МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Сибирский государственный университет геосистем и технологий»

(«СГУГиТ»)

Кафедра высшей математики

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ «ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ»

учебно-методическое пособие для студентов 1 курса, обучающихся по всем направлению подготовки бакалавров в СГУГиТ

Составитель: доцент кафедры высшей математики

Мартынов Геннадий Павлович

Новосибирск

2017

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГЕОСИСТЕМ И ТЕХНОЛОГИЙ
(«СГУГиТ»)**

Г.П. Мартынов

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

**Учебно-методическое пособие
для студентов 1 курса, обучающихся по всем
направлениям подготовки бакалавров в СГУГиТ**

**Новосибирск
2017**

УДК 519.6
М294

Рецензенты: кандидат физико–математических наук, доцент НГТУ
В.В. Комиссаров
кандидат технических наук, доцент СГУГиТ *С.С. Янкелевич*

Мартынов, Г.П.
М294 Векторная алгебра в примерах и задачах [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / Г.П. Мартынов.– Новосибирск: СГУГиТ, 2017. – 39 с.

Учебно-методическое пособие составлено доцентом кафедры высшей математики СГУГиТ Г.П. Мартыновым и предназначено для студентов 1 курса, обучающихся по всем направлениям подготовки бакалавров в СГУГиТ. Пособие содержит краткую теорию (определения, формулы и теоремы) раздела «Векторная алгебра» дисциплины «Математика», примеры решения типовых задач, типовые задания по 30 вариантам, вопросы для самоконтроля и примерный вариант контрольных заданий по теме «Элементы векторной алгебры», а также библиографический список рекомендуемой литературы. Данное пособие может быть использовано как часть фонда оценочных средств по дисциплине «Математика».

УДК 519.6

© Мартынов Г.П., 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Векторы. Основные определения, свойства и теоремы…….4
1.1. Векторы. Линейные операции над векторами…….4
1.2. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов…….6
1.3. Базис на плоскости (в R^2). Разложение по базису……..7
1.4. Разновидности базиса на плоскости……..……8
1.5. Базис в пространстве (в R^3). Разложение по базису…….....9
1.6. Разновидности базиса в пространстве…..…….....10
1.7. Скалярное произведение двух векторов и его свойства…….12
1.8. Проекция вектора……..……12
1.9. Векторное произведение двух векторов и его свойства……14
1.10. Смешанное произведение трёх векторов и его свойства…….....15
2. Примеры решения типовых задач……..16
3. Типовые задания по теме «Элементы векторной алгебры»…….26
4. Вопросы для самоконтроля……37
5. Примерный вариант контрольных заданий по теме «Элементы векторной алгебры»…….38

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ……...38

1. Векторы. Основные определения, свойства и теоремы
1. 1. Векторы. Линейные операции над векторами

Определение 1.1. Вектором $\bar{a}$ в трехмерном пространстве (в R^3) называется направленный отрезок заданной длины $|\bar{a}|$. Длина вектора $|\bar{a}|$ иногда называется модулем вектора $\bar{a}$ (рис. 1.1). У вектора $\overline{AB}$ точка А называется началом вектора $\overline{AB}$, точка В – его концом.

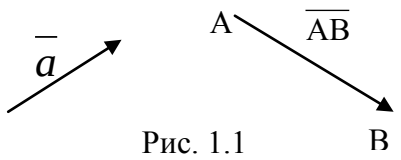

Рис. 1.1

Определение 1.2. Вектор нулевой длины называется нуль–вектором и обозначается $\bar{O}$ или просто 0.

Определение 1.3. Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются (рис. 1.2) коллинеарными в R^3 $(\bar{a} \parallel \bar{b})$, если они расположены на параллельных прямых или на одной прямой.

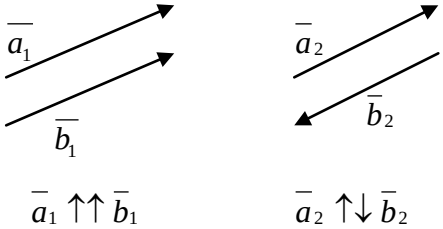

Рис. 1.2.

Определение 1.4. Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются равными $(\bar{a} = \bar{b})$, если $|\bar{a}| = |\bar{b}|$ и $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$ ($\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны и направлены в одну сторону).

Следствие. Вектор $\bar{a}$ можно параллельным переносом переносить началом в любую точку (рис. 1.3).

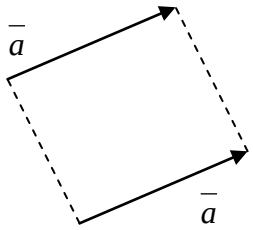

Рис. 1.3

Определение 1.5. ***Произведением вектора*** $\bar{a}$ на ***число*** λ называется ***вектор*** $\bar{b} = \lambda \cdot \bar{a}$ (рис. 1.4), такой, что:

1) $|\bar{b}| = |\lambda| \cdot |\bar{a}|$;
2) $\bar{b} \parallel \bar{a}$;
3) $\bar{b} \uparrow\uparrow \bar{a}$, если $\lambda > 0$, и
   $\bar{b} \downarrow\uparrow \bar{a}$, если $\lambda < 0$.

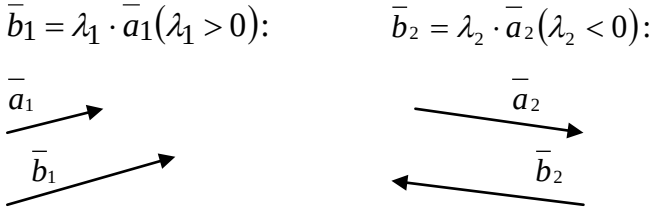

Рис. 1.4.

Замечание. Операция умножения вектора на число обладает следующим свойством: $\lambda \cdot (\beta \cdot \bar{a}) = (\lambda \cdot \beta) \cdot \bar{a}$.

Теорема 1.1 (критерий коллинеарности векторов). Пусть $\bar{a} \neq 0$. Если вектор $\bar{b}$ коллинеарен вектору $\bar{a}$ $(\bar{b} \parallel \bar{a})$, то существует такое число λ, что $\bar{b} = \lambda \cdot \bar{a}$.

Определение 1.6. Пусть задан вектор $\bar{a}$, тогда вектор $\bar{a}_O = \frac{1}{|\bar{a}|} \cdot \bar{a}$ называется ортом вектора $\bar{a}$ (рис. 1.5) (заметим, что $|\bar{a}_O| = 1$).

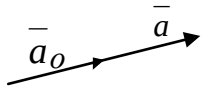

Рис. 1.5

Определение 1.7. Пусть заданы векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется такой вектор $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$, который строится по «правилу треугольника» (рис. 1.6).

Замечание 1. Сумму векторов можно ввести и по «правилу параллелограмма» (рис. 1.7).

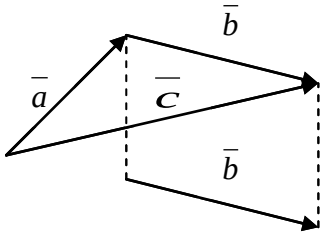

Рис. 1.6

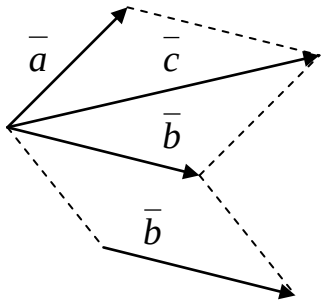

Рис. 1.7

Замечание 2. Операция сложения векторов обладает следующими свойствами:

1) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ (коммутативность);
2) $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$ (ассоциативность);
3) $\lambda \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = \lambda \cdot \bar{a} + \lambda \cdot \bar{b}$ (дистрибутивность);
4) $(\lambda + \mu) \cdot \bar{a} = \lambda \cdot \bar{a} + \mu \cdot \bar{a}$.

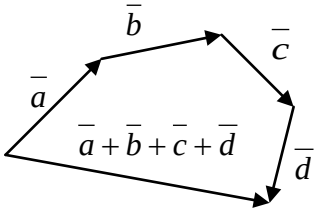

Рис. 1.8

Замечание 3. При сложении более чем двух векторов можно следовать следующему правилу: векторы выстраиваем в цепочку, и вектор суммы начинается из начала первого вектора и идёт в конец последнего (рис. 1.8).

Определение 1.8. Вектор $(-1) \cdot \bar{a}$ называется (рис. 1.9) противоположным к вектору $\bar{a}$ и обозначается $-\bar{a}$.

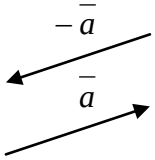

Рис. 1.9

Определение 1.9. Разностью векторов $\bar{b}$ и $\bar{a}$ называется вектор $\bar{c} = \bar{b} + (-\bar{a})$ (рис. 1.10).

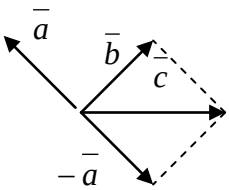

Рис. 1.10

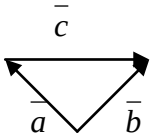

Рис. 1.11

Замечание. Разность $\bar{b} - \bar{a}$ можно определить и так: $\bar{b} - \bar{a} = \bar{c}$, если $\bar{a} + \bar{c} = \bar{b}$ (рис. 1.11).

1.2. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов

Определение 1.10. Упорядоченный набор из n векторов: $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, …, $\overline{a}_n$ – называется системой векторов $\{\overline{a}_1;\overline{a}_2;\ldots;\overline{a}_n\}$.

Определение 1.11. Пусть $\{\overline{a}_1;\overline{a}_2;\ldots;\overline{a}_n\}$ – система векторов; λ_1, λ_2, …, λ_n – числа. Тогда вектор $\overline{L}=\lambda_1\cdot\overline{a}_1+\lambda_2\cdot\overline{a}_2+\ldots+\lambda_n\cdot\overline{a}_n$ называется линейной комбинацией системы векторов $\{\overline{a}_1;\overline{a}_2;\ldots;\overline{a}_n\}$.

Определение 1.12. Система векторов $\{\overline{a}_1;\overline{a}_2;\ldots;\overline{a}_n\}$ называется линейно зависимой системой, если найдутся такие числа λ_1, λ_2, …, λ_n (причём $\lambda_1^2+\lambda_2^2+\ldots+\lambda_n^2\neq 0$), что

$$\overline{L}=\lambda_1\cdot\overline{a}_1+\lambda_2\cdot\overline{a}_2+\ldots+\lambda_n\cdot\overline{a}_n=0 \qquad (1.1)$$

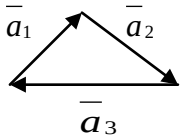

Рис. 1.12

Пример 1.1. Вектор–стороны треугольника образуют линейно зависимую систему векторов. Используя рис. 1.12, имеем: $L=\overline{a}_1+\overline{a}_2+\overline{a}_3=0$ (здесь $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$).

Теорема 1.2. Если система векторов $\{\overline{a}_1;\overline{a}_2;\ldots;\overline{a}_n\}$ линейно зависима, то хотя бы один из векторов линейно выражаются через оставшиеся векторы. И обратно: если в системе $\{\overline{a}_1;\overline{a}_2;\ldots;\overline{a}_n\}$ хотя бы один вектор линейно выражается через оставшиеся векторы, то система $\{\overline{a}_1;\overline{a}_2;\ldots;\overline{a}_n\}$ – линейно зависима.

Определение 1.13. Система векторов $\{\overline{a}_1;\overline{a}_2;\ldots;\overline{a}_n\}$ – называется линейно независимой, если эквивалентны два равенства:

$$\lambda_1\cdot\overline{a}_1+\lambda_2\cdot\overline{a}_2+\ldots+\lambda_n\cdot\overline{a}_n=0\Leftrightarrow\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$$

Данное определение 1.13 очевидно аналогично следующему.

Определение 1.14. Система $\{\overline{a}_1;\overline{a}_2;\ldots;\overline{a}_n\}$ – линейно независима, если ни один из этих векторов линейно не выражается через оставшиеся векторы.

