контрольные вопросы проверка отчета | Рабочая тетрадь |

**Обеспечение выполнения работы:**

***Учебное оборудование:***

1. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика».

***Информационные источники:***

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования. – 6-е. изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. – 320 с.
2. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по высшей математике: учеб.пособие для студ. учреждений сред. проф. Образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 160 с.

**Критерии оценки:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Оценка** | **Критерии оценки** |
| отлично | работа выполнена полностью, в решении нет математических ошибок (возможна одна неточ­ность, описка, не являющаяся следствием незнания или непо­нимания учебного материала), получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| хорошо | работа выполнена полностью, допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| удовлетворительно | решена система хотя бы одним способом, получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| неудовлетворительно | не решена система ни одним из способов, не получены правильные ответы на контрольные вопросы |

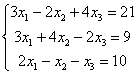
**Инструкция по выполнению работы:**

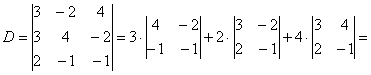
1. Запишите в тетрадь для практических работ тему и цель занятия.
2. Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.
3. Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
4. После выполнения работы ответьте письменно (в тетради) на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

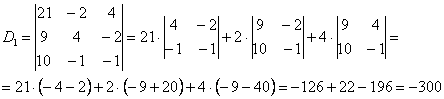
**Основные теоретические сведения и примеры решения заданий**

## **Решение системы по формулам Крамера**

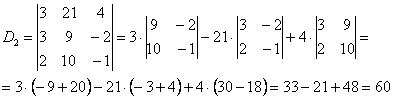
Для того чтобы выполнить данное задание Вы должны уметь раскрывать определители «два на два» и «три на три».

*Пример.* Решить систему по формулам Крамера.    


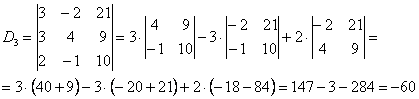
**Решение:** Решим систему по формулам Крамера.  
  
http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image066.gif, значит, система имеет единственное решение.



http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image070.gif



http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image074.gif



http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image078.gif

Ответ: http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image080.gif.

Для того чтобы убедиться в правильности выполнения задания, необходимо найденные значения подставить в исходную систему вместо неизвестных и убедиться в тождественности полученных равенств.

**Задания для самостоятельной работы**

**Задание 1.** Решите систему уравнений методом Крамера:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. |
| 6. | 7. | 8. | 9. | 10. |

**Контрольные вопросы**

1. Чем отличается несовместная система уравнений от неопределенной?
2. Какие системы уравнений называются равносильными?

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 9**

**Тема:** Комплексные числа.

**Цель:** отработка умений и навыков выполнения действий с комплексными числами.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вид**  **работы** | **Образовательный результат** | **Трудоемкость, ч.** | **Форма контроля** | **Отчетный**  **материал** |
| *Решение*  *задач* | З2, У2, ОК3, ОК4, ОК 5 | 2 | Проверка задания  Ответы на контрольные вопросы проверка отчета | Рабочая тетрадь |

**Обеспечение выполнения работы:**

***Учебное оборудование:***

1. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика».

***Информационные источники:***

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования. – 6-е. изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. – 320 с.
2. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по высшей математике: учеб.пособие для студ. учреждений сред. проф. Образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 160 с.

**Критерии оценки:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Оценка** | **Критерии оценки** |
| отлично | работа выполнена полностью, в решении нет математических ошибок (возможна одна неточ­ность, описка, не являющаяся следствием незнания или непо­нимания учебного материала), получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| хорошо | работа выполнена полностью, допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| удовлетворительно | выполнены действия над комплексными числами, получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| неудовлетворительно | не выполнены действия над комплексными числами, не получены правильные ответы на контрольные вопросы |

**Инструкция по выполнению работы:**

1. Запишите в тетрадь для практических работ тему и цель занятия.
2. Внимательно ознакомьтесь с Примерами решения задач.
3. Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
4. После выполнения работы ответьте письменно (в тетради) на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

**Примеры решения задач**

**Задание.** Даны комплексные числа *z*1=1+i и *z*2=.

Вычислить: а) ; б); в); г) ; д) представить число *z*1 в тригонометрической форме; е) вычислить .

**Решение:**

а) z1+z2 =(1+i)+()=(1+)+2i2,7+2i

б) z1-z2 =(1+i)-()=1-)+0i-0,7

в) z1\*z2 =(1+i)\*()=

г)

д) для того, чтобы представить число *z*1=1+i в тригонометрической форме, необходимо найти модуль этого числа **r** и его аргумент  **по формулам:**

, (, т.к. вектор комплексного числа *z*1 лежит в1 четверти).

**Примечание.** Если вектор комплексного числа лежит во 2 четверти, то ; если вектор комплексного числа лежит во 3 четверти, то ; если вектор комплексного числа лежит во 4 четверти, то ,

*z*1=1+i=

Так как тригонометрическая форма комплексного числа записывается формулой

, то для нашего числа получаем:.

е) используем формулы:



Т.к. в нашем случае n=2, то k=0;1;, то получим:

**Задания для самостоятельного решения**

Даны комплексные числа *z*1 и *z*2. Вычислить: а) ; б); в); г) ; д) представить число *z*1 в тригонометрической форме; е).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 |  | 2 |  | 3 |  | 4 |  | 5 |  |
| 6 |  | 7 |  | 8 |  | 9 |  | 10 | z1=  z2= |

**Контрольные вопросы**

1. Какие комплексные числа называют равными; сопряженными?
2. Как изображаются комплексные числа геометрически?
3. Дайте определение модуля и аргумента комплексного числа.
4. Перечислите формы записи комплексного числа.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 10**

**Тема:** Вычисление пределов.

**Цель:** отработка умений и навыков вычисления пределов, раскрытия неопределенностей, применения замечательных пределов.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вид**  **работы** | **Образовательный результат** | **Трудоемкость, ч.** | **Форма контроля** | **Отчетный**  **материал** |
| *Решение*  *задач* | З3, У6, ОК3, ОК4, ОК 5 | 2 | Проверка задания  Ответы на контрольные вопросы проверка отчета | Рабочая тетрадь |

**Обеспечение выполнения работы:**

***Учебное оборудование:***

1. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика».

***Информационные источники:***

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования. – 6-е. изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. – 320 с.
2. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по высшей математике: учеб.пособие для студ. учреждений сред. проф. Образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 160 с.

**Критерии оценки:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Оценка** | **Критерии оценки** |
| отлично | решены все пределы из задания два, в решении нет математических ошибок (возможна одна неточ­ность, описка, не являющаяся следствием незнания или непо­нимания учебного материала), получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| хорошо | решены все пределы из задания два, допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| удовлетворительно | решены все пределы из задания один, получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| неудовлетворительно | не решены все пределы из задания один, не получены правильные ответы на контрольные вопросы |

**Инструкция по выполнению работы:**

1. Запишите в тетрадь для практических работ тему и цель занятия.
2. Внимательно ознакомьтесь с Примерами вычисления пределов.
3. Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
4. После выполнения работы ответьте письменно (в тетради) на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

**Примеры вычисления пределов**

*Пример 1***.**Вычислите предел http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image002_0000.gif.

**Решение:**

Как решить вышерассмотренный пример? Нужно просто подставить единицу в функцию, стоящую под знаком предела:

http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image024.gif

Итак, первое правило**: Когда дан любой предел, сначала просто пытаемся подставить число в функцию.**

*Пример 2.*Вычислите предел http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image051.gif.

**Решение:**

Грубо говоря, согласно нашему первому правилу, мы вместо «икса» подставляем в функцию   бесконечность и получаем ответ.

http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image058.gif.

*Пример 3***.**Вычислите предел http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image100.gif.

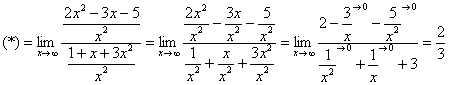
**Решение:**

Сначала мы смотрим на числитель и находим*х*  в старшей степени:  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image105.jpg  
Старшая степень в числителе равна двум.

Теперь смотрим на знаменатель и тоже находим*х* в старшей степени:  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image107.jpg  
Старшая степень знаменателя равна двум.

Затем мы выбираем самую старшую степень числителя и знаменателя: в данном примере они совпадают и равны двойке.

Итак, метод решения следующий: **для того, чтобы раскрыть неопределенность  необходимо разделить числитель и знаменатель на*х* в старшей степени.**

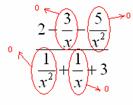
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image109.gif  
Разделим числитель и знаменатель наhttp://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image111.gif  


**Что принципиально важно в оформлении решения?**

Во-первых, указываем неопределенность, если она есть.

Во-вторых, желательно прервать решение для промежуточных объяснений. Я обычно использую знак (\*), он не несет никакого математического смысла, а обозначает, что решение прервано для промежуточного объяснения.

В-третьих, в пределе желательно помечать, что и куда стремится. Когда работа оформляется от руки, удобнее это сделать так:

  
Для пометок лучше использовать простой карандаш.

*Пример 4.*Найти предел http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image121.gif.

Снова в числителе и знаменателе находим http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image008_0005.gif в старшей степени:  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image124.jpg  
Максимальная степень в числителе: 3.

Максимальная степень в знаменателе: 4.

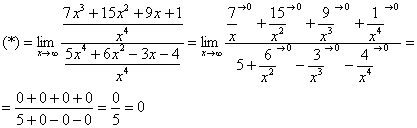
Выбираем **наибольшее** значение, в данном случае четверку.

Согласно нашему алгоритму, для раскрытия неопределенности делим числитель и знаменатель на*х*4.

Полное оформление задания может выглядеть так:

http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image130.gif

Разделим числитель и знаменатель на*х*4.

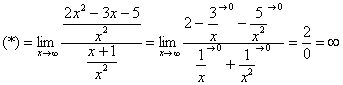


*Пример 5.*Найти предел http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image136.gif  
Максимальная степень «икса» в числителе: 2.  
Максимальная степень «икса» в знаменателе: 1 (*х*можно записать как*х*1).

Для раскрытия неопределенности необходимо разделить числитель и знаменатель на*х*2. Чистовой вариант решения может выглядеть так:

http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image143.gif

Разделим числитель и знаменатель на *х*2.



Под записью  подразумевается не деление на ноль (делить на ноль нельзя), а деление на бесконечно малое число.

Таким образом, при раскрытии неопределенности вида у нас может получиться *конечное число*, ноль или бесконечность.

**Пределы с неопределенностью вида  и метод их решения**

Группа следующих пределов чем-то похожа на только что рассмотренные пределы: в числителе и знаменателе находятся многочлены, но «икс» стремится уже не к бесконечности, а к *конечному числу*.

*Пример 6*.Решить пределhttp://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image152.gif  
Сначала попробуем подставить -1 в дробь:  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image154.gif   
В данном случае получена так называемая неопределенность .

**Общее правило:** если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется неопределенности вида , то для ее раскрытия **нужно разложить числитель и знаменатель на множители**.

Для этого чаще всего нужно решить квадратное уравнение и (или) использовать формулы сокращенного умножения. Итак, решаем наш предел  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image158.gif

Разложим числитель и знаменатель на множители. Для того чтобы разложить числитель на множители, нужно решить квадратное уравнение:

http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image160.gif  
Сначала находим дискриминант:

http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image162.gif  
И квадратный корень из него: http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image164.gif.

В случае если дискриминант большой, например 361,  используем калькулятор, функция извлечения квадратного корня есть на самом простом калькуляторе.

*! Если корень не извлекается нацело (получается дробное число с запятой), очень вероятно, что дискриминант вычислен неверно либо в задании опечатка.*

Далее находим корни:   
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image166.gif  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image168.gif

Таким образом:  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image170.gif

Всё. Числитель на множители разложен.