Теорема 1.3. Пусть даны два ненулевых вектора $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$. Если $\overline{a}_1\parallel\overline{a_2}$, то система $\{\overline{a}_1;\overline{a}_2\}$ – линейно зависима.

Следствие. Пусть даны два неколлинеарных вектора $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$. Тогда система $\{\overline{a}_1;\overline{a}_2\}$ – линейно независима.

Теорема 1.4. Линейная зависимость системы $\{\bar{a}_1;\bar{a}_2;\bar{a}_3\}$ равносильна компланарности этих векторов $\bar{a}_1;\bar{a}_2;\bar{a}_3$ (то есть равносильна тому, что три этих вектора лежат на одной плоскости либо параллельны одной плоскости).

1.3. Базис на плоскости (в R^2). Разложение по базису

Определение 1.15. Линейно независимая система из двух векторов называется базисной системой векторов (или просто базисом) на плоскости, проходящей через эти два вектора.

Замечание. По следствию из теоремы 1.3 базисом на плоскости является система из двух неколлинеарных векторов.

Теорема 1.5. Любой вектор на плоскости может быть представлен как линейная комбинация (1.2) базисной системы векторов этой плоскости. И это представление единственно:

$$\bar{a} = \lambda_1 \cdot \bar{e}_1 + \lambda_2 \cdot \bar{e}_2 \qquad (1.2)$$

Определение 1.16. В разложении (1.2) числа λ_1, λ_2 называются координатами вектора $\bar{a}$ в базисе $\{\bar{e}_1; \bar{e}_2\}$, и вектор записывается так: $\bar{a} = \{\lambda_1;\lambda_2\}$.

Замечание. Если на некоторой плоскости фиксирован базис $\{\bar{e}_1; \bar{e}_2\}$, а векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ разлагаются по этому базису в виде:

$$\bar{a} = \lambda_1 \cdot \bar{e}_1 + \lambda_2 \cdot \bar{e}_2, \qquad \bar{b} = \mu_1 \cdot \bar{e}_1 + \mu_2 \cdot \bar{e}_2 \qquad (1.3)$$

Тогда

1) $$\bar{a} + \bar{b} = \lambda_1 \cdot \bar{e}_1 + \lambda_2 \cdot \bar{e}_2 + \mu_1 \cdot \bar{e}_1 + \mu_2 \cdot \bar{e}_2 = (\lambda_1 + \mu_1) \cdot \bar{e}_1 + (\lambda_2 + \mu_2) \cdot \bar{e}_2 \qquad (1.4)$$

$$\Rightarrow \qquad \{\lambda_1; \lambda_2\} + \{\mu_1; \mu_2\} = \{\lambda_1 + \mu_1; \lambda_2 + \mu_2\} \qquad (1.5)$$

(при сложении векторов их одноименные координаты складываются);

2) $$\beta \cdot \bar{a} = \beta \cdot (\lambda_1 \cdot \bar{e}_1 + \lambda_2 \cdot \bar{e}_2) = (\lambda_1 \cdot \beta) \cdot \bar{e}_1 + (\lambda_2 \cdot \beta) \cdot \bar{e}_2, \qquad (1.6)$$

$$\Rightarrow \qquad \beta \cdot \{\lambda_1; \lambda_2\} = \{\lambda_1 \cdot \beta; \lambda_2 \cdot \beta\} \qquad (1.7)$$

(при умножении вектора $\bar{a}$ на число β все его координаты умножаются на это число β)

Теорема 1.6. Если $\bar{a} = \{ \lambda_1 ; \lambda_2 \}$, $\bar{b} = \{ \mu_1 ; \mu_2 \}$ в базисе $\{ \bar{e}_1 ; \bar{e}_2 \}$**,** то

$$\bar{a} \,||\, \bar{b} \Leftrightarrow \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{\lambda_2}{\mu_2} \qquad (1.8)$$

Замечание. Соотношение (1.8) означает, что коллинеарные векторы имеют пропорциональные координаты.

1.4. Разновидности базиса на плоскости (в $\mathbf{R}^2$)

Определение 1.17. Пусть даны два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Совместим их начала в одной точке (рис. 1.13). Угол φ минимального поворота вектора $\bar{a}$ до совмещения с направлением вектора $\bar{b}$ называется углом между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и обозначается: $\varphi = (\bar{a} \wedge \bar{b})$**.**

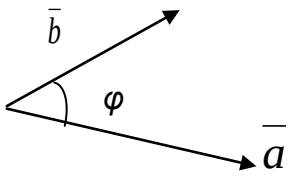

Рис.1.13

Определение 1.18. Вектор $\bar{a}$ называется перпендикулярным вектору $\bar{b}$ ($\bar{a} \perp \bar{b}$), если угол **φ** между ними равен 90^0.

Определение 1.19. Пусть $\{ \bar{e}_1 ; \bar{e}_2 \}$ – базис на плоскости. Если $\bar{e}_1 \perp \bar{e}_2$, то $\{ \bar{e}_1 ; \bar{e}_2 \}$ называется ортогональным базисом на плоскости.

Определение 1.20. Пусть $\{ \bar{e}_1 ; \bar{e}_2 \}$ – ортогональный базис на плоскости. Если $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = 1$, то $\{ \bar{e}_1 ; \bar{e}_2 \}$ называется ортонормированным базисом на плоскости.

Определение 1.21. Ортонормированный базис на плоскости бывает «левым» и «правым» (рис. 1.14).

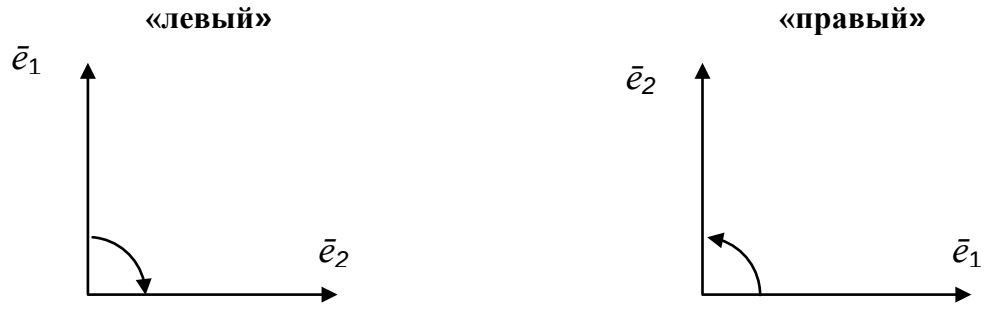

Рис. 1.14

Пояснение к рис. 1.14. В первом («левом») случае движение от первого вектора $\bar{e}_1$ ко второму $\bar{e}_2$ идёт по часовой стрелке, а во втором («правом») – против часовой стрелки.

Определение 1.22. «Правый» ортонормированный базис на плоскости имеет специальное обозначение $\{\bar{i}, \bar{j}\}$.

Замечание. На основе правого ортонормированного базиса на плоскости строится так называемая декартовая прямоугольная система координат 0*xy* (рис. 1.15).
На основе левого ортонормированного базиса строится «геодезическая» система координат О*yx* (рис. 1.15).

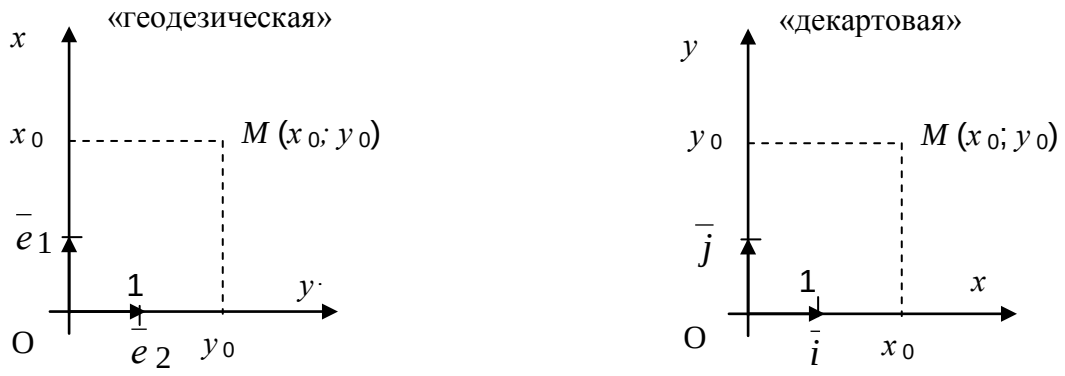

Рис. 1.15

1.5. Базис в пространстве (в R^3). Разложение по базису

Определение 1.23. Линейно независимая система из трех векторов называется базисной системой векторов (или просто базисом) в пространстве.

Замечание. Согласно теореме 1.4 базисом в пространстве является система из трех некомпланарных векторов.

Теорема 1.7. Любой четвертый вектор $\bar{d}$ пространства R^3 единственным образом разлагается по базису $\{\bar{e}_1; \bar{e}_2; \bar{e}_3\}$ этого пространства в виде:

$$\bar{d} = d_1 \cdot \bar{e}_1 + d_2 \cdot \bar{e}_2 + d_3 \cdot \bar{e}_3 \qquad (1.9)$$

Теорема 1.7 «аналогична» теореме 1.5.

Определение 1.24. В разложении (1.9) числа d_1, d_2, d_3 называются координатами вектора $\bar{d}$ в базисе $\{\bar{e}_1; \bar{e}_2; \bar{e}_3\}$. А записывается это так:

$$\bar{d} = \{d_1; d_2; d_3\} \qquad (1.10)$$

Замечание. Если в пространстве фиксирован базис $\{ \bar{e}_1 ; \bar{e}_2 ; \bar{e}_3 \}$, и векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ разлагаются по этому базису в виде:

$$\bar{a} = a_1 \cdot \bar{e}_1 + a_2 \cdot \bar{e}_2 + a_3 \cdot \bar{e}_3 , \qquad (1.11)$$

$$\bar{b} = b_1 \cdot \bar{e}_1 + b_2 \cdot \bar{e}_2 + b_3 \cdot \bar{e}_3 , \qquad (1.12)$$

то аналогично (1.5) и (1.7) можно получить:

$$\bar{a} + \bar{b} = \{ a_1 ; a_2 ; a_3 \} + \{ b_1 ; b_2 ; b_3 \} = \{ a_1 + b_1 ; a_2 + b_2 ; a_3 + b_3 \} \qquad (1.13)$$

$$\beta \cdot \bar{a} = \beta \cdot \{ a_1 ; a_2 ; a_3 \} = \{ a_1 \cdot \beta ; a_2 \cdot \beta ; a_3 \cdot \beta \} \qquad (1.14)$$

Теорема 1.8. Если $\bar{a} = \{ a_1 ; a_2 ; a_3 \}$, $\bar{b} = \{ b_1 ; b_2 ; b_3 \}$ в базисе $\{ \bar{e}_1 ; \bar{e}_2 ; \bar{e}_3 \}$, то

$$\bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \qquad (1.15)$$

1.6. Разновидности базиса в пространстве R^3

Определение 1.25. Пусть $\{ \bar{e}_1 ; \bar{e}_2 ; \bar{e}_3 \}$ – базис в пространстве. Если $\bar{e}_1 \perp \bar{e}_2$, $\bar{e}_1 \perp \bar{e}_3$, $\bar{e}_2 \perp \bar{e}_3$, то $\{ \bar{e}_1 ; \bar{e}_2 ; \bar{e}_3 \}$ называется ортогональным базисом в пространстве.

Определение 1.26. Пусть $\{ \bar{e}_1 ; \bar{e}_2 ; \bar{e}_3 \}$ – ортогональный базис в пространстве. Если $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = |\bar{e}_3| = 1$, то $\{ \bar{e}_1 ; \bar{e}_2 ; \bar{e}_3 \}$ называется ортонормированным базисом в пространстве.

Определение 1.27. Базис в пространстве может быть «левой тройкой векторов» или «правой тройкой векторов» (рис. 1.16).

Пояснения: если смотреть из конца третьего вектора на плоскость, образованную первым и вторым вектором, то направление минимального вращения от 1-го вектора ко 2-ому для «левой тройки» будет по часовой стрелке, а для «правой тройки» – против часовой стрелки.

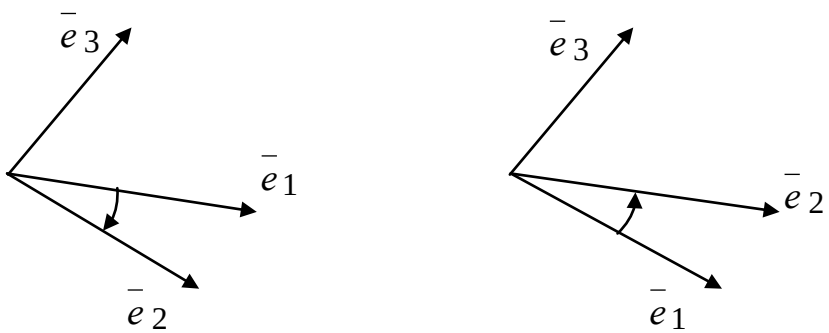

Рис. 1.16

Определение 1.28. Правый ортонормированный базис в пространстве имеет специальное обозначение $\{\bar{i};\bar{j};\bar{k}\}$.

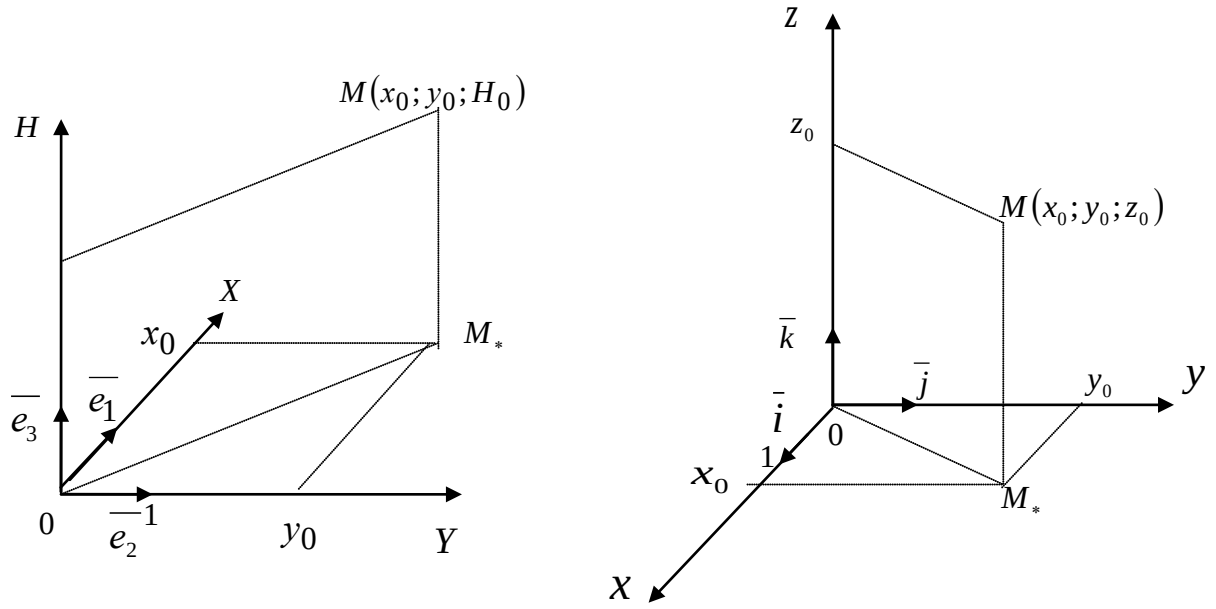

Рис.1.17

Замечание. На основе правого ортонормированного базиса $\{\bar{i};\bar{j};\bar{k}\}$ в пространстве строится так называемая декартовая прямоугольная система координат O*xyz* (рис. 1.17, справа). А на основе «левого» ортонормированного базиса строится «геодезическая» система координат O*YXH* (рис. 1.17, слева).

1.7. Скалярное произведение двух векторов и его свойства

Определение 1.29. Пусть даны два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$, причем $\varphi = (\bar{a} \wedge \bar{b})$ – угол между ними. Тогда **скалярным произведением** вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется **число**:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = (\bar{a},\bar{b}) = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi \qquad (1.16)$$

Свойства скалярного произведения

1. $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$ (коммутативность) (1.17)
2. $\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|^2 \Leftrightarrow |\bar{a}|=\sqrt{\bar{a}\cdot\bar{a}}$ (1.18)
3. $\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$ (дистрибутивность) (1.19)
4. $\bar{a}\cdot(\lambda\bar{b})=(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b}=\lambda\cdot(\bar{a},\bar{b})$ (линейность) (1.20)
5. $\bar{a}\cdot\bar{b}=0 \Leftrightarrow \bar{a}=0$ *или* $\bar{b}=0$ *или* $\bar{a}\perp\bar{b}$ (1.21)
6. Скалярное произведение базисных векторов:

$$\bar{i}\cdot\bar{j}=\bar{j}\cdot\bar{i}=\bar{i}\cdot\bar{k}=\bar{k}\cdot\bar{i}=\bar{j}\cdot\bar{k}=\bar{k}\cdot\bar{j}=0 \quad \bar{i}\cdot\bar{i}=\bar{j}\cdot\bar{j}=\bar{k}\cdot\bar{k}=1 \tag{1.22}$$

Теорема 1.9 (скалярное произведение в координатной форме).
Пусть $\bar{a}$ = { a_1 ; a_2 ; a_3 }, $\bar{b}$ = { b_1 ; b_2 ; b_3 } в базисе $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$. Тогда:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3 \tag{1.23}$$

Следствия

1) Если $\bar{a}$ = { a_1 ; a_2 ; a_3 } в базисе $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$, то модуль вектора через его координаты выражается так:

$$|\bar{a}|=\sqrt{\bar{a}\cdot\bar{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \tag{1.24}$$

2) Если в базисе $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ известны координаты векторов: $\bar{a}$ = { a_1; a_2 ; a_3 }, $\bar{b}$ = { b_1 ; b_2 ; b_3 }, то угол φ между $\bar{a}$ и $\bar{b}$ находится так:

$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}\Leftrightarrow \varphi=\arccos\left(\frac{a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}\right) \tag{1.25}$$

1.8. Проекция вектора в $\mathbf{R}^3$

Определение 1.30. Пусть задан вектор $\overline{AB}$ в базисе $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ и ось l (прямая с заданным на ней направлением, началом отсчета и единицей длины). Рассмотрим вектор $\overline{A_1B_1}$ (рис. 1.18). Проекцией $Пр_l\,\overline{AB}$ вектора $\overline{AB}$ на ось l называется **число**, равное:
1) длине вектора $\overline{A_1B_1}$, если направления оси l и вектора $\overline{A_1B_1}$ совпадают;
2) минус длине вектора $\overline{A_1B_1}$, если направления оси l и вектора $\overline{A_1B_1}$ противоположны.

Определение 1.31. Ортом оси l называется вектор $\bar{l}_o$, направление которого совпадает с направлением оси l и длина которого $|\bar{l}_o|$=1. (рис. 1.19, 1.20). Вектор $\bar{l}_o$ обладает следующими свойствами: если ось l образует с осями координат углы: α (с осью Ox), β (с осью Oy), γ (с осью Oz), то можно показать, что:

$$\bar{l}_o=\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\} \tag{1.26}$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \tag{1.27}$$

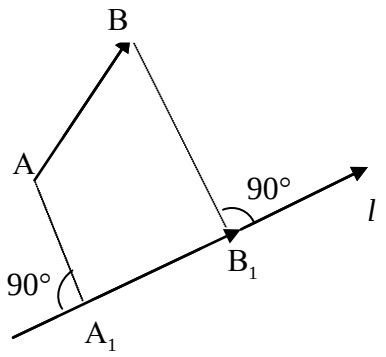

Рис.1.18

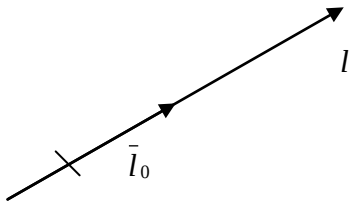

Рис.1.19

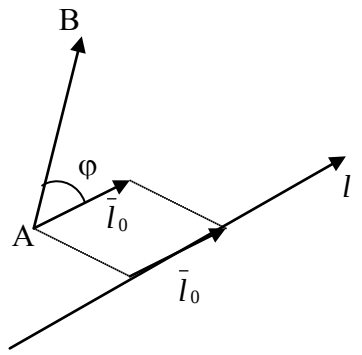

Рис.1.20

$$Пр_l\,\overline{AB}=\left|\overline{AB}\right|\cdot\cos\,(\overline{AB}\,\wedge\,\bar{l}_o) \qquad (1.28)$$

$$Пр_l\,\overline{AB}=\overline{AB}\cdot\bar{l}_o \qquad (1.29)$$

Если известны координаты вектора $\overline{AB}=\{x;y;z\}$, то, учитывая (1.26), (1.29), (1.23), имеем:

$$Пр_l\,\overline{AB}=x\cdot\cos\,\alpha+y\cdot\cos\,\beta+z\cdot\cos\,\gamma \qquad (1.30)$$

Замечание. Если требуется найти проекцию одного вектора $\bar{a}=\{x;y;z\}$ на направление другого вектора $\bar{b}$, то сначала найдём орт вектора $\bar{b}$ по правилу: $\bar{b}_o=\dfrac{\bar{b}}{\left|\bar{b}\right|}=\{\cos\,\alpha;\cos\,\beta;\cos\,\gamma\}$, а затем воспользуемся формулой (1.30):

$$Пр_{\bar{b}}\,\bar{a}=x\cdot\cos\,\alpha+y\cdot\cos\,\beta+z\cdot\cos\,\gamma \qquad (1.31)$$

Либо просто через скалярное произведение (в случае, если координаты векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не заданы, но известны, например их длины и угол между ними):

$$Пр_{\bar{b}}\,\bar{a}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\left|\bar{b}\right|} \qquad (1.32)$$

1.9. Векторное произведение двух векторов и его свойства

Определение 1.32. Пусть даны два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$, причём $\varphi=(\bar{a}\,\wedge\,\bar{b})$ – угол между ними. **Векторным произведением** вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ **называется** такой **вектор** $\bar{d}=\bar{a}\times\bar{b}=\left[\bar{a},\bar{b}\right]$, который удовлетворяет трём условиям:

1. $\bar{d} \perp \bar{a}, \bar{d} \perp \bar{b}$;
2. три вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}$ в этом порядке образуют «правую тройку» векторов (смотри определение 1.27);
3. длина вектора $\bar{d}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах: $\left|\bar{d}\right| = \left|\bar{a}\right| \cdot \left|\bar{b}\right| \cdot \sin\varphi$ (рис. 1.21).