Знаменатель. Знаменатель http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image172.gif уже является простейшим множителем, и упростить его никак нельзя.

http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image174.gif

Очевидно, что можно сократить на (х+1) :

http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image178.gif

Теперь и подставляем -1 в выражение, которое осталось под знаком предела:

http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image180.gif

Естественно, в контрольной работе, на зачете, экзамене так подробно решение никогда не расписывают. В чистовом варианте оформление должно выглядеть примерно так:

http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image158_0000.gif

Разложим числитель на множители.  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image160_0000.gif  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image162_0000.gif  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image164_0000.gif  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image166_0000.gif  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image168_0000.gif  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image183.gif

http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image185.gif

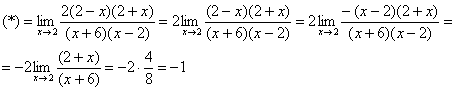
*Пример 7.*Вычислить предел http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image187.gif

Сначала «чистовой» вариант решения

http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image189.gif

Разложим числитель и знаменатель на множители.

Числитель: http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image191.gif  
Знаменатель:  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image193.gif  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image195.gif  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image197.gif  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image199.gif, http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image201.gif  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image203.gif



*Пример 8***.**Найти предел http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image212.gif

Начинаем решать.

Сначала пробуем подставить 3 в выражение под знаком предела. Данное действие обычно проводится мысленно или на черновике.

http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image214.gif

Получена неопределенность вида , которую нужно устранять.  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image217.gif

Когда в числителе (знаменателе) находится разность корней (или корень минус какое-нибудь число), то для раскрытия неопределенности  используют **метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение.**

Вспоминаем нашу нетленную формулу разности квадратов: http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image219.gif

И смотрим на наш предел: http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image221.gif.

Что можно сказать?http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image223.gif у нас в числителе уже есть. Теперь для применения формулы осталось организовать http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image225.gif (которое в и называется **сопряженным выражением**).

**Умножаем числитель на сопряженное выражение:**

http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image227.gif

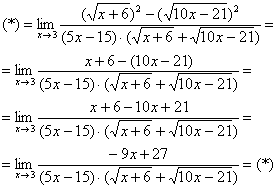
Обратите внимание, что под корнями при этой операции мы ничего не трогаем.

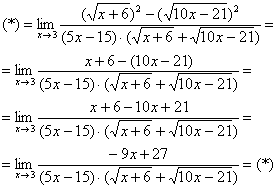
Хорошо, http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image225_0000.gif мы организовали, но выражение-то под знаком предела изменилось! А для того, чтобы оно не менялось, нужно его разделить на то же самое, т.е. наhttp://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image225_0001.gif:

http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image229.gif

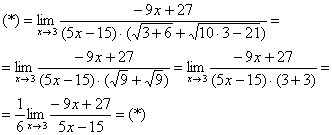
То есть, **мы умножили числитель и знаменатель на сопряженное выражение**.  
В известной степени, это искусственный прием.

Умножили. Теперь самое время применить вверху формулу http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image219_0000.gif:





Неопределенность  не пропала (попробуйте подставить тройку), да и корни тоже не исчезли. Но с **суммой** корней всё значительно проще, ее можно превратить в постоянное число. Как это сделать? Да просто подставить тройку под корни:



Число, как уже отмечалось ранее, лучше вынести за значок предела.

Теперь осталось разложить числитель и знаменатель на множители, собственно, это следовало сделать раньше.

http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image235.gif

*Пример 9***.**Найти предел http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image240.gif

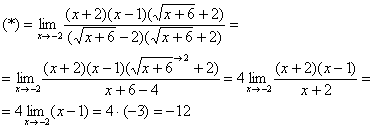
Сначала попробуйте решить его самостоятельно.

Окончательное решение примера может выглядеть так:

http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image242.gif

Разложим числитель на множители:  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image244.gif  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image246.gif  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image248.gif  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image250.gif  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image252.gif  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image254.gif

Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение



**Замечательные пределы**

*Пример 10*.Найти предел http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image042.gif

Если мы замечаем в пределе синус, то это нас сразу должно наталкивать на мысль о возможности применения первого замечательного предела.

Сначала пробуем подставить 0 в выражение под знак предела (делаем это мысленно или на черновике):

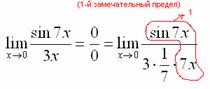
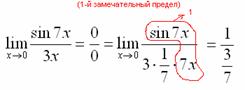
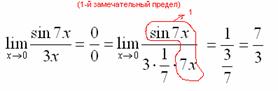
http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image044.gif

Итак, а нас есть неопределенность вида , ее *обязательно указываем* в оформлении решения. Выражение под знаком предела у нас похоже на первый замечательный предел, но это не совсем он, под синусом находится 7*х*, а в знаменателе 3*х*.

В подобных случаях первый замечательный предел нам нужно организовать самостоятельно, используя искусственный прием. Ход рассуждений может быть таким: «под синусом у нас 7*х*, значит, в знаменателе нам тоже нужно получить 7*х*».   
А делается это очень просто:

http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image051.gif

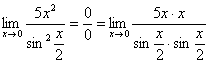
То есть, знаменатель искусственно умножается в данном случае на 7 и делится на ту же семерку. Теперь запись у нас приняла знакомые очертания.  
Когда задание оформляется от руки, то первый замечательный предел желательно пометить простым карандашом:

  
Что произошло? По сути, обведенное выражение у нас превратилось в единицу и исчезло в произведении:  
  
Теперь только осталось избавиться от трехэтажности дроби:  
  
Готово. Окончательный ответ: http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image059.gif

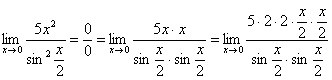
*Пример 11*.Найти предел 

Опять мы видим в пределе дробь и синус. Пробуем подставить в числитель и знаменатель ноль:  

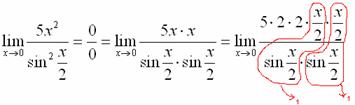

Действительно, у нас неопределенность  и, значит, нужно попытаться организовать первый замечательный предел. Степени мы представим в виде произведения (множителей):



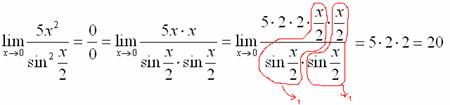
Далее, по уже знакомой схеме организовываем первые замечательные пределы. Под синусами у нас http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image072.gif, значит, в числителе тоже нужно получить http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image072_0000.gif:



Аналогично предыдущему примеру, обводим карандашом замечательные пределы (здесь их два), и указываем, что они стремятся к единице:



Собственно, ответ готов:



*Пример 12.*Найти предел http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image081.gif

Подставляем ноль в выражение под знаком передела:

http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image083.gif

Получена неопределенность http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image004_0003.gif, которую нужно раскрывать. Если в пределе есть тангенс, то почти всегда его превращают в синус и косинус по известной тригонометрической формуле http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image085.gif.

 В данном случае:

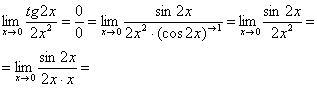
http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image087.gif

Косинус нуля равен единице, и от него легко избавиться (не забываем пометить, что он стремится к единице):

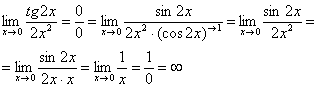
http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image089.gif

Таким образом, если в пределе косинус является МНОЖИТЕЛЕМ, то его, грубо говоря, нужно превратить в единицу, которая исчезает в произведении.

Дальше по накатанной схеме, организуем первый замечательный предел:



Здесь все вышло проще, без всяких домножений и делений. Первый замечательный предел тоже превращается в единицу и исчезает в произведении:



В итоге получена бесконечность, бывает и такое.

*Пример 13.*Найти предел http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image095.gif

Пробуем подставить ноль в числитель и знаменатель:

http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image097.gif

Получена неопределенность http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image004_0004.gif (косинус нуля, как мы помним, равен единице)

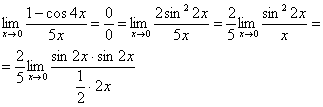
Используем тригонометрическую формулу http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image100.gif. Возьмите на заметку! Пределы с применением этой формулы почему-то встречаются очень часто.

http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image102.gif

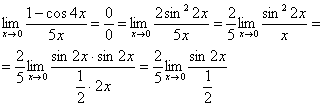
Постоянные множители вынесем за значок предела:

http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image104.gif

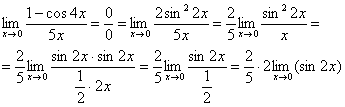
Организуем первый замечательный предел:



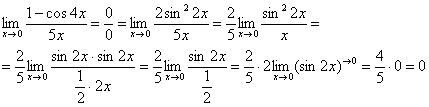
Здесь у нас только один замечательный предел, который превращается в единицу и исчезает в произведении:



Избавимся от трехэтажности:



Предел фактически решен, указываем, что оставшийся синус стремится к нулю:



**Второй замечательный предел**

В теории математического анализа доказано, что:

http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image118.gif

Данный факт носит название **второго замечательного предела**.

*Справка: http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image120.gif – это иррациональное число.*

В качестве параметра http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image012_0000.gif может выступать не только переменная http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image014_0000.gif, но и сложная функция. **Важно лишь, чтобы она стремилась к бесконечности**.

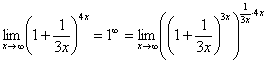
*Пример 15.*Найти предел http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image122.gif

Когда выражение под знаком предела находится в степени – это первый признак того, что нужно попытаться применить второй замечательный предел.

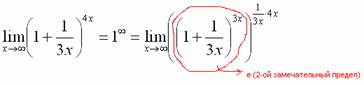
Нетрудно заметить, что при*http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image126.gif* основание степени http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image128.gif, а показатель – *http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image130.gif*, то есть имеется, неопределенность вида http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image132.gif:

http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image134.gif

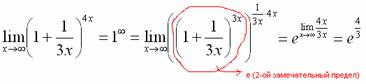
Данная неопределенность как раз и раскрывается с помощью второго замечательного предела. Но, как часто бывает, второй замечательный предел не лежит на блюдечке с голубой каемочкой, и его нужно искусственно организовать. Рассуждать можно следующим образом: в данном примере параметр http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image136.gif, значит, в показателе нам тоже нужно организовать  http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image049_0000.gif. Для этого возводим основание в степень http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image049_0001.gif, и, чтобы выражение не изменилось – возводим в степень http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image140.gif:



Когда задание оформляется от руки, карандашом помечаем:

  
Практически всё готово, страшная степень превратилась в симпатичную букву http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image146.gif:

**При этом сам значок предела перемещаем в показатель.**



Далее, отметки карандашом я не делаю, принцип оформления, думаю, понятен.

*Пример 16***.** Найти предел http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image150.gif

*Внимание! Предел подобного типа встречается очень часто, пожалуйста, очень внимательно изучите данный пример.*

Пробуем подставить бесконечно большое число в выражение, стоящее под знаком предела:

http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image152.gif

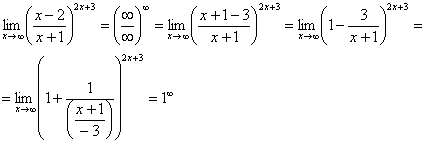
В результате получена неопределенность http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image154.gif. Но второй замечательный предел применим к неопределенности вида http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image132_0000.gif. Что делать? Нужно преобразовать основание степени. Рассуждаем так: в знаменателе у нас http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image157.gif, значит, в числителе тоже нужно организовать http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image157_0000.gif:

http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image160.gif

Теперь можно почленно разделить числитель на знаменатель:

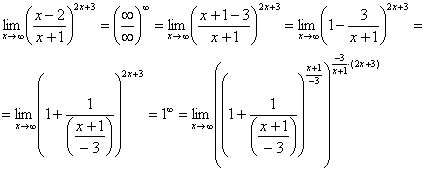
http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image162.gif

Вроде бы основание стало напоминать http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image164.gif, но у нас знак «минус» да и тройка какая-то вместо единицы. Поможет следующее ухищрение, делаем дробь трехэтажной:

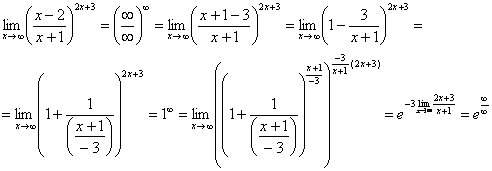


Таким образом, основание приняло вид http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image164_0000.gif, и, более того, появилась нужная нам неопределенность http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image132_0001.gif. Организуем второй замечательный предел http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image169.gif.