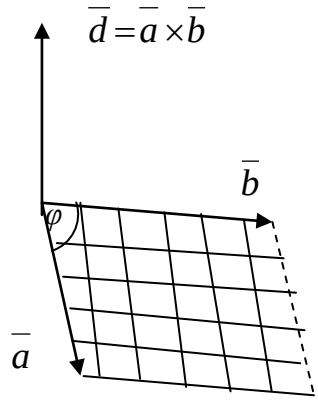

Рис. 1.21

Свойства векторного произведения

1. Геометрический смысл модуля векторного произведения – площадь параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах (рис. 1.21):

$$\left|\bar{a} \times \bar{b}\right| = \left|\bar{d}\right| = \left|\bar{a}\right| \cdot \left|\bar{b}\right| \cdot \sin\varphi = S \qquad (1.33)$$

2. $\bar{b} \times \bar{a} = -\bar{a} \times \bar{b}$ (антикоммутативность) (1.34)

3. $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$ (дистрибутивность) (1.35)

4. $(\lambda \cdot \bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda \cdot \bar{b}) = \lambda \cdot \left[\bar{a}, \bar{b}\right]$ (линейность) (1.36)

5. $\bar{a} \times \bar{b} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} = 0$ *или* $\bar{b} = 0$, *или* $\bar{a} \,\|\, \bar{b}$ (1.37)

6. Векторные произведения базисных векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$:

$$\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = 0,\ \bar{i} \times \bar{j} = \bar{k},\ \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i},\ \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j} \qquad (1.38)$$

Теорема 1.9 (векторное произведение в координатной форме).
Пусть $\bar{a} = \{ a_1 ; a_2 ; a_3 \}$, $\bar{b} = \{ b_1 ; b_2 ; b_3 \}$ в базисе $\left\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\right\}$. Тогда

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{d} = det \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \qquad (1.39)$$

1.10. Смешанное произведение трёх векторов и его свойства

Определение 1.33. Пусть даны три вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Смешанным произведением этих векторов называется число $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$, равное:

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} \qquad (1.40)$$

Свойства смешанного произведения

1. $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$ (1.41)

2. Геометрический смысл модуля смешанного произведения – объём параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ или шесть объёмов треугольной пирамиды (рис. 1.22):

$$\left|\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right| = 6\cdot V_{пир} = V_{параллелеп} \qquad (1.42)$$

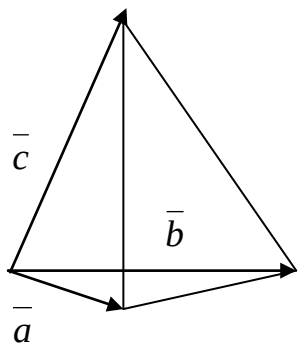

Рис. 1.22

3. $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = 0 \Leftrightarrow$ векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ компланарны, то есть лежат в одной плоскости (или параллельны одной плоскости).

4. Если $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} \neq 0$, то векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ не компланарны, а поэтому по теореме 1.4 $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ являются базисом в пространстве R^3.

Теорема 1.10 (смешанное произведение в координатной форме).
Пусть известны координаты трёх векторов $\bar{a},\overline{cb},\ \bar{}$ в базисе $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$:

$$\bar{a} = \{a_1; a_2; a_3\},\ \bar{b} = \{b_1; b_2; b_3\},\ \bar{c} = \{c_1; c_2; c_3\},$$
,

тогда смешанное произведение $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$ находится так:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \qquad (1.43)$$

Либо, используя свойства определителя, получаем:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \qquad (1.44)$$

2. Примеры решения типовых задач

Задача 1. Даны четыре вектора: $\bar{a}=\{1;1;2\}$, $\bar{b}=\{2;\ -1;0\}$, $\bar{c}=\{-1;1;1\}$ и $\bar{d}=\{6;-1;3\}$ в базисе $\{\bar{i};\bar{j};\bar{k}\}$. Показать, что векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ тоже образуют базис в пространстве R^3, и найти координаты вектора $\bar{d}$ в базисе $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$.

Решение

В соответствии с 4 свойством смешанного произведения: если $\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\neq 0$, то векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют базис в пространстве R^3, поэтому в соответствии с (1.44) вычислим смешанное произведение этих векторов:

$$\Delta=\bar{a}\bar{b}\bar{c}=det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}=det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

= вычисляем определитель разложением по 3–ей строке, т.к. в ней есть нулевой элемент (можно разложить определитель и по 2–ому столбцу) =

$$=\ 2\cdot(-1)^{3+1}\cdot det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}+1\cdot(-1)^{3+3}\cdot det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=$$

$$=2\cdot(2-1)+1\cdot(-1-2)=2-3=-1\neq 0 =\succ$$

$=\succ$ в соответствии с 4 свойством смешанного произведения векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют базис в пространстве, а поэтому по теореме 1.7 любой четвертый вектор $\bar{d}$ единственным образом разлагается по базису $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ в виде:

$$\bar{d}=d_1\cdot\bar{a}+d_2\cdot\bar{b}+d_3\cdot\bar{c}, \qquad (2.1)$$

где d_1, d_2, d_3 – неизвестные пока координаты вектора $\bar{d}$ в новом базисе $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

Из (2.1) в соответствии с (1.13) и (1.14) имеем:

$$\{6;-1;3\}=d_1\cdot\{1;1;2\}+d_2\cdot\{2;-1;0\}+d_3\cdot\{-1;1;1\},$$

$$\{6;-1;3\}=\{d_1;d_1;2d_1\}+\{2d_2;-d_2;0\}+\{-d_3;d_3;d_3\},$$

$$\{6;-1;3\}=\{d_1+2d_2-d_3;\ \ d_1-d_2+d_3;\ \ 2d_1+d_3\} \qquad (2.2)$$

Получили равенство (2.2) между двумя векторами (один – слева, другой – справа). Следовательно, из (2.2) имеем равенство между координатами этих векторов:

$$\left\{\begin{array}{l} d_1+2d_2-d_3=6; \\ d_1-d_2+d_3=-1; \\ \quad 2d_1+d_3=3; \end{array}\right|$$

Решая эту систему (например, по правилу Крамера), найдем новые координаты d_1, d_2, d_3 вектора $\overline{d}$ в базисе $\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c}$. Имеем:

$$\Delta=\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}=(\textit{уже вычисляли})=-1\neq 0.$$

Так как определитель Δ основной матрицы системы уравнений отличен от нуля, значит, по теореме Крамера данная система имеет единственное решение, которое можно найти, например, по формулам:

$$d_1=\Delta_1/\Delta,\quad d_2=\Delta_2/\Delta,\quad d_3=\Delta_3/\Delta,$$

где

$$\Delta_1=det\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}=(\textit{проще разложить, например, по } 3-\textit{ей строке})=$$

$$=3\cdot(-1)^{3+1}\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}+1\cdot(-1)^{3+3}\cdot\det\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=$$

$$=3\cdot(2-1)+1\cdot(-6+2)=3-4=-1;$$

$$\Delta_2=det\begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}=(\textit{разлагаем по } 2-\textit{ой строке})=$$

$$= 1\cdot(-1)^{2+1}\cdot\det\begin{pmatrix}6 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix} - 1\cdot(-1)^{2+2}\cdot\det\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix} +$$

$$+1\cdot(-1)^{2+3}\cdot\det\begin{pmatrix}1 & 6\\ 2 & 3\end{pmatrix} = -9-3+9=-3;$$

$$\Delta_3 = det\begin{pmatrix}1 & 2 & 6\\ 1 & -1 & -1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix} = (\textit{проще разложить, например, по } 3-\textit{ей строке}) =$$

$$= 2\cdot(-1)^{3+1}\cdot\det\begin{pmatrix}2 & 6\\ -1 & -1\end{pmatrix} + 3\cdot(-1)^{3+3}\cdot\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix} =$$

$$= 2\cdot(-2+6)+3\cdot(-1-2) = 8-9=-1 =\succ$$

$$\begin{cases} d_1 = \Delta_1/\Delta; \\ d_2 = \Delta_2/\Delta; \\ d_3 = \Delta_3/\Delta; \end{cases} \left| \begin{array}{l} d_1 = 1; \\ d_2 = 3; \\ d_3 = 1; \end{array} \right| \text{ – единственное решение.}$$

Ответ: $\overline{d} = 1\cdot\overline{a} + 3\cdot\overline{b} + 1\cdot\overline{c}$ – искомое разложение вектора $\overline{d}$ в базисе $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$**.**

Задача 2. Даны координаты вершин пирамиды в системе координат Oxyz: $A_1(2;-1;3)$, $A_2(0;-2;4)$, $A_3(1;-1;1)$, $A_4(3;0;2)$. Найти: а) угол α между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; б) площадь S_Δ грани $A_1A_2A_3$; в) объем V пирамиды; г) проекцию вектора A_1A_3 на направление вектора $\overline{A_1A_4}$; д) в треугольнике $\Delta A_1A_2A_3$ найти длины всех сторон и величину каждого угла; е) площадь сечения, проходящего через середину ребра A_2A_3 и вершины A_1, A_4 пирамиды**.**

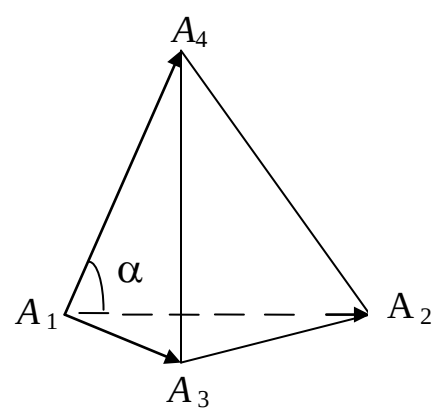

Рис. 2.1

Решение

а) угол α между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_4}$ находится в соответствии с (1.25):

$$\cos\alpha = \frac{\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_4}}{\left|\overline{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overline{A_1A_4}\right|} \qquad (2.\ 3),$$

где $\overline{A_1A_2} = \{x_2 - x_1;\, y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\} = \{0-2;-2-(-1);\ 4-3\} = \{-2;-1;1\}$,

$$\overline{A_1A_4} = \{x_4 - x_1;\ y_4 - y_1;\ z_4 - z_1\} = \{3-2;\, 0-(-1);\, 2-3\} = \{1;1;-1\}.$$

Поэтому

$$\left|\overline{A_1A_2}\right| = \left|\{-2;-1;1\}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6} \approx 2{,}45,$$
$$\left|\overline{A_1A_4}\right| = \left|\{1;1;-1\}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3} \approx 1{,}73.$$

Скалярное произведение по формуле (1.23) находится так:

$$\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_4} = \{-2;-1;1\}\cdot\{1;1;-1\} = -2\cdot 1 - 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) = -4.$$

Тогда, подставляя в (2.3), имеем:

$$\cos\alpha = \frac{-4}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}} \approx \frac{-4}{2{,}45\cdot 1{,}73} \approx -0{,}943,\ \ т.\ е.\ \ \alpha \approx \arccos\,(-0{,}943) \approx 160{,}5^0.$$

б) Площадь S_Δ грани $A_1A_2A_3$ найдем в соответствии с геометрическим смыслом (1.33) векторного произведения: $\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3} = \overline{d}$, $\left|\overline{d}\right| = 2\cdot S_\Delta$, $S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overline{d}\right|$.

где $\overline{A_1A_2} = \{-2;-1;1\}$, $\overline{A_1A_3} = \{1-2;-1-(-1);\ 1-3\} = \{-1;\ 0;-2\}$,

$$\overline{d} = \overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3} = \{-2;\ -1;\ 1\}\times\{-1;\ 0;-2\} = det\begin{pmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \overline{i}\cdot(2-0) - \overline{j}\cdot(4+1) + \overline{k}(0-1) = 2\overline{i} - 5\overline{j} - 1\cdot\overline{k} = \{2;-5;-1\}.$$

Тогда $S_\Delta = 0{,}5\cdot\left|\overline{d}\right| = 0{,}5\cdot\left|\{2;-5;-1\}\right| = 0{,}5\cdot\sqrt{4+25+1} = 0{,}5\cdot\sqrt{30} \approx 2{,}74\ (ед^2)$.

в) Объем V пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ найдем, используя геометрический смысл (1.42) смешанного произведения: $\left|(\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3})\cdot\overline{A_1A_4}\right| = 6V_{пир}$, поэтому:

$$V = \left|\frac{1}{6}\left(\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\right)\cdot\overline{A_1A_4}\right| = \left|\frac{1}{6}\cdot\overline{d}\cdot\overline{A_1A_4}\right| = \left|\frac{1}{6}\cdot\{2;-5;-1\}\cdot\{1;1;-1\}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{6}\cdot(2\cdot1+(-5)\cdot1+(-1)\cdot(-1))\right| = \left|\frac{1}{6}\cdot(2-5+1)\right| = \left|\frac{1}{6}\cdot(-2)\right| = +\frac{1}{3}\approx 0{,}33(ед^3).$$

г) Проекция в соответствии с (1.32): $Пр_{\overline{A_1A_4}}\,\overline{A_1A_3} = \dfrac{\overline{A_1A_3}\cdot\overline{A_1A_4}}{\left|\overline{A_1A_4}\right|}$,

где $\overline{A_1A_3} = \{-1;\ 0;-2\}$, $\overline{A_1A_4} = \{1;1;-1\}$, $\left|\overline{A_1A_4}\right| = \sqrt{3}\approx 1{,}73$,

$\overline{A_1A_3}\cdot\overline{A_1A_4} = \{-1;0;-2\}\cdot\{1;1;-1\} = -1\cdot1+0\cdot1-2\cdot(-1) = -1+0+2 = 1$, *поэтому*

$$Пр_{\overline{A_1A_4}}\,\overline{A_1A_3} = \frac{\overline{A_1A_3}\cdot\overline{A_1A_4}}{\left|\overline{A_1A_4}\right|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0{,}58.$$

д) Рассмотрим (рис. 2.2) $\Delta A_1A_2A_3$: $A_1(2;-1;3)$, $A_2(0;-2;4)$, $A_3(1;-1;1)$,

$\overline{A_1A_3} = \{-1;0;-2\}$, $\overline{A_2A_3} = \{1;\ 1;-3\}$, $\overline{A_1A_2} = \{-2;-1;1\}\Rightarrow$

$\left|\overline{A_1A_3}\right| = \sqrt{(-1)^2+0^2+(-2)^2} = \sqrt{5}\approx 2{,}24$, $\left|\overline{A_2A_3}\right| = \sqrt{1^2+1^2+(-3)^2} = \sqrt{11}\approx 3{,}32$.

$\left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{6}\approx 2{,}45$,

Угол γ_1 образован векторами $\overline{A_1A_3}$ и $\overline{A_1A_2}$, которые выходят из вершины угла γ_1, поэтому

$$\cos\gamma_1 = \frac{\overline{A_1A_3}\cdot\overline{A_1A_2}}{\left|\overline{A_1A_3}\right|\cdot\left|\overline{A_1A_2}\right|} = \frac{2+0-2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}} = 0,$$

то есть $\gamma_1 = \arccos\,(0) = 90^0$.

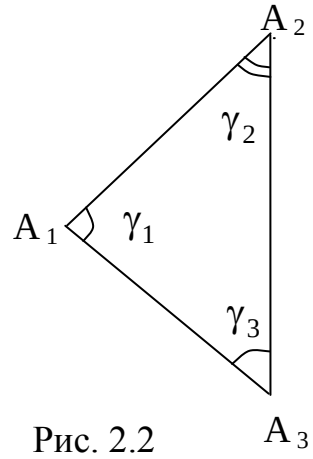

Рис. 2.2

Угол γ_2 образован векторами $\overline{A_2A_1}$ и $\overline{A_2A_3}$, которые выходят из вершины угла γ_2. Поэтому

$$\cos\gamma_2 = \frac{\overline{A_2A_1}\cdot}{\left|\overline{A_2A_1}\right|}\cdot\frac{\overline{A_2A_3}}{\left|\overline{A_2A_3}\right|} = \frac{-\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_2A_3}}{\left|\overline{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overline{A_2A_3}\right|} = -\frac{(-2)\cdot 1+(-1)\cdot 1+1\cdot(-3)}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{11}} =$$

$$= -\frac{-6}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{11}} \Rightarrow \gamma_2 = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{11}}\right) \approx 42{,}4^0.$$

Угол γ_3 образован векторами $\overline{A_3A_1}$ и $\overline{A_3A_2}$, которые выходят из вершины угла γ_3, поэтому $\cos\gamma_3 = \frac{\overline{A_3A_1}\cdot}{\left|\overline{A_3A_1}\right|}\cdot\frac{\overline{A_3A_2}}{\left|\overline{A_3A_2}\right|} = \frac{(-\overline{A_1A_3})\cdot(-\overline{A_2A_3})}{\left|\overline{A_1A_3}\right|\cdot\left|\overline{A_2A_3}\right|} = \frac{\overline{A_1A_3}\cdot\overline{A_2A_3}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{11}} =$

$$= \frac{(-1)\cdot 1+0\cdot 1+(-2)\cdot(-3)}{\sqrt{55}} = \frac{5}{\sqrt{55}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}} \Rightarrow \gamma_3 = \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}}\right) \approx 47{,}6^0.$$

Замечание: для контроля найдем $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 = 90^0 + 42.4^0 + 47.6^0 = 180^0$.

е) Найдём площадь сечения, проходящего через середину A_c ребра A_2A_3 и вершины A_1 *и* A_4 пирамиды. Имеем координаты середины A_c:

$x_c = \frac{1}{2}\cdot(x_2+x_3) = \frac{1}{2}\cdot(0+1) = 0{,}5;\ y_c = \frac{1}{2}\cdot(-2-1) = -1{,}5;\ z_c = \frac{1}{2}\cdot(4+1) = 2{,}5.$

Затем находим площадь треугольника $A_1A_4A_c$ с помощью векторного произведения:

$\overline{A_1A_4}\times\overline{A_1A_c} = \overline{d}_1$, *где* $\overline{A_1A_4} = \{1;1;-1\}$,

$\overline{A_1A_c} = \{0{,}5-2;\ -1{,}5-(-1);\ 2{,}5-3\} = \{-1{,}5;-0{,}5;-0{,}5\} = -0{,}5\cdot\{3;\ 1;\ 1\}$

$$\overline{d}_1 = \overline{A_1 A_4} \times \overline{A_1 A_c} = -0{,}5 \cdot \{1;1;-1\} \times \{3;1;1\} = -0{,}5 \cdot det \begin{pmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -0{,}5 \cdot \left[\overline{i} \cdot (1+1) - \overline{j} \cdot (1+3) + \overline{k} \cdot (1-3) \right] = -0{,}5 \cdot (2\overline{i} - 4\overline{j} - 2\overline{k}) = \{-1;2;1\}$$

$$\Rightarrow \left| \overline{d}_1 \right| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{6} \Rightarrow S_{сеч} = \frac{1}{2}\sqrt{6} = \sqrt{1{,}5} \approx 1{,}2\,(ед^2).$$

Ответ: а) $\alpha \approx 160.5^0$; б) $S \approx 2.74\,(ед^2)$; в) $V \approx 0.33$(ед^3); г) $\lambda \approx 0.58$;

д) $\left|\overline{A}_1\overline{A}_2\right| = \sqrt{6} \approx 2.45\,(ед)$; $\left|\overline{A}_1\overline{A}_3\right| = \sqrt{5} \approx 2.24\,(ед)$; $\left|\overline{A}_2\overline{A}_3\right| = \sqrt{11} \approx 3.32\,(ед)$;

$\gamma_1 = 90^0, \gamma_2 \approx 42{,}4^0, \gamma_3 = 47{,}6^0$. е) $S_{сеч} \approx 1{,}2\,(ед^2)$.

Задача 3. Найти $Пр_{\overline{x}}\,\overline{y}$ (проекцию вектора $\overline{y}$ на направление вектора $\overline{x}$), если $\overline{x} = \overline{a} - 2\overline{b}$, $\overline{y} = 3\overline{a} + \overline{b}$, $\overline{a} = 2\overline{p} + \overline{q}$, $\overline{b} = 3\overline{p} - 2\overline{q}$, $|\overline{p}| = 1$, $|\overline{q}| = \sqrt{3}$, *угол* $(\overline{p} \wedge \overline{q}) = 150^0$.

Решение

Имеем в соответствии с (1.32): $Пр_{\overline{x}}\,\overline{y} = \dfrac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{|\overline{x}|}$. Найдем векторы $\overline{x}$ и $\overline{y}$:

$$\overline{x} = \overline{a} - 2\overline{b} = (2\overline{p} + \overline{q}) - 2(3\overline{p} - 2\overline{q}) = 2\overline{p} + \overline{q} - 6\overline{p} + 4\overline{q} = -4\overline{p} + 5\overline{q};$$

$$\overline{y} = 3\overline{a} + \overline{b} = 3(2\overline{p} + \overline{q}) + (3\overline{p} - 2\overline{q}) = 6\overline{p} + 3\overline{q} + 3\overline{p} - 2\overline{q} = 9\overline{p} + \overline{q}.$$

Тогда с учётом свойств (1.18), (1.19) и (1.20) скалярного произведения:

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = (-4\overline{p} + 5\overline{q}) \cdot (9\overline{p} + \overline{q}) = -36\,\overline{p} \cdot \overline{p} - 4\,\overline{p} \cdot \overline{q} + 45\overline{q} \cdot \overline{p} + 5\overline{q} \cdot \overline{q} =$$

$$= (т.к.\ \overline{p} \cdot \overline{p} = |\overline{p}|^2,\ \overline{q} \cdot \overline{q} = |\overline{q}|^2,\ \overline{q} \cdot \overline{p} = \overline{p} \cdot \overline{q}) = -36\,|\overline{p}|^2 + 41\,\overline{p} \cdot \overline{q} + 5|\overline{q}|^2 =$$

$= -36\left|\overline{p}\right|^2 + 5\left|\overline{q}\right|^2 + 41\left|\overline{p}\right| \cdot \left|\overline{q}\right| \cdot \cos(\overline{p} \wedge \overline{q}) =$ (подставляем данные из условия) =

$$= -36\cdot 1^2 + 5(\sqrt{3})^2 + 41\cdot 1\cdot\sqrt{3}\cdot\cos 150^0 = -36 + 15 + 41\sqrt{3}\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -82{,}5.$$

Модуль вектора $\overline{x}$ найдем, используя свойство (1.18) скалярного произведения:

$$|\overline{x}|^2 = \overline{x}\cdot\overline{x} = (-4\,\overline{p} + 5\,\overline{q})\cdot(-4\,\overline{p} + 5\,\overline{q}) = 16\,\overline{p}\cdot\overline{p} - 20\,\overline{p}\cdot\overline{q} - 20\,\overline{q}\cdot\overline{p} + 25\,\overline{q}\cdot\overline{q} =$$

$$= 16|\overline{p}|^2 - 20\,\overline{p}\cdot\overline{q} - 20\,\overline{p}\cdot\overline{q} + 25|\overline{q}|^2 = 16|\overline{p}|^2 - 40\,\overline{p}\cdot\overline{q} + 25|\overline{q}|^2 =$$

$= 16|\overline{p}|^2 - 40|\overline{p}|\cdot|\overline{q}|\cdot\cos(\overline{p}\wedge\overline{q}) + 25|\overline{q}|^2 =$ (подставляем данные из условия) =

$$= 16\cdot 1^2 - 40\cdot 1\cdot\sqrt{3}\cdot\cos 150^0 + 25\cdot(\sqrt{3})^2 = 16 - 40\cdot\sqrt{3}\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + 25\cdot 3 = 151 = |\overline{x}|^2.$$

Поэтому $|\overline{x}| = \sqrt{151}$. *Тогда* $Пр_{\overline{x}}\,\overline{y} = \dfrac{\overline{x}\cdot\overline{y}}{|\overline{x}|} = \dfrac{-82{,}5}{\sqrt{151}} \approx -6{,}7.$

Ответ: $Пр_{\overline{x}}\,\overline{y} \approx -6{,}7.$

Задача 4. Найти площадь треугольника *ABC*, если $\overline{AC} = 2\,\overline{i} - 3\,\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{AB}$ – орт вектора нормали к плоскости π, проходящей через три точки $M_1(2;-1;3)$, $M_2(4;0;5)$, $M_3(1;2;1)$, вектор $\overline{AB}$ образует с осью *Oz* острый угол.