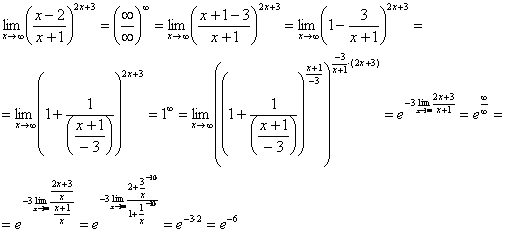
Легко заметить, что в данном примере http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image171.gif. Снова исполняем наш искусственный прием: возводим основание степени в http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image173.gif, и, чтобы выражение не изменилось – возводим в обратную дробь http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image175.gif:



Наконец-то долгожданное http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image179.gif устроено, с чистой совестью превращаем его в букву http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image146_0000.gif:



Но на этом мучения не закончены, в показателе у нас появилась неопределенность вида http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image183.gif, раскрывать такую неопределенность мы научились. Делим числитель и знаменатель наhttp://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image014_0001.gif:



А сейчас мы рассмотрим модификацию второго замечательного предела. Напомню, что второй замечательный предел выглядит следующим образом: http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image118_0000.gif. Однако на практике время от времени можно встретить его «перевёртыш», который в общем виде записывается так:

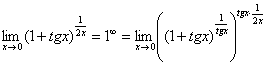
http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image189.gif

*Пример 17.*Найти предел http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image191.gif

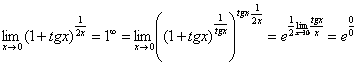
Сначала (мысленно или на черновике) пробуем подставить ноль (бесконечно малое число) в выражение, стоящее под знаком предела:

http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image193.gif

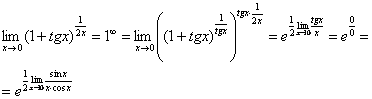
В результате получена знакомая неопределенность http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image132_0002.gif. Очевидно, что в данном примере http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image196.gif. С помощью знакомого искусственного приема организуем в показателе степени конструкцию http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image198.gif:



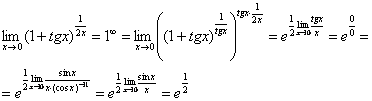
Выражение http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image202.gif со спокойной душой превращаем в букву http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image146_0001.gif:



Еще не всё, в показателе у нас появилась неопределенность вида http://www.mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image207.gif. Раскладываем тангенс на синус и косинус (ничего не напоминает?):



Косинус нуля стремится к единице (не забываем помечать карандашом), поэтому он просто пропадает в произведении:



**Задания для самостоятельного решения**

**Задание 1.**Вычислите пределы:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***№*** | ***а*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** | ***e*** |
| **1** | где |  |  |  |  |
| **2** | где |  |  |  |  |
| **3** | где |  |  |  |  |
| **4** | где |  |  |  |  |
| **5** | где |  |  |  |  |
| **6** | где |  |  |  |  |
| **7** | где |  |  |  |  |
| **8** | где |  |  |  |  |
| **9** | где |  |  |  |  |
| **10** | ,  где |  |  |  |  |

**Задания по вариантам**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** | **параметры** | | | **№** | **параметры** | | | **№** | **параметры** | | | **№** | **параметры** | | | **№** | **параметры** | | |
| ***abc*** | | | ***abc*** | | | ***abc*** | | | ***abc*** | | | ***a b c*** | | |
| **1** | 1 | -15 | 1 | **7** | 4 | -12 | 7 | **13** | 7 | -9 | 13 | **19** | -10 | 6 | 4 | **25** | -3 | 6 | 10 |
| **2** | -1 | 15 | 2 | **8** | -4 | 12 | 8 | **14** | -7 | 9 | 14 | **20** | 10 | -6 | 5 | **26** | 3 | -6 | 11 |
| **3** | 2 | -14 | 3 | **9** | 5 | -11 | 9 | **15** | 8 | -8 | 15 | **21** | -1 | 5 | 6 | **27** | -4 | 7 | 12 |
| **4** | -2 | 14 | 4 | **10** | -5 | 11 | 10 | **16** | -8 | 8 | 1 | **22** | 1 | -5 | 7 | **28** | 4 | -7 | 13 |
| **5** | 3 | -13 | 5 | **11** | 6 | -10 | 11 | **17** | 9 | -7 | 2 | **23** | -2 | 4 | 8 | **29** | -5 | 9 | 14 |
| **6** | -3 | 13 | 6 | **12** | -6 | 10 | 12 | **18** | -9 | 7 | 3 | **24** | 2 | -4 | 9 | **30** | 5 | -9 | 15 |

**2. Вычислите пределы, подставив вместо букв заданные в таблице параметры:**

|  |  |
| --- | --- |
| 1. | 2. |
| 3. | 4. |
| 5. | 6. |
| 7. | 8. |
| 9. | 10. |
| 11. | 12. |
| 13. | 14. |
| 15. | 16. |
| 17. | 18. |
| 19. Исследовать функцию  на непрерывность в точке | 20.Найти вертикальные асимптоты функции |
| 21.Найти горизонтальную асимптоту функции | 22. Найти наклонную асимптоту |

**Контрольные вопросы**

1. Дайте определение предела функции в точке.
2. Сформулируйте теоремы о пределах.
3. Что такое неопределенность?
4. Какие способы раскрытия неопределенностей вы знаете?

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 11**

**Тема:** Дифференцирование простых и сложных функций

**Цель:** отработка умений и навыков дифференцирования простых и сложных функций.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вид**  **работы** | **Образовательный результат** | **Трудоемкость, ч.** | **Форма контроля** | **Отчетный**  **материал** |
| *Решение*  *задач* | З2, З3, У6, ОК3, ОК4, ОК 5 | 2 | Проверка задания  Ответы на контрольные вопросы проверка отчета | Рабочая тетрадь |

**Обеспечение выполнения работы:**

***Учебное оборудование:***

1. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика».

***Информационные источники:***

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования. – 6-е. изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. – 320 с.
2. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по высшей математике: учеб.пособие для студ. учреждений сред. проф. Образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 160 с.

**Критерии оценки:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Оценка** | **Критерии оценки** |
| отлично | работа выполнена полностью, в решении нет математических ошибок (возможна одна неточ­ность, описка, не являющаяся следствием незнания или непо­нимания учебного материала), получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| хорошо | работа выполнена полностью, допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| удовлетворительно | правильно выполнено первое задание |
| неудовлетворительно | не выполнено первое задание |

**Инструкция по выполнению работы:**

1. Запишите в тетрадь для практических работ тему и цель занятия.
2. Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями и примерами дифференцирования функций.
3. Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
4. После выполнения работы ответьте письменно (в тетради) на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

**Основные теоретические сведения**

*Определение*. **Производной** функции *f(x)* в точке *х* = *х*0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.



**Основные правила дифференцирования**

Обозначим *f(x) = u, g(x) = v* – функции, дифференцируемые в точке *х*.

1) ; 2) ; 3) ;

4) ; 5) 

6)  7) .

**Производные основных элементарных функций**

1)С′ = 0; 9) 

2)(xm)′ = mxm-1; 10) 

3)  11) 

4)  12) 

5)  13) 

6)  14) 

7) 15) 

8)  16) 

**Производная сложной функции**

**Теорема.** *Пусть y = f(x); u = g(x), причем область значений функции u входит в область определения функции f.*

*Тогда *

Если , т.е. - сложная функция, то .

На основании определения производной и правил дифференцирования составлена таблица производных сложных функций.

|  |  |
| --- | --- |
| **1 ,** | **8 ,** |
| **2 ,** | **9 ,** |
| **3 ,** | **10 ,** |
| **4 ,** | **11 ,** |
| **5 ,** | **12 ,** |
| **6 ,** | **13 .** |
| **7 ,** |  |

**Примеры дифференцирования функций**

*Пример 1.* Найти производную функции: .



Ответ: 

*Пример 2.*Найти производную функции .

**Решение:**

Используем формулу

*Пример 3.*Найти производную функции .

**Решение:**

Используем формулу

*Пример 4*. Найти производную функции http://www.math24.ru/images/5der4.gif.

**Решение:**

Поскольку http://www.math24.ru/images/5der5.gif, то по правилу производной сложной функции получаем

http://www.math24.ru/images/5der6.gif

*Пример 5.* Найти производную функции .

**Решение:**

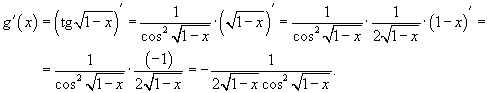
Используем формулу

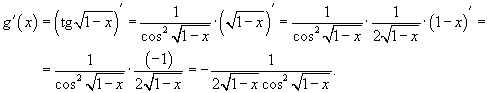
*Пример 6.* Найти производную функции http://www.math24.ru/images/5der7.gif.

**Решение:**

Здесь мы имеем дело с композицией трех функций. Производная тангенса равна http://www.math24.ru/images/5der8.gif.

Тогда





**Задание для практической работы № 1**

Вариант 1.

1. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные функций:

а) ; б) ; в) .

##### Вариант 2.

1. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные функций:

а) ; б) ; в) .

Вариант 3.

1. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные функций:

а) ; б) ; в) .

Вариант 4.

1. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные функций:

а) ; б) ; в) .

Вариант 5.

1. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные функций:

а) ; б) ; в) .

Вариант 6.

1. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные функций:

а) ; б) ; в) .

Вариант 7.

1. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные функций:

а) ; б) ; в) .

Вариант 8.

1. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные функций:

а) ; б) ; в) .

**Задание для практической работы № 2**

Вариант 1.

Вычислите производные сложных функций:

а) ; б) ; в) ; г) ; д) .

Вариант 2.

Вычислите производные сложных функций:

а) ; б) ; в) ; г) ;

д) .

Вариант 3.

Вычислите производные сложных функций:

а) ; б) ; в) ; г) ;

д) .

Вариант 4.

Вычислите производные сложных функций:

а) ; б) ; в) ; г) ;

д) .

Вариант 5.

Вычислите производные сложных функций:

а) ; б) ; в) ;

г) ; д) .

Вариант 6.

Вычислите производные сложных функций:

а) ; б) ; в) ; г) ; д) .

Вариант7.

Вычислите производные сложных функций:

а) ; б) ; в) ; г) ;

д) ;

Вариант 8.

а) ; б) ; в) ; г) ; д) .

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 12**

**Тема:** Приближенные вычисления с помощью дифференциала.

**Цель:** отработка умений и навыков выполнения приближенных вычислений с помощью дифференциала.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вид**  **работы** | **Образовательный результат** | **Трудоемкость, ч.** | **Форма контроля** | **Отчетный**  **материал** |
| *Решение*  *задач* | З2, З3, У6, ОК3, ОК4, ОК 5 | 2 | Проверка задания  Ответы на контрольные вопросы проверка отчета | Рабочая тетрадь |

**Обеспечение выполнения работы:**

***Учебное оборудование:***

1. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика».

***Информационные источники:***

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования. – 6-е. изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. – 320 с.
2. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по высшей математике: учеб.пособие для студ. учреждений сред. проф. Образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 160 с.

**Критерии оценки:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Оценка** | **Критерии оценки** |
| отлично | работа выполнена полностью, в решении нет математических ошибок (возможна одна неточ­ность, описка, не являющаяся следствием незнания или непо­нимания учебного материала), получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| хорошо | работа выполнена полностью, допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| удовлетворительно | решено первое задание, получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| неудовлетворительно | не решены первое задание, не получены правильные ответы на контрольные вопросы |

**Инструкция по выполнению работы:**

1. Запишите в тетрадь для практических работ тему и цель занятия.
2. Внимательно ознакомьтесь с Основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.
3. Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
4. После выполнения работы ответьте письменно (в тетради) на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

**Основные теоретические сведения**

***Постановка задачи.*** Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции 0,31 Kb в точке *х*.

***План решения***. Если приращение 0,29 Kb аргумента *х* мало по абсолютной величине, то

0,78 Kb. (1)

1. Выбираем точку *х*0, ближайшую к *х*  и такую, чтобы легко вычислялись значения 0,29 Kb и 0,29 Kb.

2. Вычисляем 0,29 Kb, 0,29 Kb и 0,29 Kb.

3. По формуле (1) вычисляем 0,27 Kb.

*Пример 1.*  Вычислить приближенно с помощью дифференциала.

0,45 Kb.

В нашем случае:

0,23 Kb, 0,36 Kb, 0,42 Kb.

Вычисляем:

0,43 Kb;

0,45 Kb, 0,46 Kb.

Имеем:

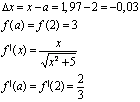
0,68 Kb

*Пример 2.*Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции http://zadachi2005.narod.ru/pr_diz_files/image013.gif в точке х=1,97.

**Решение:**

Ближайшая к 1,97 точка, где легко вычислить значение функции и ее производной это 2.

Вычисляем:



 Далее по формуле http://zadachi2005.narod.ru/pr_diz_files/image015.gif получаем:

http://zadachi2005.narod.ru/pr_diz_files/image016.gif

*Пример 3.* Дана степенная функция  *у = хn.*  Зафиксируем точку *х0*  и применим полученную выше формулу:

**

*Например,  
2,00017 = (2 + 0.0001)7* *27 + 7* *26* *0,0001 = 128 + 0,0448 = 128,0448 = =128,04*

Ту же формулу можно применить и для приближенного вычисления корней, учитывая, что  

Получим  

***Например,***   
  
  
Полезно запомнить формулы

при  *х0 =1:*  

**Задания для самостоятельной работы**

|  |  |
| --- | --- |
| **Вариант** | **№ заданий** |
| **1** | 1,5,15,20,32 |
| **2** | 2,6,16,21,33 |
| **3** | 3,7,17,22,34 |
| **4** | 4,8,18,23,38 |
| **5** | 5,9,19,24,39 |
| **6** | 6,10,25,35,40 |
| **7** | 7,11,26,36,41 |
| **8** | 8,12,27,37 |

**Задание 1.** Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции *y* в заданной точке *x*.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. [Дифференцирование. Задача 4. Вариант 1](http://www.reshebnik.ru/sms/primer-2-04-01.html) | 2. [Дифференцирование. Задача 4. Вариант 2](http://www.reshebnik.ru/sms/primer-2-04-02.html) |
| 3. [Дифференцирование. Задача 4. Вариант 3](http://www.reshebnik.ru/sms/primer-2-04-03.html) | 4. [Дифференцирование. Задача 4. Вариант 4](http://www.reshebnik.ru/sms/primer-2-04-04.html) |
| 5. [Дифференцирование. Задача 4. Вариант 5](http://www.reshebnik.ru/sms/primer-2-04-05.html) | 6. [Дифференцирование. Задача 4. Вариант 6](http://www.reshebnik.ru/sms/primer-2-04-06.html) |
| 7. [Дифференцирование. Задача 4. Вариант 7](http://www.reshebnik.ru/sms/primer-2-04-07.html) | 8. [Дифференцирование. Задача 4. Вариант 8](http://www.reshebnik.ru/sms/primer-2-04-08.html) |
| 9. [Дифференцирование. Задача 4. Вариант 9](http://www.reshebnik.ru/sms/primer-2-04-09.html) | 10. [Дифференцирование. Задача 4. Вариант 10](http://www.reshebnik.ru/sms/primer-2-04-10.html) |
| 11. [Дифференцирование. Задача 4. Вариант 11](http://www.reshebnik.ru/sms/primer-2-04-11.html) | 12. [Дифференцирование. Задача 4. Вариант 12](http://www.reshebnik.ru/sms/primer-2-04-12.html) |
| 13. [Дифференцирование. Задача 4. Вариант 13](http://www.reshebnik.ru/sms/primer-2-04-13.html) | 14. [Дифференцирование. Задача 4. Вариант 14](http://www.reshebnik.ru/sms/primer-2-04-14.html) |
| 15. [Дифференцирование. Задача 4. Вариант 15](http://www.reshebnik.ru/sms/primer-2-04-15.html) | 16. [Дифференцирование. Задача 4. Вариант 16](http://www.reshebnik.ru/sms/primer-2-04-16.html) |
| 17. [Дифференцирование. Задача 4. Вариант 17](http://www.reshebnik.ru/sms/primer-2-04-17.html) | 18. [Дифференцирование. Задача 4. Вариант 18](http://www.reshebnik.ru/sms/primer-2-04-18.html) |
| 19. [Дифференцирование. Задача 4. Вариант 19](http://www.reshebnik.ru/sms/primer-2-04-19.html) | 20. [Дифференцирование. Задача 4. Вариант 20](http://www.reshebnik.ru/sms/primer-2-04-20.html) |
| 21. [Дифференцирование. Задача 4. Вариант 21](http://www.reshebnik.ru/sms/primer-2-04-21.html) | 22. [Дифференцирование. Задача 4. Вариант 22](http://www.reshebnik.ru/sms/primer-2-04-22.html) |
| 23. [Дифференцирование. Задача 4. Вариант 23](http://www.reshebnik.ru/sms/primer-2-04-23.html) | 24. [Дифференцирование. Задача 4. Вариант 24](http://www.reshebnik.ru/sms/primer-2-04-24.html) |
| 25. [Дифференцирование. Задача 4. Вариант 25](http://www.reshebnik.ru/sms/primer-2-04-25.html) | 26. [Дифференцирование. Задача 4. Вариант 26](http://www.reshebnik.ru/sms/primer-2-04-26.html) |
| 27. [Дифференцирование. Задача 4. Вариант 27](http://www.reshebnik.ru/sms/primer-2-04-27.html) | 28. [Дифференцирование. Задача 4. Вариант 28](http://www.reshebnik.ru/sms/primer-2-04-28.html) |
| 29. [Дифференцирование. Задача 4. Вариант 29](http://www.reshebnik.ru/sms/primer-2-04-29.html) | 30. [Дифференцирование. Задача 4. Вариант 30](http://www.reshebnik.ru/sms/primer-2-04-30.html) |
| 31. [Дифференцирование. Задача 4. Вариант 31](http://www.reshebnik.ru/sms/primer-2-04-31.html) |  |

**Задание 2.** Вычислить приближенное значение **http://www.sibupk.nsk.su/Public/Chairs/c_maths/M/Pic/23.gif**, заменяя приращение функции http://www.sibupk.nsk.su/Public/Chairs/c_maths/M/Pic/24.gifдифференциалом.

|  |  |
| --- | --- |
| 32.     n=3,  a=125,93 | 37.     n=4,  a=255,16 |
| 33.     n=5,  a=242,05 | 38.     n=3,  a=124,07 |
| 34.     n=4,  a=256,96 | 39.     n=5,  a=243,95 |
| 35.     n=3,  a=216,99 | 40.     n=4,  a= 81,84 |
| 36.     n=5,  a= 32,85 | 41.     n=3,  a=215,04 |

**Контрольные вопросы**

1. Дайте определение дифференциала функции.
2. В чем заключается геометрический смысл дифференциала?

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 13**

**Тема:** исследование функции средствами дифференциального исчисления и построение графиков. Определение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

**Цель:** отработка умений и навыков исследования функции средствами дифференциального исчисления и определения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вид**  **работы** | **Образовательный результат** | **Трудоемкость, ч.** | **Форма контроля** | **Отчетный**  **материал** |
| *Решение*  *задач* | З3, У1, ОК3, ОК4, ОК 5 | 2 | Проверка задания  Ответы на контрольные вопросы проверка отчета | Рабочая тетрадь |

**Обеспечение выполнения работы:**

***Учебное оборудование:***

1. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика».

***Информационные источники:***

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования. – 6-е. изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. – 320 с.
2. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по высшей математике: учеб.пособие для студ. учреждений сред. проф. Образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 160 с.

**Критерии оценки:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Оценка** | **Критерии оценки** |
| отлично | работа выполнена полностью, в решении нет математических ошибок (возможна одна неточ­ность, описка, не являющаяся следствием незнания или непо­нимания учебного материала), получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| хорошо | работа выполнена полностью, допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| удовлетворительно | решено второе задание, получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| неудовлетворительно | не решено второе задание, не получены правильные ответы на контрольные вопросы |

**Инструкция по выполнению работы:**

1. Запишите в тетрадь для практических работ тему и цель занятия.
2. Внимательно ознакомьтесь с примерами выполнения заданий.
3. Выберите задание согласно своему варианту и приступайте к работе.
4. После выполнения работы ответьте письменно (в тетради) на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

**Пример выполнения задания 1**

|  |  |
| --- | --- |
| **План исследования функции** | **Пример**  **Исследовать функцию средствами дифференциального исчисления и построить ее график** |
| 1. Область определения функции (множество возможных значений переменной х) | D(y)=(-∞;+∞) |
| 1. Координаты точки пересечения с осью Оу | Точка пересечения с осью Оу : (0;-1) |
| 1. Исследование функции на монотонность | X=0 или  x= ;  x=2  (-∞;0)U(2;+∞) – функция убывает  (0;2) – функция возрастает |
| 1. Определение точек экстремума функции | (0;-1) – точка минимума  (2;0) – точка максимума |
| 1. Исследование функции на выпуклость и вогнутость | =x+; х=1 |
| 1. Определение точек перегиба функции | (1;-0,5) – точка перегиба |
| 1. Определение координат дополнительных точек | ; (-1;0)  ; (3;-1) |
| 1. Построение графика |  |

**Пример выполнения задания 2**

*Пример 1.* Найти наибольшее и наименьшее значения функций  на заданном отрезке.

**,** .

**Решение:**

1. Находим производную заданной функции:
2. Решаем уравнение :

Данное уравнение корней не имеет, так как числитель не может быть равен нулю.

1. Находим значение функции на границах интервала:

Следовательно, , .

*Пример 2.* Найти наибольшее и наименьшее значения функций  на заданном отрезке.

**, .**

**Решение:**

1. Находим производную заданной функции:
2. Решаем уравнение :

X=0 или

x= ;

x=2

1. Так как найденное значение принадлежит заданному отрезку, то находим значения функции на границах отрезка и в найденной точке:

Следовательно, , .

**Пример выполнения задания 3**

Из квадратного листа жести со стороной надо изготовить открытую сверху коробку, вырезав по углам квадратики и загнув образовавшиеся кромки. Какой должна быть сторона основания коробки, чтобы ее объем был максимальным?

**Решение:**

Обозначим через х длину стороны основания коробки. Тогда длины сторон вырезанных квадратиков равны , а объем коробки равен . По смыслу задачи число ч удовлетворяет неравенству , т.е. принадлежит интервалу (0;a). Таким образом, задача сводится к нахождению наибольшего значения функции на интервале (0; а).

x=0 или

Так как и , то ни одно из этих значений не может быть наибольшим.

Так как , то, следовательно, максимальный объем имеет та коробка, сторона основания которой равна .