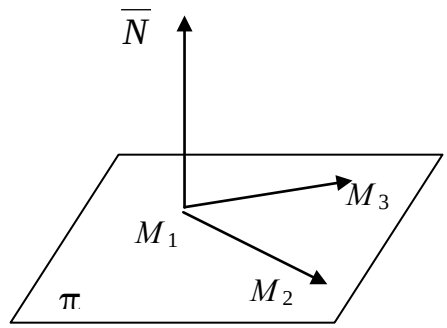

Рис. 2.3

Решение

Площадь *S* треугольника *ABC,* можно найти, используя геометрический смысл векторного произведения $\overline{d} = \overline{AC}\times\overline{AB}$: $0{,}5|\overline{d}| = S$. У нас $\overline{AC} = \{2;-3;1\}$, осталось найти $\overline{AB}$. Имеем: $\overline{AB}\perp\pi$, $|\overline{AB}| = 1. \Rightarrow$ $\overline{AB} = \lambda\cdot\overline{N}$, *где* $\lambda = \dfrac{1}{|\overline{N}|}, \Rightarrow$

$$\overline{N} = \overline{M_1M_2}\times\overline{M_1M_3} \Rightarrow \overline{M_1M_2} = \{2;1;2\},\ \overline{M_1M_3} = \{-1;3;-2\} \Rightarrow$$

$$\overline{N} = \overline{M_1M_2}\times\overline{M_1M_3} = det\begin{pmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \overline{i}\cdot(-2-6) - \overline{j}\cdot(-4+2) + \overline{k}\cdot(6+1) = -8\,\overline{i} + 2\,\overline{j} + 7\,\overline{k} = \{-8;2;7\} \Rightarrow$$

$$\overline{AB} = \lambda \cdot \overline{N} = \lambda \cdot \{-8; 2; 7\} = \{-8\lambda; 2\lambda; 7\lambda\}.$$

Число λ найдем, используя данные из условия:

$$\left|\overline{AB}\right| = 1; \Rightarrow 1 = \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-8\lambda)^2 + (2\lambda)^2 + (7\lambda)^2} = \sqrt{117\lambda^2} = |\lambda| \cdot \sqrt{117} = 1.$$

То есть $|\lambda| = \dfrac{1}{\sqrt{117}} \Rightarrow \lambda_1 = \dfrac{1}{\sqrt{117}},\ \lambda_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{117}} \Rightarrow$

$$\overline{AB}\,(1) = \left\{\frac{-8}{\sqrt{117}}; \frac{2}{\sqrt{117}}; \frac{7}{\sqrt{117}}\right\}, \overline{AB}\,(2) = \left\{\frac{8}{\sqrt{117}}; \frac{-2}{\sqrt{117}}; \frac{-7}{\sqrt{117}}\right\}.$$

По условию вектор $\overline{AB}$ образует с осью Oz острый угол, поэтому его третья координата должна быть положительной, поэтому остается единственный (первый) вариант:

$\overline{AB} = \left\{\dfrac{-8}{\sqrt{117}}; \dfrac{2}{\sqrt{117}}; \dfrac{7}{\sqrt{117}}\right\}$. Для нахождения $S = 0.5\left|\overline{d}\right|$ нам нужен $\left|\overline{d}\right|$, поэтому, сначала найдем $\overline{d} = \overline{AC} \times \overline{AB}$: $\overline{d} = \overline{AC} \times \overline{AB}$:

$$\textit{имеем}\ \overline{d} = \overline{AC} \times \overline{AB} = \frac{1}{\sqrt{117}} \cdot \{2; -3; 1\} \times \{-8; 2; 7\} = \frac{1}{\sqrt{117}} \cdot det\begin{pmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -8 & 2 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{117}} \cdot \left[\overline{i} \cdot (-21-2) - \overline{j} \cdot (14+8) + \overline{k} \cdot (4-24)\right] = \frac{1}{\sqrt{117}} \cdot \{-23; -22; -20\} \Rightarrow$$

$$\overline{d} = \frac{1}{\sqrt{117}} \cdot \{-23; -22; -20\} \Rightarrow \left|\overline{d}\right| = \frac{1}{\sqrt{117}} \cdot \sqrt{(-23)^2 + (-22)^2 + (-20)^2} = \frac{1}{\sqrt{117}} \cdot \sqrt{1413} \approx 3{,}48.$$

Тогда $S = 0{,}5\left|\overline{d}\right| \approx 1{,}74\,(ед^2)$.

Ответ: $S \approx 1{,}74$ (ед^2).

Задача 5. При каком значении x будут компланарны векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, если вектор $\overline{a}$ коллинеарен вектору $\overline{d} = \overline{m} \times \overline{n}$, где $\overline{m} = \{1; -2; 3\}$, $\overline{n} = 2\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$. Вектор $\overline{b}$ – перпендикулярен плоскости π, проходящей через точки $M_1(1; 2; 3)$, $M_2(2; -1; 3)$, $M_3(4; 0; 5)$. А вектор $\overline{c} = x\overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}$.

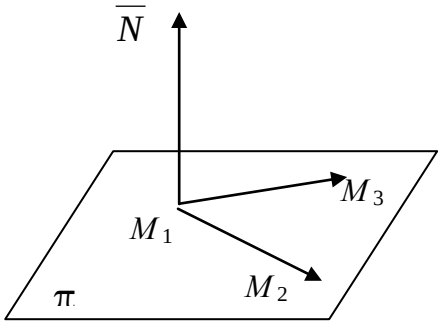

Рис. 2.4

Решение

Имеем:

так как $\bar{a} \parallel \bar{d}$ и $\bar{a} = \lambda \cdot \bar{d}$, λ – число. Так как $\bar{b}$ перпендикулярен плоскости π, проходящей через точки M_1, M_2 и M_3, то $\bar{b} = \mu \cdot \bar{N}$, где μ – число, $\bar{N}$ – вектор любой нормали к плоскости π. Условие компланарности (принадлежности некоторой плоскости) векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ эквивалентно условию компланарности векторов $\bar{d}, \bar{N}, \bar{c}$.

Поэтому найдём тот x, при котором векторы $\bar{d}, \bar{N}, \bar{c}$ будут компланарны. Имеем:

$$\bar{d} = \bar{m} \times \bar{n} = \{1; -2; 3\} \times \{2; 1; -1\} = det\begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (\textit{разлагаем по } 1 - \textit{ой строке}) =$$

$$= = \bar{i} \cdot (2-3) - \bar{j} \cdot (-1-6) + \bar{k} \cdot (1+4) = -1\bar{i} + 7\,\bar{j} + 5\,\bar{k} = \{-1; 7; 5\}, \textit{т.е. } \bar{d} = \{-1; 7; 5\}.$$

Вектор $\bar{N}$ нормали к плоскости π можно найти, используя определение векторного произведения $\overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3}$ (согласно с которым вектор $\overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3}$ перпендикулярен плоскости π). Имеем:

$$\overline{M_1M_2} = \{2-1; -1-2; 3-3\} = \{1; -3; 0\}, \overline{M_1M_3} = \{4-1; 0-2; 5-3\} = \{3; -2; 2\} \Rightarrow$$

$$\bar{N} = \overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3} = det\begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \bar{i} \cdot (-6-0) - \bar{j} \cdot (2-0) + \bar{k} \cdot (-2+9) = -6 \cdot \bar{i} - 2 \cdot \bar{j} + 7 \cdot \bar{k} =$$

$\Rightarrow \bar{N} = \{-6; -2; 7\}$. Векторы $\bar{d} = \{-1; 7; 5\}$, $\bar{N} = \{-6; -2; 7\}$ и $\bar{c} = \{x; 2; -1\}$ будут компланарны, если их смешанное произведение будет равно нулю:

$$det\begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ -6 & -2 & 7 \\ x & 2 & -1 \end{pmatrix} = -1 \cdot (2-14) - 7 \cdot (6-7x) + 5 \cdot (-12+2x) = 59x - 90 = 0.$$

То есть $x = \frac{90}{59}$ – условие компланарности $\bar{d}, \bar{N}, \bar{c}$ (а стало быть, и $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$).

Ответ: при $x = \frac{90}{59}$ векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ будут компланарны.

3. Типовые задания по теме «Элементы векторной алгебры»

Задача 1. Проверить, что векторы $\bar{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$, $\bar{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$, $\bar{c}=\{c_1, c_2, c_3\}$ образуют базис в пространстве, и найти разложение вектора $\bar{d}=\{d_1, d_2, d_3\}$ по этому базису $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$:

№	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3	d_1	d_2	d_3
1	–1	2	1	3	1	5	1	4	2	10	31	29
2	2	–1	3	1	2	1	3	–1	4	5	1	6
3	2	–3	–11	7	5	10	3	2	5	15	15	36
4	–3	5	1	2	1	4	1	–4	–3	2	–5	–4
5	3	–1	1	1	2	3	–13	3	–5	–6	3	0
6	1	–1	1	1	2	4	2	2	4	–1	–4	–2
7	2	3	1	3	2	2	1	1	3	4	5	7
8	3	1	3	2	2	1	–3	1	1	14	2	5
9	1	2	3	1	3	5	1	1	3	2	7	14
10	–2	3	1	3	2	2	–1	1	3	–5	0	4
11	–2	2	–10	2	1	4	1	1	5	9	–3	33
12	1	1	–1	4	1	2	4	2	2	3	5	–3
13	4	2	–1	3	1	4	1	3	1	10	12	6
14	1	3	3	2	1	2	1	1	–3	2	5	14
15	1	0	0	1	2	6	1	–3	–5	3	–8	–16
16	1	3	1	2	1	1	1	1	5	2	5	–7
17	–1	–1	1	4	2	3	1	3	–5	3	3	0
18	–1	4	–2	2	3	3	–1	–2	4	4	11	11
19	1	0	5	2	1	0	0	3	–1	5	16	10
20	–1	1	–1	2	3	4	3	–5	1	3	0	3
21	–4	3	9	2	7	7	9	–6	–9	28	–1	5
22	–1	2	–1	2	3	1	1	2	1	2	–2	1
23	2	1	–1	1	5	3	4	2	1	31	29	10
24	2	2	3	1	3	2	3	1	1	3	5	2
25	–1	1	3	2	3	1	3	–5	–13	3	0	–6
26	1	3	1	2	1	1	1	1	5	2	5	–7
27	–2	–1	4	3	2	3	4	–1	–2	11	4	11
28	3	–2	–1	–1	1	3	–1	3	2	2	6	7
29	–1	1	–2	3	–2	1	2	1	–3	11	–6	5
30	2	2	–1	1	3	4	3	1	–1	2	–6	–9
№	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3	d_1	d_2	d_3

Задача 2. Даны координаты вершин пирамиды: $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$, $A_3(x_3; y_3; z_3)$, $A_4(x_4; y_4; z_4)$. Средствами векторной алгебры найти: 1) угол φ между ребрами A_1A_3 и A_1A_4; 2) площадь грани $A_1A_2A_4$; 3) проекцию вектора $\overline{A_3A_2}$ на направление вектора $\overline{A_3A_4}$; 4) объем пирамиды; 5) в треугольнике $A_1A_2A_4$ найти длины всех сторон и величину каждого внутреннего угла (в градусах); 6) площадь сечения, проходящего через середину ребра A_1A_2 и вершины A_3 и A_4:

№	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3	x_4	y_4	z_4
1	2	2	7	6	7	7	2	3	1	–2	3	8
2	7	2	2	5	7	7	5	3	1	2	3	7
3	7	1	2	–5	3	–2	3	3	5	4	5	–1
4	1	–1	6	4	5	–2	–1	3	0	6	1	5
5	6	6	5	4	9	5	4	6	11	6	9	3
6	1	8	2	5	2	6	5	7	4	4	10	9
7	1	3	2	6	5	2	3	7	2	2	5	6
8	1	3	2	0	6	2	4	0	0	3	2	7
9	8	6	4	10	5	5	5	6	8	8	10	7
10	4	2	–9	3	0	4	0	0	4	5	–1	–3
11	4	–3	–2	2	2	3	2	–2	–3	–1	–2	3
12	1	–1	6	4	5	–2	–1	3	0	6	1	5
13	2	–3	1	6	1	–1	4	8	–9	2	–1	2
14	1	–4	0	5	0	–2	3	7	–10	1	–2	1
15	0	0	2	1	1	0	4	1	2	3	0	5
16	9	5	5	–3	7	1	5	7	8	6	9	2
17	8	4	1	7	7	3	6	5	8	3	5	8
18	4	0	0	–2	1	2	1	3	2	3	2	7
19	4	6	5	6	9	4	2	10	10	7	5	9
20	3	1	–2	1	–2	1	–2	1	0	2	2	5
21	6	2	2	–6	4	–2	2	4	5	3	6	–1
22	3	5	4	8	7	4	5	10	4	4	7	8
23	0	0	0	5	2	0	2	5	0	1	2	4
24	1	1	1	3	4	0	–1	5	6	4	0	5
25	8	4	4	–4	6	0	4	6	7	6	8	1
26	–2	3	–2	2	–3	2	2	2	0	1	5	5
27	3	1	1	1	4	1	1	1	7	3	4	–1
28	5	1	0	7	0	1	2	1	4	5	5	3