**Задание 1.** Исследовать средствами дифференциального исчисления функцию ***y=f(x)*** и построить ее график.

1. y = x3 - 9x2 + 24x - 16
2. y = x3 -11x2 + 39x - 45
3. y = x3 + 6x2 + 9x + 4
4. y = x3 + x2 - 5x + 3
5. y = x3 + 10x2 +32x + 32
6. y = x3 + 9x2 + 24x + 20
7. y = x3 - 14x2 + 60x - 72
8. y = x3 - 12x2 + 45x - 54
9. y = x3 - 18x2 + 105x -196
10. y = x3 - 10x2 + 28x - 24

**Задание 2.** Найти наибольшее и наименьшее значения функций  на заданном отрезке.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | , | 2 | , |
| 3 | , | 4 | **,** |
| 5 | , | 6 | , |
| 7 | , | 8 | **,** |
| 9 | , | 10 | **,** |

**Задание 3**

1. Кусок проволоки длиной 48 см сгибают так, чтобы образовался прямоугольник. Какую длину должны иметь стороны прямоугольника, что его площадь была наибольшей?
2. Площадь прямоугольника 64 кв. см. Какую длину должны иметь его стороны, чтобы периметр был наименьшим?
3. Открытый бак, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, должен вмещать 13,5 литров жидкости. При каких размерах бака на его изготовление потребуется наименьшее количество металла?
4. Из круглого бревна вырезают балку с прямоугольным сечением наибольшей площади. Найдите размеры сечения балки, если радиус сечения бревна равен 20 см.
5. Буровая вышка расположена в поле в 9 км от ближайшей точки шоссе. С буровой направить курьера в пункт, расположенный по шоссе в 15 км от упомянутой точки (считаем шоссе прямолинейным). Скорость курьера на велосипеде по полю 8 км/ч, а по шоссе 10 км/ч. К какой точке шоссе ему надо ехать, чтобы в кратчайшее время достичь пункта?
6. Разность двух чисел равна 8. Каковы должны быть эти числа, чтобы произведение куба первого числа на второе было наименьшим?
7. Для стоянки машин выделили площадку прямоугольной формы, примыкающую одной стороной к стене здания. Площадку обнесли с трех сторон металлической сеткой длиной 200 метров, и площадь ее при этом оказалась наибольшей. Каковы размеры площадки?

**Контрольные вопросы**

1. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума функции.
2. Какие точки называются критическими?
3. Сформулируйте признак возрастания (убывания) функции.
4. Сформулируйте признак максимума (минимума) функции.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 14**

**Тема:** Решение неопределенных интегралов различными методами.

**Цель:** отработка умений и навыков вычисления неопределенных интегралов различными методами.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вид**  **работы** | **Образовательный результат** | **Трудоемкость, ч.** | **Форма контроля** | **Отчетный**  **материал** |
| *Решение*  *задач* | З3, З4, ОК3, ОК4, ОК 5 | 2 | Проверка задания  Ответы на контрольные вопросы проверка отчета | Рабочая тетрадь |

**Обеспечение выполнения работы:**

***Учебное оборудование:***

* 1. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика».

***Информационные источники:***

* 1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования. – 6-е. изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. – 320 с.
  2. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по высшей математике: учеб.пособие для студ. учреждений сред. проф. Образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 160 с.

**Критерии оценки:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Оценка** | **Критерии оценки** |
| отлично | работа выполнена полностью, в решении нет математических ошибок (возможна одна неточ­ность, описка, не являющаяся следствием незнания или непо­нимания учебного материала), получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| хорошо | работа выполнена полностью, допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| удовлетворительно | решено не менее 3-х примеров, по одному каждым предложенным методом, получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| неудовлетворительно | решено менее 3-х примеров, по одному каждым предложенным методом, не получены правильные ответы на контрольные вопросы |

**Инструкция по выполнению работы:**

1. Запишите в тетрадь для практических работ тему и цель занятия.
2. Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями и примерами решения задач.
3. Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
4. После выполнения работы ответьте письменно (в тетради) на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

**Основные теоретические положения**

## Неопределенные интегралы

Совокупность всех первообразных  функции *f*(*x*) называется *неопределенным интегралом* от функции *f*(*x*) и обозначается символом , т.е. .

В этом равенстве *f*(*x*) называется *подынтегральной функцией*, а *f*(*x*)*dx* – *подынтегральным выражением.*

*Свойства неопределенных интегралов*

1. ; 4. ;

2. ; 5. .

3. ;

*Таблица простейших интегралов*

|  |  |
| --- | --- |
| 1. , | 6. , |
| 2. , *a*≠1, | 7. , |
| 2а. , | 8. , |
| 2б. , | 9. , |
| 2в. , | 10. , |
| 3. , | 11. , |
| 4. , | 12. , |
| 4а. , | 13. , |
| 5. , | 14. . |

**Примеры решения интегралов различными методами**

***Метод непосредственного интегрирования***

Непосредственное интегрирование основано на прямом использовании таблицы интегралов. Возможны случаи:

1) данный интеграл находится непосредственно по соответствующему табличному интегралу;

2) данный интеграл после применения свойств 3 и 4 приводится к одному или нескольким табличным интегралам;

3) данный интеграл после элементарных тождественных преобразований над подынтегральной функцией (по членное деление, приведение к виду степенной функции, использование известных тождеств) и применения свойств 3 и 4 приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

*Пример 1.*Найти .

Последовательно применим к данному интегралу свойства 3 и 4, а затем воспользуемся таблицей основных интегралов:



.

*Пример 2.* Найти 



.

***Интегрирование методом подстановки***

Вычислить заданный интеграл непосредственным интегрированием удается далеко не всегда, а иногда это связано с большими трудностями. Одним из наиболее эффективных приемов является метод подстановки или замены переменной интегрирования. Сущность этого метода заключается в том, что путем введения новой переменной интегрирования удается свести заданный интеграл к новому интегралу, который сравнительно легко берется непосредственно.

*Пример 1.* Найти .

**Решение:**

.

*Пример 2.* Найти

*Пример 3.* Найти

***Метод интегрирования по частям***

Если *u*(*x*) и *v*(*x*) – дифференцируемые функции, то справедлива формула

.

Данную формулу интегрирования применяют обычно в тех случаях, когда функция *u*(*x*) упрощается при дифференцировании, а первообразная для функции *v*(*x*) легко находится.

*Пример.* Вычислить неопределенные интегралы, используя метод интегрирования по частям:

**а)**  **б)** .

**Решение.** **а)** При вычислении первого интеграла воспользуемся формулой интегрирования по частям:

.

**б)** При вычислении второго интеграла также воспользуемся формулой интегрирования по частям. В результате получим



.

**Задания для самостоятельной работы**

**Задание.** Вычислите интегралы, используя указанные методы

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***№ варианта*** | ***Непосредственное***  ***интегрирование*** | ***Метод***  ***подстановки*** | ***Метод***  ***интегрирования по частям*** |
| **1** |  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
| **2** |  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
| **3** |  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
| **4** |  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
| **5** |  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

### Контрольные вопросы

* 1. Дайте определение неопределенного интеграла.
  2. В чем заключается метод непосредственного интегрирования?
  3. В чем заключается метод интегрирования подстановкой?
  4. В чем заключается метод интегрирования по частям?

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 15**

**Тема:** Применение определенного интеграла для вычисления площадей плоских фигур.

**Цель:** отработка умений и навыков применения определенного интеграла для вычисления площадей плоских фигур.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вид**  **работы** | **Образовательный результат** | **Трудоемкость, ч.** | **Форма контроля** | **Отчетный**  **материал** |
| *Решение*  *задач* | З1, З3, У6, ОК3, ОК4, ОК 5 | 2 | Проверка задания  Ответы на контрольные вопросы проверка отчета | Рабочая тетрадь |

**Обеспечение выполнения работы:**

***Учебное оборудование:***

1. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика».

***Информационные источники:***

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования. – 6-е. изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. – 320 с.
2. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по высшей математике: учеб.пособие для студ. учреждений сред. проф. Образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 160 с.

**Критерии оценки:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Оценка** | **Критерии оценки** |
| отлично | работа выполнена полностью, в решении нет математических ошибок (возможна одна неточ­ность, описка, не являющаяся следствием незнания или непо­нимания учебного материала), получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| хорошо | работа выполнена полностью, допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| удовлетворительно | сделан чертеж, составлен интеграл, получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| неудовлетворительно | не сделан чертеж, не составлен интеграл, не получены правильные ответы на контрольные вопросы |

**Инструкция по выполнению работы:**

1. Запишите в тетрадь для практических работ тему и цель занятия.
2. Внимательно ознакомьтесь с Примерами вычисления пределов.
3. Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
4. После выполнения работы ответьте письменно (в тетради) на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

**Примеры решения задач**

*Пример 1 .* Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

и

**Решение:**

Графиком y=x+2 является прямая линия, а графиком линии

является парабола, ветви которой направлены вниз.

1. Чтобы построить график прямой необходимо задать две точки:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x | 0 | 1 |
| y | 2 | 3 |

1. Построение параболы начинается с нахождения координат ее вершины:

;

;

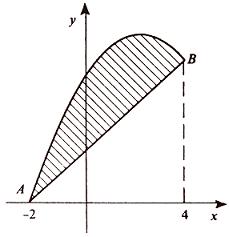
Следовательно, координаты вершины параболы (2;16).

Далее найдем точку пересечения с осью Оу:

Далее найдем точки пересечения с осью Ох, решив уравнение:

D=64

1. В одной системе координат строим оба графика и отмечаем штриховкой площадь, которую надо найти:



5

-2

1. Находим точки пересечения заданных линий. Для этого решаем систему уравнений:

Для нахождения абсцисс точек пересечения заданных линий решаем уравнение:

   или

Решив квадратное уравнение, находим: *x*1 = -2, *x*2 = 5.

Итак, данные линии, представляющие собой параболу и прямую, пересекаются в точках  *с абсциссами x*1 = -2, *x*2 = 5.

1. Эти линии образуют замкнутую фигуру, площадь которой вычисляем по указанной выше формуле:

*Пример 2.* Вычислить площадь, ограниченную линиями *y* = *x*2 + 1 и *x* + *y* = 3.

**Решение:**

Графиком *y* = 3 – *x* является прямая линия, а графиком линии является парабола, ветви которой направлены вверх.

1. Чтобы построить график прямой необходимо задать две точки:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x* | 0 | 1 |
| *y* | 3 | 2 |

1. Построение параболы начинается с нахождения координат ее вершины:

;

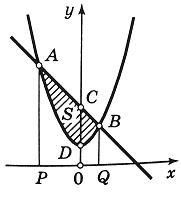
;

Следовательно, координаты вершины параболы (0;1)

Далее найдем точку пересечения с осью Оу:

Точек пересечения с осью ОХ парабола не имеет, так как вершина расположена выше оси ОХ и ветви направлены вверх.

1. В одной системе координат строим оба графика и отмечаем штриховкой площадь, которую надо найти:



1. Находим точки пересечения заданных линий. Для этого решаем систему уравнений:

http://www.pm298.ru/Mathem/ds0101735.JPGhttp://www.pm298.ru/Mathem/ds0201735.JPG

находим абсциссы точек пересечения *x*1 = -2 и *x*2 = 1.

1. Полагая *y*2 = 3 - *x* и *y*1 = *x*2 + 1, на основании формулы http://www.pm298.ru/Mathem/ds0101737.JPGhttp://www.pm298.ru/Mathem/ds0201737.JPGполучаем

http://www.pm298.ru/Mathem/ds0101738.JPGhttp://www.pm298.ru/Mathem/ds0201738.JPGhttp://www.pm298.ru/Mathem/ds0301738.JPGhttp://www.pm298.ru/Mathem/ds0401738.JPGhttp://www.pm298.ru/Mathem/ds0501738.JPG

http://www.pm298.ru/Mathem/ds0101739.JPGhttp://www.pm298.ru/Mathem/ds0201739.JPGhttp://www.pm298.ru/Mathem/ds0301739.JPG

**Задания для самостоятельного решения**

Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой ***у* = *ах*2 + *bх* + *с***  и прямой ***у = kх + b****.* Сделать чертеж.

1. у = -х2 + 4х - 1;      у = -х - 1.
2. у = х2 - 6х + 7;       у = х + 1
3. у = -х2 + 6х -5;       у = х - 5
4. у = х2 - 6х + 7;       у = -х + 7
5. у =-х2 + 6х - 5;       у = -х + 1
6. у = х2 + 6х + 7;     у = х + 7
7. у = -х2 - 6х - 5;       у = х + 1
8. у = х2 + 6х + 7;     у = -х + 1
9. у = -х2 - 6х - 6;       у = -х - 6
10. у = х2 - 4х + 1;       у = х + 1

**Контрольные вопросы**

1. В чем отличие определенного интеграла от неопределенного?
2. Перечислите свойства определенного интеграла.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 16**

**Тема:** вычисление определенных интегралов с помощью приближенных формул.

**Цель:** отработка умений и навыков вычисления определенных интегралов с помощью приближенных формул.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вид**  **работы** | **Образовательный результат** | **Трудоемкость, ч.** | **Форма контроля** | **Отчетный**  **материал** |
| *Решение*  *задач* | З1, З3, У6, ОК3, ОК4, ОК 5 | 2 | Проверка задания  Ответы на контрольные вопросы проверка отчета | Рабочая тетрадь |

**Обеспечение выполнения работы:**

***Учебное оборудование:***

1. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика».

***Информационные источники:***

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования. – 6-е. изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. – 320 с.
2. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по высшей математике: учеб.пособие для студ. учреждений сред. проф. Образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 160 с.

**Критерии оценки:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Оценка** | **Критерии оценки** |
| отлично | работа выполнена полностью, в решении нет математических ошибок (возможна одна неточ­ность, описка, не являющаяся следствием незнания или непо­нимания учебного материала), получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| хорошо | работа выполнена полностью, допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| удовлетворительно | интеграл вычислен хотя по одной из формул, получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| неудовлетворительно | интеграл вычислен хотя по одной из формул, не получены правильные ответы на контрольные вопросы |

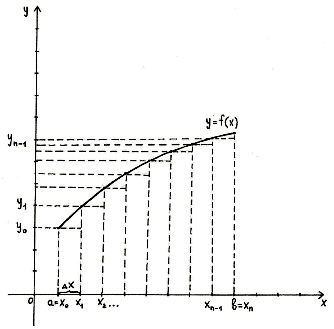
**Инструкция по выполнению работы:**

1. Запишите в тетрадь для практических работ тему и цель занятия.
2. Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями и примерами решения задач.
3. Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
4. После выполнения работы ответьте письменно (в тетради) на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

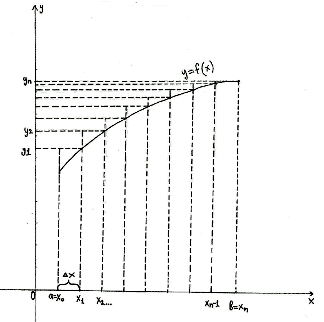
**Основные теоретические положения и примеры решения задач**

Решение многих технических задач сводится к вычислению определённых интегралов, точное выражение которых сложно, требует длительных вычислений и не всегда оправдано практически. Здесь бывает вполне достаточно их приближённого значения.

**Формула прямоугольников с недостатком:**

http://festival.1september.ru/articles/549599/img4.gif

**Формула прямоугольников с избытком:**

http://festival.1september.ru/articles/549599/img5.gif

**Формула Симпсона** для приближенного вычисления определенного интеграла имеет следующий вид:

**Общая формула Симпсона**где: – длина каждого из маленьких отрезков или **шаг**;  
http://www.mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image037_0001.gif – значения подынтегральной функции в точках http://www.mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image137_0000.gif.

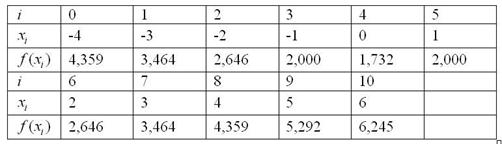
Детализируя это нагромождение, разберемформулу подробнее:  
http://www.mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image143.gif – сумма первого и последнего значения подынтегральной функции;  
http://www.mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image145.gif – сумма членов с *чётными* индексами умножается на 2;  
http://www.mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image147.gif – сумма членов с *нечётными* индексами умножается на 4.

*Пример*. Вычислить приближенное значение определенного интеграла  http://www.mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image204.gif с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Точность вычислений 0,001.

**Решение:**

Обратите внимание на формулировку задания: «Точность вычислений 0,001». Смысловой нюанс данной формулировки предполагает, что результаты нужно только округлить до третьего знака после запятой, а не достигнуть такой точности.

При десяти отрезках разбиения  шаг составляет http://www.mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image210.gif.

Заполним расчетную таблицу:  


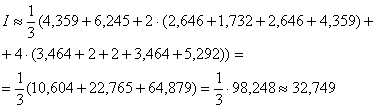
Таблицу рациональнее сделать двухэтажной, чтобы не пришлось «мельчить» и всё разборчиво вместилось на тетрадный лист.

Используем формулу прямоугольников с недостатком:

Используем формулу прямоугольников с избытком:

Используем формулу трапеций:

Используем формулу Симпсона:  
Формула Симпсона для десяти отрезков разбиения 2n=10

Вычисления, не ленимся, расписываем подробнее:  
http://www.mathprofi.ru/h/formula_simpsona_metod_trapecij_clip_image216.gif

Для того чтобы найти **погрешность вычислений**, надо воспользоваться формулами:

http://festival.1september.ru/articles/549599/img12.gif  
http://festival.1september.ru/articles/549599/img13.gif

*Аточн* можно вычислить с помощью пакета Маткад.

**Задания для самостоятельного решения**

Вычислить приближенное значение определенного интеграла  с помощью формул приближенного вычисления, разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Все вычисления проводить с округлением до третьего десятичного знака. Вычислите с помощью пакета Маткад точное значение интеграла. Вычислите погрешность применения приближенных формул.

1. . 2. .

3. . 4. .

5. . 6. .

7. . 8. .

9. . 10. .

**Контрольные вопросы**

* 1. Какая из формул приближенного вычисления дает наибольшую погрешность?
  2. Какая из формул приближенного вычисления дает наименьшую погрешность?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 17

**Тема:** Решение обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Цель:** отработка умений и навыков решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вид**  **работы** | **Образовательный результат** | **Трудоемкость, ч.** | **Форма контроля** | **Отчетный**  **материал** |
| *Решение*  *задач* | З1, З3, У6, ОК3, ОК4, ОК 5 | 2 | Проверка задания  Ответы на контрольные вопросы проверка отчета | Рабочая тетрадь |

**Обеспечение выполнения работы:**

***Учебное оборудование:***

1. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика».

***Информационные источники:***

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования. – 6-е. изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. – 320 с.
2. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по высшей математике: учеб.пособие для студ. учреждений сред. проф. Образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 160 с.

**Критерии оценки:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Оценка** | **Критерии оценки** |
| отлично | работа выполнена полностью, в решении нет математических ошибок (возможна одна неточ­ность, описка, не являющаяся следствием незнания или непо­нимания учебного материала), получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| хорошо | работа выполнена полностью, допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| удовлетворительно | решено хотя бы по одному уравнению из каждого задания, получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| неудовлетворительно | Не решено хотя бы по одному уравнению из каждого задания, не получены правильные ответы на контрольные вопросы |

**Инструкция по выполнению работы:**

1. Запишите в тетрадь для практических работ тему и цель занятия.
2. Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями и примерами решения задач.
3. Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
4. После выполнения работы ответьте письменно (в тетради) на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

**Основные теоретические положения примеры решения задач**

*Дифференциальные уравнения с разделяющими переменными*

Общий вид такого уравнения

*Х(x)Y(y)dx + X1(x)Y1(y)dx = 0,*

где *Х(x), X1(x)* – функции только от *х*, *Y(y), Y1(y)* – функции только от *y*.

Поделив обе части уравнения на произведение *X1(x)Y(y) ≠ 0*, получим уравнение с разделенными переменными:

 (1)

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

 (2)

**Замечание.** Если произведение *X1(x)Y(y)* при *х = а* и *у = b*, то эти функции при *х = а* и *у = b* являются решениями дифференциального уравнения при условии, что при этих значениях *х* и *у* уравнение не теряет числового смысла. Геометрически эти решения представляют собой прямые, параллельные осям координат.

**Примеры решения задания 1**

*Пример 1.*  *при х=4 и у=7*

|  |  |
| --- | --- |
| Алгоритм | Решение |
| 1. Найдем общее решение ДУ. | /: (5+x)\*y  – общее решение ДУ |
| 2. Найдем частное решение ДУ при *х=4* и *у=7* | – общее решение ДУ  - частное решение ДУ |

*Пример 2.  при х =0 у=*

|  |  |
| --- | --- |
| Алгоритм | Решение |
| 1. Найдем общее решение ДУ. | - общее решение ДУ |
| 2. Найдем частное решение ДУ *при х=0 и у=* | *C=0*  *-* частное решение ДУ |

*Пример 3.  при y=*

|  |  |
| --- | --- |
| Алгоритм | Решение |
| 1. Найдем общее решение ДУ. | - общее решение ДУ |
| 2. Найдем частное решение ДУ *при х=6 и у=* | *-* частное решение ДУ |

Линейные однородные дифференциальные уравнения

второго порядка с постоянными коэффициентами

*Линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами* называется уравнение вида

***y" + py′ + qy = f(x)****.*

где *p* и *q* – некоторые числа.

Если *f(x) =* 0, то дифференциальное уравнение называется линейным *однородным.* Оно имеет вид

***y" + py′ + qy = 0****.*  (3)

Справедлива ***теорема***: если *у*1 и *у*2 – *частные решения уравнения* (3), *причем y*1*/y*2 ≠ *const, то функция у = С*1*у*1*+ С*2*у*2*, где С*1 *и С*2 *– произвольные постоянные, является общим решением этого уравнения.*

Решением данного дифференциального уравнения (3) должна быть такая функция, которая, будучи подставлена в уравнение, превратит его в тождество. Левая часть уравнения представляет собой сумму функции *у* и ее производных *y*′ и *y"*, взятых с некоторыми постоянными коэффициентами. Чтобы такая сумма обратилась в нуль, надо, чтобы *y*, *y*′ и *y"* были подобны между собой.

Такой функцией является функция *y = ekx*, где *k* – постоянная. Требуется подобрать *k* так, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению (3).

Так как *y′ = ekx(kx)′= kekx,* а *y" = kekx(kx)′ = k2ekx,* то, подставляя эти значения *y*, *y*′ и *y"* в левую часть уравнения (2), получим

*k2ekx + pkekx + qekx = 0.*

Сокращая на множитель *ekx*, не обращающийся в нуль, получим *характеристическое уравнение*

***k2 + pk + q= 0****.* (4)

Это уравнение определяет те значения k, при которых функция *y = ekx* является решением дифференциального уравнения (3).