29	5	–1	4	9	3	–6	7	10	–14	5	1	–3
30	10	6	6	–2	8	2	6	8	9	7	10	3
№	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3	x_4	y_4	z_4

Задача 3. Найти проекцию $Пр_{\overline{x}}\,\overline{y}$, если $\overline{x} = к_1 \cdot \overline{a} + к_2 \cdot \overline{b}$, $\overline{y} = к_3 \cdot \overline{a} + к_4 \cdot \overline{b}$, $\overline{a} = к_5 \cdot \overline{p} + к_6 \cdot \overline{q}$, $\overline{b} = к_7 \cdot \overline{p} + к_8 \cdot \overline{q}$, *угол* $\left(\overline{p} \wedge \overline{q}\right) = 30^0 \cdot k_9$, *где*:

№	$\lvert\overline{p}\rvert$	$\lvert\overline{q}\rvert$	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9
1	0,5	2	0	1	–1	2	2	3	2	–1	2
2	0,5	2	0	1	1	2	1	–2	2	3	2
3	1	$\sqrt{3}$	1	–1	1	2	1	4	1	–2	1
4	2	0,5	1	0	2	–1	4	–1	2	3	4
5	$\sqrt{3}$	0,5	1	0	2	1	3	2	1	–4	4
6	0,5	2	1	0	–2	1	2	–3	4	1	4
7	1	$\sqrt{3}$	1	1	–1	2	2	1	4	1	1
8	1	$\sqrt{3}$	1	–1	–1	2	4	1	2	1	1
9	$\sqrt{3}$	1	1	1	1	2	1	2	1	–4	1
10	$\sqrt{3}$	1	1	1	1	–2	2	–1	4	–1	1
11	$\sqrt{3}$	2	1	1	2	1	1	3	2	–1	5
12	2	$\sqrt{3}$	1	–1	2	1	2	1	1	–3	5
13	2	$\sqrt{3}$	1	1	–2	1	3	–1	1	2	5
14	0,5	2	0	1	1	2	2	3	1	–2	2
15	$\sqrt{3}$	1	1	–1	1	–2	4	–1	2	–1	1
16	2	0,5	0	1	1	2	2	–3	1	2	2
17	0,5	2	1	0	–2	1	4	1	2	–3	4
18	$\sqrt{3}$	2	1	–1	2	1	2	–1	1	3	5
19	2	0,5	0	1	1	–2	2	1	3	–2	2
20	0,5	2	1	0	2	1	1	4	3	–2	4
21	1	$\sqrt{3}$	1	1	1	2	1	–2	1	4	1
22	0,5	2	1	0	2	1	3	–2	1	4	4
23	2	$\sqrt{3}$	1	1	2	1	1	–3	2	1	5

24	2	0,5	1	0	2	–1	2	3	1	–1	4
25	$\sqrt{3}$	2	1	1	2	–1	3	1	1	–2	5
26	2	0,5	1	0	2	1	1	–4	3	–2	4
27	0,5	2	0	1	–1	2	2	–1	2	3	2
28	$\sqrt{3}$	1	1	1	1	–2	1	–4	1	2	1
29	2	0,5	0	1	1	2	1	2	2	–3	2
30	2	0,5	0	1	1	–2	3	–2	2	1	2
№	$\lvert\overline{p}\rvert$	$\lvert\overline{q}\rvert$	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9

Задача 4 (далее условие – по вариантам студентов).

1. Найти площадь параллелограмма *ABCD*, если $\overline{AB}$ – вектор единичной длины, перпендикулярный плоскости, проходящей через точки (0, 0, 0), (0, 1, 2), (1, 2, 4), а $\overline{AC} = (\overline{i} + \overline{j}) \times (\overline{i} + 2\,\overline{j} + 3\,\overline{k})$.

2. Найти модуль проекции вектора $\overline{p}$ единичной длины, перпендикулярного плоскости, проходящей через точки (1, 1, 0), (1, 0, 1,) (0, 1,1), на прямую, проходящую через точки (1, 1, 1), (1, 2, 3).

3. Найти модуль проекции вектора $\overline{p} = (\overline{i} - 2\,\overline{j} + \overline{k}) \times (2\,\overline{i} - 5\,\overline{k})$ на вектор $\overline{q}$ единичной длины, лежащий в плоскости *Oyz* и перпендикулярный вектору $\overline{a} = \overline{i} - 3\,\overline{j} - 4\,\overline{k}$.

4. Найти площадь параллелограмма *ABCD*, если $\overline{AB}$ – единичный вектор, перпендикулярный плоскости, проходящей через точки (1, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2), а $\overline{\mathrm{AC}}$ коллинеарен прямой, проходящей через точки (0, 0, 0), (1, 1, 1), и $\lvert\overline{\mathrm{AC}}\rvert = 3$.

5. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах, $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, если $\overline{a} = (\overline{i} + \overline{j} - 3\overline{k}) \times (2\overline{i} - 5\overline{j})$. Вектор $\overline{b} = \overline{MN}$, где M (1, 3, –3), N (2, 4, –1). Вектор $\overline{c}$ образует с осями Ox, Oy углы в 45^0 и имеет длину 2.

6. Вектор $\overline{p}$ перпендикулярен оси Oz и удовлетворяет условиям $\overline{p} \cdot \overline{a} = 9$, $\overline{p} \cdot \overline{b} = -4$, где $\overline{a} = 3\overline{i} - \overline{j} + 5\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} + 2\overline{j} - 3\overline{k}$. Найти проекцию вектора $\overline{p}$ на вектор $\overline{q} = \overline{a} \times \overline{b}$.

7. Найти модуль проекции единичного вектора $\overline{p}$, перпендикулярного плоскости, проходящей через точки (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1) на вектор $\overline{q} = (\overline{i} - \overline{j}) \times (\overline{i} + \overline{k})$.

8. Найти модуль проекции вектора $\overline{p}$ на вектор $\overline{q}$, если $\overline{p}$ перпендикулярен векторам $\overline{a} = 4\overline{i} - 3\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k}$. Вектор $\overline{q} = \overline{i} - 2\overline{k}$, $|\overline{p}| = 3$.

9. Найти объем параллелепипеда, построенного на трёх векторах: $\overline{a} + \overline{b}$, $\overline{a} - \overline{b}$, $(\overline{a} + \overline{b}) \times (\overline{a} - \overline{b})$, где $\overline{a} = \overline{i} + \overline{k}$, $\overline{b} = \overline{j} - \overline{k}$.

10. Найти площадь параллелограмма ABCD, если $\overline{AB} = \overline{a} + \overline{b}$, $\overline{AD} = \overline{a} \times \overline{b}$, $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$.

11. Найти модуль проекции вектора $\overline{p} = (\overline{i} + \overline{j}) \times (\overline{j} - \overline{k})$ на вектор $\overline{q}$, перпендикулярный плоскости, проходящей через точки (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1).

12. Найти модуль проекции вектора $\overline{p}$ единичной длины, коллинеарного вектору $\overline{a} = 2\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$, на вектор $\overline{q} = (2\overline{i} - \overline{j} + 7\overline{k}) \times (\overline{i} + 3\overline{k})$.

13. Найти проекцию вектора $\overline{p} = \overline{a} \times \overline{b}$, где $\overline{a} = 2\overline{j} - \overline{k}$, $\overline{b} = 3\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$, на вектор $\overline{q} = \overline{a} + \overline{b} + 2\overline{i}$.

14. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{p}$ и $\overline{q}$, если вектор $\overline{p}$ перпендикулярен векторам $\overline{a} = 2\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k}$. Вектор $\overline{q} = \overline{i} - 2\overline{k}$, $|\overline{p}| = 3$.

15. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{p}$ и $\overline{q}$, если $\overline{p}$ составляет с координатными осями равные углы и $|\overline{p}| = \sqrt{3}$; $\overline{q} = (2\overline{i} - 7\overline{j} + 3\overline{k}) \times (5\overline{i} - 2\overline{j})$.

16. Найти модуль проекции вектора $\overline{p}$, перпендикулярного к оси Oz и вектору $\overline{a} = 8\overline{i} - 15\overline{j} + 3\overline{k}$, имеющего длину $|\overline{p}| = 51$, на вектор $\overline{q} = (\overline{j} - \overline{k}) \times (\overline{i} - 2\overline{j} + 5\overline{k})$.

17. Найти модуль проекции вектора $\overline{p}$ на вектор $\overline{q} = -\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$, *если* $\overline{p}$ перпендикулярен векторам $\overline{a}$, $\overline{b}$, которые заданы так:
$\overline{a} = 3\overline{i} + 2\overline{j} + 2\overline{k}, \overline{b} = 18\overline{i} - 22\overline{j} - 5\overline{k}$; $|\overline{p}| = 14$.

18. Найти модуль проекции вектора $\overline{p}$ единичной длины, составляющего с осями координат равные углы на вектор $\overline{q} = (2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}) \times (\overline{i} + 2\overline{k})$.

19. Найти площадь треугольника *ABC*, если $\overline{AB}$ – вектор единичной длины, перпендикулярный к плоскости, проходящей через точки (0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1), $\overline{AC}$ – единичный вектор, коллинеарный прямой, проходящей через точки (0, 0, 0) и (1, 1, 1).

20. Найти проекцию вектора $\overline{p}$, перпендикулярного векторам: $\overline{a} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k}$ и удовлетворяющего условию $\overline{p} \cdot (\overline{i} + 2\overline{j} - 7\overline{k}) = 10$; на вектор $\overline{q} = (\overline{j} - \overline{j} + 5\overline{k}) \times (2\overline{i} - 3\overline{k})$.

21. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах: $\overline{a} + \overline{b}$, $\overline{a} - \overline{b}$, $(\overline{a} + \overline{b}) \times (\overline{a} - \overline{b})$, где $\overline{a} = \dfrac{(\overline{i} - \overline{j})}{\sqrt{2}}$, $\overline{b} = \dfrac{(2\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k})}{3}$.

22. Найти проекцию вектора $\overline{p}=(3\,\overline{i}-6\,\overline{j}-\overline{k})\times(2\overline{i}-4\,\overline{j}-5\overline{k})$ на ось, составляющую с осями координат углы $\alpha=\dfrac{\pi}{3},\beta=\dfrac{2\pi}{3}$ и γ – тупой.

23. Найти площадь параллелограмма $ABCD$, если $\overline{AB}$ лежит на прямой, проходящей через точки (0, 1, 0), (1, 1, 1) и $\left|\overline{AB}\right|=2$, а $\overline{AD}$ – вектор, перпендикулярный плоскости, проходящей через точки (0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), и $\left|\overline{AD}\right|=2$.

24. Найти модуль проекции вектора $\overline{p}$ на вектор $\overline{q}$, если $\overline{p}$ коллинеарен вектору $\overline{a}=4\overline{i}-3\overline{k},\left|\overline{p}\right|=15,$ а $\overline{q}=(3\overline{i}+2\,\overline{j}-\overline{k})\times(2\,\overline{i}-7\,\overline{j}+3\overline{k}).$

25. Найти проекцию вектора $\overline{p}=2\,\overline{a}-3\overline{b}$, где $\overline{a}=-2\,\overline{i}+\overline{j}+\overline{k},\ \overline{\mathrm{b}}=\overline{i}-5\,\overline{j},$ на вектор $\overline{a}\times\overline{b}+\overline{i}.$

26. Найти объем параллелепипеда *ABCDEFLM*, если *ABCD* лежит в плоскости *Oxy* и имеет площадь 3, а вектор $\overline{AE}$ коллинеарен прямой, проходящей через точки (2, 1, 3), (3, 2, 4) и имеет длину 2.