При решении характеристического уравнения (4) возможны три случая:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***№*** | ***Корни уравнения*** | ***Частные***  ***решения*** | ***Общее решение*** |
| **1** | Действительные  различные (*k*1≠*k*2) |  |  |
| **2** | Действительные  равные (*k*1=*k*2) |  |  |
| **3** | Комплексно-сопряженные |  |  |

**Примеры решения задания 2**

*Пример 1.* Найдите общее решение ДУ 2-го однородного порядка:



|  |  |
| --- | --- |
| Алгоритм | Решение |
| 1. Решим характеристическое уравнение | k2+8k+15=0  D=4  k1=-3, k2=-5 |
| 2. Используя таблицу, запишем общее решение уравнения | Так как дискриминант больше нуля и корни уравнения различны, то общее решение исходного уравнения имеет вид:  Y= C1e-3x+C2e-5x |

*Пример 2.* Найдите частное решение ДУ 2-го однородного порядка:

, если  

|  |  |
| --- | --- |
| Алгоритм | Решение |
| 1. Решим характеристическое уравнение | k2-4k+13=0  D=-36=36i2  k1=2+3i, k2=2-3i |
| 2. Используя таблицу, запишем общее решение уравнения | Так как дискриминант меньше нуля и корни уравнения комплексные, то общее решение исходного уравнения имеет вид:  Y= e2x(C1cos3x+C2sin3x) |
| 3. Найдем производную Y, | Y,=2e2x(C1cos3x+C2sin3x)+ e2x(-3C1sin3x+3C2cos3x) |
| 4. Найдем значение С1, используя начальные условия и общее решение уравнения | Y= e2x(C1cos3x+C2sin3x)  )  ) |
| 5. Найдем значение С2, используя начальные условия и производную общего решения уравнения | )  )  )  )  ) |
| 6. Запишем частное решение исходного ДУ, соответствующее заданным начальным условиям | Y= e2x(cos3x+sin3x) |

**Задания для самостоятельной работы**

**Задание 1.** Найдите решение уравнения с разделяющимися переменными , удовлетворяющее начальному условию .

***Вариант № 1***

*1.*  *при х=1 и у=4*

*2.  при х=0 и у=1*

*3.  при у(1)=3*

*4. при  *

***Вариант № 2***

*1.*  *при х=0 и у=4*

*2. ; у(3)=0*

*3.  при у=0 и х=0*

*4. при *

***Вариант № 3***

*1.*  *при х=0 и у=2*

*2.  у(-2)=3*

*3.  при у=4 и *

*4. при *

**Задание 2.** Решите дифференциальные уравнения 2-го порядка. В уравнениях, где заданы начальные условия, найдите частное решение уравнения.

***Вариант 1***

**1.** , если , 

**2.** 

**3.** , если , 

**4.** 

***Вариант 2***

**1.** , если , 

**2.** , если , 

**3.** 

**4.** 

***Вариант 3***

**1.** , если , 

**2.** 

**3.** 

**4.** , если , 

# Контрольные вопросы

* 1. Дайте определение дифференциального уравнения.
  2. Что такое порядок уравнения?
  3. Назовите виды простейших дифференциальных уравнений.
  4. Дайте определение однородного ДУ с постоянными коэффициентами.
  5. Чем отличается общее решение ДУ от частного.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 18**

**Тема:** Решение задач по теории вероятности.

**Цель:** отработка умений и навыков решения различных задач по теории вероятности.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вид**  **работы** | **Образовательный результат** | **Трудоемкость, ч.** | **Форма контроля** | **Отчетный**  **материал** |
| *Решение*  *задач* | З4, З2, У5, ОК3, ОК4, ОК 5 | 2 | Проверка задания  Ответы на контрольные вопросы проверка отчета | Рабочая тетрадь |

**Обеспечение выполнения работы:**

***Учебное оборудование:***

1. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика».

***Информационные источники:***

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования. – 6-е. изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. – 320 с.
2. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по высшей математике: учеб.пособие для студ. учреждений сред. проф. Образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 160 с.

**Критерии оценки:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Оценка** | **Критерии оценки** |
| отлично | работа выполнена полностью, в решении нет математических ошибок (возможна одна неточ­ность, описка, не являющаяся следствием незнания или непо­нимания учебного материала), получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| хорошо | работа выполнена полностью, допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| удовлетворительно | решено правильно 50% задач, получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| неудовлетворительно | решено правильно менее 50% задач, не получены правильные ответы на контрольные вопросы |

**Инструкция по выполнению работы:**

1. Запишите в тетрадь для практических работ тему и цель занятия.
2. Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.
3. Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
4. После выполнения работы ответьте письменно (в тетради) на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

**Основные теоретические сведения и примеры решения задач**

**1.** В урне Н билетов. Из них М выигрышных. Какова вероятность того, что первый вытянутый билет окажется выигрышным?

**Решение:**

Пусть А – событие, означающее, что первый вытянутый билет выигрышный.

Н – общее количество всех возможных исходов.

М – количество исходов, благоприятствующих наступлению события А.

Р(А) – вероятность наступления события А. Тогда Р(А)=М/Н.

**2.** Биатлонист стреляет по мишени. Мишень – круг радиуса R см. Биатлонист попадает в мишень с вероятностью 1. Попадание в любую точку равновероятно. Необходимо попасть в круг радиуса r см.

**Решение:**

А - попадание в круг радиуса r см. Sr=πr2. SR=πR2. Р(А)=Sr/SR

**3.** Имеется собрание сочинений из Н томов некоего автора. Все Н томов расставляются на книжной полке случайным образом. Какова вероятность, что тома расположатся в порядке возрастания или убывания?

**Решение:**

А – вероятность того, что тома расположатся в порядке возрастания или убывания.

Все тома можно расставить на полке m=Н! способами. Только в двух случаях тома расположатся либо в порядке возрастания, либо в порядке убывания. Значит, n=2. Тогда Р(А)=n/Н!.

**4.** Имеется собрание сочинений из Н томов некоего автора. На полке умещается только М томов (М меньше Н). Эти тома берут из Н случайным способом. Какова вероятность, что выбранные М томов расположатся в порядке возрастания или убывания?

**Решение:**

А – вероятность того, что выбранные тома расположатся в порядке возрастания или убывания.

М томов из Н томов можно выбрать способами. Только в двух случаях тома расположатся либо в порядке возрастания, либо в порядке убывания. Значит, n=2. Тогда Р(А)=2/.

**5.** Три стрелка стреляют по мишени. Предполагается ,что события попадания в мишень для стрелков независимы и вероятности попадания стрелков в мишень равны р1, р2, р3. Какова вероятность того, что:

1) все три выстрела окажутся успешными;

2) хотя бы одни выстрел окажется успешным;

3) точно один выстрел окажется успешным, два выстрела окажутся успешными?

**Решение:**

1) А – все три выстрела окажутся успешными

Р(А)=р1\*р2\*р3

2) Н - хотя бы одни выстрел окажется успешным 1-рi – вероятность промаха каждого стрелка

Р(Н) =1-(1-р1)(1-р2)(1-р3)

3) В – только один выстрел окажется успешным

Р(В)=р1\*(1-р2)\*(1-р3)+(1-р1)\*р2\*(1-р3)+(1-р1)\*(1-р2)\*р3

С - два выстрела окажутся успешными

Р(с)=р1\*р2\*(1-р3)+(1-р1)\*р2\*р3+р1\*(1-р2)\*р3

**6.** Футболист бьет Н раз пенальти. Вероятность забить при одном ударе равна р. Какова вероятность, что будет забито 3 пенальти?

**Решение:**

Пусть А – событие, означающее, что будет забито 3 пенальти. Так вероятность забить при одном пенальти постоянна, то воспользуемся формулой Бернулли.

Тогда Р(А)=

**7.** Случайная величина Х задана рядом распределения:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ***Хi*** | *-3* | *0* | *1* | *4* |
| **Рi** | Р1 | Р2 | Р3 | Р4 |

Найти математическое ожидание МХ, дисперсию DX и среднеквадратическое отклонение .

**Решение:**

МХ=х1р1+х2р2+х3р3+х4р4

DX=

.

**Задания для самостоятельной работы**

Формулировки задач смотри в примерах решения задач.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Номер задачи** | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  | **1** | | **2** | | **3** | **4** | | **5** | | | **6** | | **7** | | | |
|  | **Н** | **М** | **R** | **r** | **Н** | **Н** | **М** | **Р1** | **Р2** | **Р3** | **Н** | **р** | **Р1** | **Р2** | **Р3** | **Р4** |
| **1** | 10 | 1 | 5 | 1 | 3 | 5 | 3 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 5 | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 |
| **2** | 11 | 2 | 6 | 2 | 4 | 6 | 4 | 0,4 | 0,5 | 0,1 | 4 | 0,2 | 0,1 | 0,2 | 0,2 | 0,5 |
| **3** | 12 | 3 | 7 | 3 | 5 | 7 | 5 | 0,3 | 0,2 | 0,4 | 7 | 0,3 | 0,2 | 0,4 | 0,1 | 0,3 |
| **4** | 13 | 4 | 8 | 4 | 6 | 8 | 6 | 0,9 | 0,8 | 0,7 | 6 | 0,4 | 0,3 | 0,3 | 0,2 | 0,2 |
| **5** | 14 | 5 | 9 | 5 | 7 | 9 | 7 | 0,5 | 0,6 | 0,3 | 5 | 0,5 | 0,6 | 0,1 | 0,2 | 0,1 |
| **6** | 15 | 6 | 10 | 6 | 8 | 10 | 8 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 8 | 0,6 | 0,4 | 0,4 | 0,1 | 0,1 |
| **7** | 16 | 7 | 11 | 7 | 9 | 11 | 9 | 0,2 | 0,3 | 0,5 | 5 | 0,7 | 0,2 | 0,2 | 0,3 | 0,3 |
| **8** | 17 | 8 | 12 | 8 | 10 | 12 | 10 | 0,7 | 0,8 | 0,6 | 6 | 0,8 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 |
| **9** | 18 | 9 | 13 | 9 | 3 | 13 | 3 | 0,1 | 0,5 | 0,7 | 8 | 0,9 | 0,5 | 0,3 | 0,1 | 0,1 |
| **10** | 19 | 10 | 14 | 10 | 4 | 14 | 4 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 7 | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,2 | 0,5 |
| **11** | 20 | 1 | 5 | 3 | 5 | 8 | 6 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 9 | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0,4 | 0,2 |
| **12** | 21 | 2 | 6 | 4 | 6 | 9 | 7 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 5 | 0,3 | 0,5 | 0,3 | 0,1 | 0,1 |
| **13** | 22 | 3 | 7 | 5 | 7 | 10 | 7 | 0,3 | 0,5 | 0,7 | 6 | 0,4 | 0,6 | 0,1 | 0,1 | 0,2 |
| **14** | 23 | 4 | 8 | 6 | 8 | 11 | 9 | 0,5 | 0,1 | 0,2 | 7 | 0,5 | 0,2 | 0,1 | 0,5 | 0,2 |
| **15** | 24 | 5 | 9 | 7 | 9 | 12 | 10 | 0,3 | 0,4 | 0,9 | 4 | 0,6 | 0,5 | 0,1 | 0,2 | 0,2 |
| **16** | 25 | 6 | 10 | 8 | 10 | 13 | 3 | 0,2 | 0,4 | 0,8 | 6 | 0,7 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 |
| **17** | 26 | 7 | 11 | 9 | 3 | 14 | 4 | 0,9 | 0,8 | 0,7 | 7 | 0,8 | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0,4 |
| **18** | 27 | 8 | 12 | 10 | 4 | 8 | 4 | 0,4 | 0,7 | 0,6 | 8 | 0,9 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 |
| **19** | 28 | 9 | 13 | 3 | 5 | 9 | 6 | 0,2 | 0,6 | 0,7 | 5 | 0,1 | 0,6 | 0,1 | 0,1 | 0,2 |
| **20** | 29 | 10 | 14 | 4 | 6 | 10 | 7 | 0,1 | 0,6 | 0,4 | 6 | 0,2 | 0,5 | 0,3 | 0,1 | 0,1 |
| **21** | 30 | 1 | 5 | 3 | 7 | 11 | 8 | 0,4 | 0,2 | 0,6 | 7 | 0,3 | 0,3 | 0,1 | 0,2 | 0,4 |
| **22** | 31 | 2 | 6 | 4 | 8 | 12 | 9 | 0,1 | 0,3 | 0,6 | 8 | 0,4 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 |
| **23** | 32 | 3 | 7 | 5 | 9 | 13 | 10 | 0,4 | 0,6 | 0,6 | 5 | 0,5 | 0,5 | 0,2 | 0,1 | 0,2 |
| **24** | 33 | 4 | 8 | 6 | 10 | 14 | 3 | 0,3 | 0,6 | 0,1 | 4 | 0,6 | 0,2 | 0,2 | 0,1 | 0,5 |
| **25** | 34 | 5 | 9 | 7 | 5 | 9 | 4 | 0,6 | 0,1 | 0,1 | 6 | 0,7 | 0,1 | 0,2 | 0,2 | 0,5 |
| **26** | 35 | 6 | 10 | 3 | 6 | 10 | 6 | 0,3 | 0,7 | 0,9 | 7 | 0,8 | 0,6 | 0,2 | 0,1 | 0,1 |
| **27** | 36 | 7 | 11 | 4 | 7 | 11 | 7 | 0,4 | 0,4 | 01 | 4 | 0,9 | 0,4 | 0,1 | 0,3 | 0,2 |
| **28** | 37 | 8 | 12 | 5 | 8 | 12 | 8 | 0,4 | 0,9 | 0,8 | 8 | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,2 | 0,5 |
| **29** | 38 | 9 | 13 | 6 | 9 | 13 | 9 | 0,3 | 0,7 | 0,9 | 6 | 0,2 | 0,1 | 0,3 | 0,2 | 0,4 |
| **30** | 39 | 10 | 14 | 7 | 10 | 14 | 10 | 0,9 | 0,7 | 0,7 | 7 | 0,3 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 |

**Контрольные вопросы**

* 1. Дайте классическое определение вероятности.
  2. Дайте определение геометрической вероятности.
  3. Сформулируйте теоремы Бернулли, Байеса, Муавра-Лапласа.

# ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 19

## Тема: Основы математической статистики

**Цель**: научиться выполнять первичную обработку выборки, представлять ее графически, вычислять числовые характеристики, использовать метод наименьших квадратов для построения уравнения линейной регрессии.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вид**  **работы** | **Образовательный результат** | **Трудоемкость, ч.** | **Форма контроля** | **Отчетный**  **материал** |
| *Решение*  *задач* | З4, З2, У5, ОК3, ОК4, ОК 5 | 2 | Проверка задания  Ответы на контрольные вопросы проверка отчета | Рабочая тетрадь |

**Обеспечение выполнения работы:**

***Учебное оборудование:***

1. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика».

***Информационные источники:***

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования. – 6-е. изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. – 320 с.
2. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по высшей математике: учеб.пособие для студ. учреждений сред. проф. Образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 160 с.

**Критерии оценки:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Оценка** | **Критерии оценки** |
| отлично | работа выполнена полностью, в решении нет математических ошибок (возможна одна неточ­ность, описка, не являющаяся следствием незнания или непо­нимания учебного материала), получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| хорошо | работа выполнена полностью, допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| удовлетворительно | решена правильно 1-я задача, получены правильные ответы на контрольные вопросы |
| неудовлетворительно | не решена правильно 1-я задача, не получены правильные ответы на контрольные вопросы |

**Инструкция по выполнению работы:**

1. Запишите в тетрадь для практических работ тему и цель занятия.
2. Внимательно ознакомьтесь с Примером решения задачи.
3. Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
4. После выполнения работы ответьте письменно (в тетради) на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

**Пример решения задачи 1**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Урожайность, ц/га | 8-10 | 10-12 | 12-14 | 14-16 | 16-18 | 18-20 | 20-22 |
| Площадь, га | 5 | 13 | 15 | 17 | 12 | 20 | 18 |

Для выполнения задания необходимо заполнить расчетную таблицу, данные которой помогут при дальнейших вычислениях (объем выборки N=100):

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Урожайность, ц/га | 8-10 | 10-12 | 12-14 | 14-16 | 16-18 | 18-20 | 20-22 |
| Площадь, га | 5 | 13 | 15 | 17 | 12 | 20 | 18 |
| Средняя урожайность, ц/га | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 |
| Относительная частота | 0,05 | 0,13 | 0,15 | 0,17 | 0,12 | 0,20 | 0,18 |

1) Найдем величину, которую следует принять за среднюю урожайность на всем массиве:

2) Найдем величину, которую следует принять за среднее квадратическое отклонение урожайности на всем массиве. Сначала найдем выборочную дисперсию:

Так как среднеквадратическое отклонение вычисляется по формуле , то получаем, что .

**Вывод:** средняя урожайность во всем массиве составляет 16 ц/га, за средне квадратическое отклонение урожайности на всем массиве можно принять ц/га.

3) Графически выборку представляем в виде гистограммы (см. пример в курсе лекций).

**Пример решения задачи 2**

Приводятся данные о количестве внесенных удобрений в центнерах (Х) и урожае сахарной свеклы с 1 га посева в тоннах (У) в хозяйствах района за 10 лет. Необходимо: 1) вычислить коэффициент корреляции; 2) найти выборочное уравнение регрессии У на Х; 3) нанести на чертеж исходные данные и построить полученную прямую регрессии.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 |
| У | 4 | 8 | 10 | 15 | 17 | 20 | 22 | 28 | 35 | 41 |

Для выполнения задания необходимо заполнить расчетную таблицу, данные которой помогут при дальнейших вычислениях:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **X** | **Y** | **X2** | **Y2** | **XY** |
| **1** | 3 | 4 | 9 | 16 | 12 |
| **2** | 4 | 8 | 16 | 64 | 32 |
| **3** | 4 | 10 | 16 | 100 | 40 |
| **4** | 4 | 15 | 16 | 225 | 60 |
| **5** | 5 | 17 | 25 | 289 | 85 |
| **6** | 5 | 20 | 25 | 400 | 100 |
| **7** | 6 | 22 | 36 | 484 | 132 |
| **8** | 6 | 28 | 36 | 784 | 168 |
| **9** | 6 | 35 | 36 | 1225 | 210 |
| **10** | 7 | 41 | 49 | 1681 | 287 |
|  | **50** | **200** | **364** | **5268** | **1126** |

1) Вычислим коэффициент корреляции по формуле:

2) Найдем выборочное уравнение регрессии У на Х:



Составляем и решаем систему уравнений:

Из системы уравнений находим b0=14.5, b1=1.1.

Искомое уравнение регрессии имеет вид:

Y=14.5+1.1x.

3) Наносим на чертеж исходные данные и строим полученную прямую регрессии (см. пример в курсе лекций).

**Задания для самостоятельной работы**

**Задание 1.** Для определения средней урожайности пшеницы в каждом из девяти совхозов района была определена урожайность на 100 га в каждом из них.

Для каждого совхоза найти: 1) величину, которую следует принять за среднюю урожайность на всем массиве; 2) величину, которую следует принять за среднее квадратическое отклонение урожайности на всем массиве; 3) изобразите заданную выборку графически.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | Урожайность, ц/га | 11-13 | 13-15 | 15-17 | 17-19 | 19-21 | 21-23 | 23-25 |
| Площадь, га | 6 | 10 | 8 | 16 | 28 | 22 | 10 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | Урожайность, ц/га | 10-12 | 12-14 | 14-16 | 16-18 | 18-20 | 20-22 | 22-24 |
| Площадь, га | 5 | 11 | 18 | 14 | 21 | 11 | 20 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 3 | Урожайность, ц/га | 11-13 | 13-15 | 15-17 | 17-19 | 19-21 | 21-23 | 23-25 |
| Площадь, га | 10 | 11 | 13 | 16 | 5 | 22 | 23 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 4 | Урожайность, ц/га | 9-11 | 11-13 | 13-15 | 15-17 | 17-19 | 19-21 | 21-23 |
| Площадь, га | 3 | 2 | 5 | 13 | 22 | 28 | 27 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 5 | Урожайность, ц/га | 11-13 | 13-15 | 15-17 | 17-19 | 19-21 | 21-23 | 23-25 |
| Площадь, га | 3 | 4 | 3 | 10 | 20 | 30 | 30 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 6 | Урожайность, ц/га | 8-10 | 10-12 | 12-14 | 14-16 | 16-18 | 18-20 | 20-22 |
| Площадь, га | 8 | 5 | 7 | 9 | 11 | 29 | 31 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 7 | Урожайность, ц/га | 9-11 | 11-13 | 13-15 | 15-17 | 17-19 | 19-21 | 21-23 |
| Площадь, га | 8 | 8 | 9 | 13 | 21 | 29 | 12 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 8 | Урожайность, ц/га | 10-12 | 12-14 | 14-16 | 16-18 | 18-20 | 20-22 | 22-24 |
| Площадь, га | 4 | 9 | 14 | 17 | 25 | 20 | 11 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 9 | Урожайность, ц/га | 11-13 | 13-15 | 15-17 | 17-19 | 19-21 | 21-23 | 23-25 |
| Площадь, га | 3 | 2 | 8 | 14 | 20 | 28 | 25 |

**Задание 2.** Приводятся данные о количестве внесенных удобрений в центнерах (Х) и урожае сахарной свеклы с 1 га посева в тоннах (У) в хозяйствах района за 10 лет. Необходимо: 1) вычислить коэффициент корреляции; 2) найти выборочное уравнение регрессии У на Х; 3) нанести на чертеж исходные данные и построить полученную прямую регрессии.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | Х | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 | 8 | 9 |
| У | 18 | 20 | 22 | 24 | 30 | 30 | 32 | 36 | 38 | 50 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | Х | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 |
| У | 19 | 22 | 26 | 28 | 30 | 35 | 40 | 48 | 50 | 52 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 3 | Х | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 |
| У | 5 | 9 | 10 | 11 | 17 | 20 | 22 | 27 | 31 | 38 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 4 | Х | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 |
| У | 14 | 18 | 20 | 22 | 23 | 24 | 28 | 29 | 33 | 39 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 5 | Х | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 9 |
| У | 20 | 20 | 22 | 23 | 24 | 27 | 28 | 29 | 33 | 44 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 6 | Х | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 | 8 | 9 |
| У | 10 | 9 | 12 | 15 | 20 | 24 | 28 | 30 | 33 | 39 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 7 | Х | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 8 | 9 | 10 |
| У | 12 | 20 | 23 | 21 | 24 | 25 | 28 | 30 | 33 | 44 |
| 8 | Х | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 7 | 7 | 8 |
| У | 12 | 18 | 20 | 22 | 23 | 24 | 28 | 29 | 33 | 41 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 9 | Х | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 |
| У | 19 | 18 | 20 | 25 | 26 | 28 | 30 | 29 | 35 | 40 |

**Контрольные вопросы**

1. По значению коэффициента корреляции из 2 задачи сделайте вывод о характере зависимости количества внесенных удобрений в центнерах (Х) и урожая сахарной свеклы с 1 га посева.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования. – 6-е. изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. – 320 с.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1987, 1998.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т.1. – СПб.: Мифрил, 1996.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т.2. – СПб.: Мифрил, 1996.
5. Буникович Е.А., Булычев В.А. Основы статистики и вероятности. – М.: Дрофа 2008. 286с.
6. Бродский Я.С. Статистика. Вероятность. Комбинаторика. – М.: Оникс. 2008. 544с.
7. Гмурман В.М. Теория вероятностей математическая статистика. – М.: Высшее образование. 2006. 479с.
8. Гмурман В.М. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики. – М.: Высшее образование. 2008. 399с.
9. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1986.

**Интернет-ресурсы:**

1. <http://siblec.ru> – Справочник по высшей математике.
2. <http://matclub.ru> – Высшая математика, лекции, курсовые. примеры решения задач, интегралы и производные, дифференцирование, производная и первообразная, электронные учебники.
3. [www.newlibrary.ru](http://www.newlibrary.ru) – Новая электронная библиотека.
4. [www.mathnet.ru](http://www.mathnet.ru) – Общероссийский математический портал.
5. [www.edu/ru](http://www.edu/ru) - Федеральный портал российского образования.
6. [www.matburo.ru](http://www.matburo.ru) – Матбюро: решение задач по высшей математике.