27. Найти проекцию вектора $\overline{p}=(\overline{a}+\overline{b})\times(\overline{a}-\overline{b})$, где $\overline{a}=3\,\overline{i}+5\,\overline{j}-\overline{k}$, $\overline{b}=2\overline{i}-3\,\overline{j}+4\overline{k}$ на ось, составляющую с осями координат углы $\alpha-$острый, $\beta=\pi/3,\ \gamma=\pi/2.$

28. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{p}$ и $\overline{q}$, если вектор $\overline{p}$ единичной длины лежит в плоскости *Oxz*; $\overline{p}\cdot(3\overline{i}+\overline{j}-4\overline{k})=0,$ а $\overline{q}=(\overline{i}-3\,\overline{j}+\overline{k})\times(\overline{j}-3\overline{k}).$

29. Найти модуль проекции вектора $\overline{p}$ единичной длины, коллинеарного прямой, проходящей через точки (0, 0, 1), (1, 0, 1), на направление перпендикуляра к плоскости, проходящей через точки (0, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 2, 2).

30. Найти площадь треугольника *ABC*, если $\overline{AB}$ коллинеарен вектору $\overline{p} = 2\overline{i} - \overline{j} - 5\overline{k}$, $\left|\overline{AB}\right| = 120$, а $\overline{AC} = (2\overline{i} - 3\overline{j} + 4\overline{k}) \times (\overline{i} - 5\overline{j} - 9\overline{k})$.

Задача 5. При каком x будут компланарны векторы $\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}$, если (далее условие – по вариантам студентов):

1) $\overline{p}$ лежит в плоскости *Oxz* и перпендикулярен оси *Oz*, $\overline{q}$ коллинеарен вектору $\overline{a} = (\overline{i} + \overline{j}) \times (\overline{i} - \overline{j})$; $\overline{r} = \overline{MN}$; M (1, 0, 1), N (0, x, 3).

2) $\overline{p} = (2\overline{i} - 3\overline{j} + 7\overline{k}) \times (2\overline{i} - 5\overline{k})$, $\overline{q}$ перпендикулярен оси *Ox* и вектору $\overline{a} = 5\overline{i} - 5\overline{j} + \overline{k}$; $\overline{r} = 3\overline{i} + 4\overline{j} + x\overline{k}$.

3) $\overline{p}$ коллинеарен вектору $\overline{a} \times \overline{b}$, где $\overline{a} = 2\overline{i} - 7\overline{j} + 11\overline{k}$, $\overline{b} = 9\overline{i} - 4\overline{j} + 5\overline{k}$, $\overline{q} = (\overline{i} + \overline{j} + 4\overline{k}) \times (4\overline{i} + \overline{j} + \overline{k})$, $\overline{r} = \overline{MN}$; M (1, 0, 2), N (3, x, 5).

4) $\overline{p}$ лежит плоскости Oxy и перпендикулярен вектору $\overline{a} = 3\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$; $\overline{q} = \overline{MN}$, M (7, –5, 3), N (9, –4, 1), $\overline{r} = 3\overline{i} - 2\overline{j} + x\overline{k}$.

5) $\overline{p} = \overline{a} + \overline{b}$, где $\overline{a} = 2\overline{i} - 3\overline{k}$; $\overline{b} = 2\overline{j} + 6\overline{k}$; $\overline{q}$ составляет с осями координат равные углы, а $\overline{r} = 3\overline{i} + x\overline{j} - \overline{k}$.

6) $\overline{p}$ составляет с осями координат углы: $\alpha = \beta = \pi/4$, $\overline{q} = (2\overline{i} - 3\overline{j} + 5\overline{k}) \times (\overline{i} + x\overline{j} - 3\overline{k})$, $\overline{r}$ – орт вектора $\overline{a} = 3\overline{i} + 11\overline{j} + 11\overline{k}$.

7) $\overline{p} = \overline{AB}$, $A\,(2, -1, 0)$, $B\,(1, x, 5)$, $\overline{q} = (\overline{i} + 3\overline{j} + 5\overline{k}) \times (2\overline{i} - 4\overline{j} - 6\overline{k})$, $\overline{r}$ – вектор, составляющий с осями координат углы: $\alpha = \pi/3$, $\beta = \pi/4$ и γ – тупой.

8) $\overline{p}$ коллинеарен вектору $\overline{a} = \overline{i} - \overline{j} - x\overline{k}$, $\overline{q}$ лежит в плоскости Oxy и перпендикулярен вектору $\overline{r} = 3\overline{i} + x\overline{j}$.

9) $\overline{p} = (2\overline{i} - 7\overline{j} + \overline{k}) \times (3\overline{i} - 2\overline{j} + 5\overline{k})$. Вектор $\overline{q}$ составляет с осями координат равные углы. Вектор $\overline{r} = \overline{MN}$; $M\,(2, 1, -1)$, $N\,(x, 2, 0)$.

10) $\overline{p}$ коллинеарен прямой, проходящей через точки (0, 0, 1) и (1, 1, 0), $\overline{q}$ лежит в плоскости Oxy и составляет с вектором $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j} + \sqrt{2} \cdot \overline{k}$ угол $\pi/4$; $\overline{r} = x\overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k}$.

11) $\overline{p}$ лежит в плоскости Oxy и перпендикулярен вектору $\overline{a} = 3\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$, $\overline{q}$ коллинеарен вектору $\overline{b} = \overline{i} - 5\overline{j} + 7\overline{k}$, а $\overline{r} = 2\overline{i} - 4\overline{j} + x\overline{k}$.

12) $\overline{p} = (\overline{a} + 3\overline{b}) \times (\overline{b} - 3\overline{a})$, где $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} - 3\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} + 4\overline{j}$; $\overline{q}$ лежит в плоскости Oxz и перпендикулярен вектору $\overline{c} = 3\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$; $\overline{r} = x\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}$.

13) $\overline{p}$ перпендикулярен векторам $\overline{a} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + 3\overline{k}$ и $\overline{b} = 3\overline{j}$, $\overline{q} = 2\overline{a} + 3\overline{b}$, $\overline{r} = \overline{i} + x\overline{j} - 2\overline{k}$.

14) $\overline{p}=(-2\overline{i}+5\overline{j}+5\overline{k})\times(-2\overline{i}+\overline{j}-\overline{k})$, $\overline{q}=2\overline{a}+\overline{b}$, где $\overline{a}=-3\overline{i}+2\overline{j}+\overline{k}$, $\overline{b}=7\overline{i}-3\overline{j}+x\overline{k}$, $\overline{r}$ коллинеарен вектору $\overline{d}=\overline{i}-\overline{j}-8\overline{k}$.

15) $\overline{p}$ коллинеарен прямой, проходящей через точки (1, 1, 0), (1, 0, 1), $\overline{q}$ перпендикулярен векторам $\overline{a}=3\overline{i}+\overline{k}$ и $\overline{b}=\overline{i}+x\overline{j}$; $\overline{r}=2\overline{i}+\overline{j}$.

16) $\overline{p}$ удовлетворяет условиям: $\overline{p}\cdot\overline{a}=4$, $\overline{p}\cdot\overline{в}=1$, $\overline{p}\cdot\overline{c}=5$, где $\overline{a}=3\overline{i}+\overline{j}-\overline{k}$, $\overline{в}=\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$, $\overline{c}=4\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$; $\overline{q}$ составляет с осями координат равные углы, а $\overline{r}=-3\overline{i}+x\overline{j}+2\overline{k}$.

17) $\overline{p}$ коллинеарен вектору $\overline{a}=5\overline{i}+3\overline{j}-\overline{k}$, $\overline{q}=\overline{MN}$, M (–4, 1, 4), N (6, 0, x); $\overline{r}$ перпендикулярен оси *Ox* и вектору $\overline{b}=2\overline{i}+3\overline{j}+7\overline{k}$.

18) $\overline{p}=(-2\overline{i}+5\overline{j}+5\overline{k})\times(-2\overline{i}+\overline{j}-\overline{k})$, $\overline{q}$ перпендикулярен оси *Oy* и удовлетворяет условиям $\overline{q}\cdot(3\overline{i}+\overline{j}+\overline{k})=5$, $\overline{q}\cdot(4\overline{i}-3\overline{j}+\overline{k})=1$; $\overline{r}=\overline{AB}$; A (x, 2, 1), B (3, 0, –9).

19) $\overline{p}$ перпендикулярен векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, $\overline{a}=\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$, $\overline{b}=\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$, $\overline{q}$ лежит в плоскости *Oxz* и составляет с вектором $\overline{c}=\overline{i}+\sqrt{6}\,\overline{j}+\overline{k}$ угол $\pi/3$; $\overline{r}=-\overline{i}+x\overline{j}+\overline{k}$.

20) $\overline{p}=(\overline{i}-3\overline{j}+5\overline{k})\times(2\overline{i}+\overline{j}-\overline{k})$, $\overline{q}$ перпендикулярен векторам $\overline{a}=\overline{i}-\overline{j}+4\overline{k}$ и $\overline{b}=2\overline{j}-3\overline{k}$; $\overline{r}=x\overline{i}+3\overline{j}-3\overline{k}$.

21) $\overline{p}$ лежит в плоскости, проходящей через точки (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), и перпендикулярен вектору $\overline{a} = \overline{i} - \overline{j}$; $\overline{q} = (\overline{i} + 2\overline{j} + 4\overline{k}) \times (-\overline{j} + 2\overline{k})$, $\overline{r} = \overline{MN}$; M (2, 2, 0), N (2, 3, x).

22) $\overline{p} = (\overline{a} - \overline{b}) \times (2\overline{a} - \overline{b})$, где $\overline{a} = \overline{i} - 2\overline{j} - 3\overline{k}$, $\overline{b} = 3\overline{i} - \overline{j} + 4\overline{k}$, $\overline{q} = \overline{MN}$; M (1, 0, 3), N (x, 2, 4), $\overline{r}$ перпендикулярен оси Ox и удовлетворяет условиям: $\overline{r} \cdot (\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}) = 5$, $\overline{r} \cdot (-3\overline{i} + 4\overline{j} + \overline{k}) = 1$.

23) $\overline{p}$ перпендикулярен оси Ox и вектору $\overline{a} = 4\overline{i} + 3\overline{j} - 3\overline{k}$, $\overline{q}$ коллинеарен вектору $\overline{b} = 3\overline{i} - 4\overline{k}$, а $\overline{r} = 2\overline{i} + x\overline{j} + \overline{k}$.

24) $\overline{p}$ перпендикулярен векторам: $\overline{a} = -\overline{i} + 5\overline{j} - 2\overline{k}$, $\overline{b} = 3\overline{i} - 4\overline{j} + 6\overline{k}$; $\overline{q} = \overline{MN}$, M (1, 3, –3), N (2, 4, –1), а $\overline{r} = x\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$.

25) $\overline{p}$ лежит в плоскости Oxz и перпендикулярен вектору $\overline{c} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + 5\overline{k}$; $\overline{q} = (\overline{a} + \overline{b}) \times (\overline{a} - \overline{b})$, где $\overline{a} = 2\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$, $\overline{b} = -3\overline{i} + 4\overline{k}$, $\overline{r} = 2\overline{i} + x\overline{j} + 2\overline{k}$.

26) $\overline{p} = (4\overline{i} + 14\overline{j} - 3\overline{k}) \times (-2\overline{i} + 2\overline{j} + 9\overline{k})$, $\overline{q}$ лежит в плоскости Oxy и перпендикулярен вектору $\overline{a} = 2\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$; $\overline{r} = x\overline{i} + 3\overline{j} + 2\overline{k}$.

27) $\overline{p}$ составляет с осями координат углы: $\alpha -$острый, $\beta = \pi/3$, $\gamma = \pi/4$; $\overline{q}$ составляет с осями координат равные углы, а $\overline{r} = \overline{i} + \overline{j} + 2x\overline{k}$.

28) $\overline{p} = 2\overline{a} + 3\overline{b}$, где $\overline{a} = 2\overline{i} + \overline{k} - \overline{j}$, $\overline{b} = -3\overline{i} + 4\overline{j} + 3\overline{k}$; $\overline{q}$ коллинеарен вектору $\overline{c} = -7\overline{i} + 3\overline{j} + 2\overline{k}$, а $\overline{r} = x\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$.

29) $\overline{p} = 2\overline{i} - \overline{j} + x\overline{k}$; $\overline{q}$ составляет с осями Ох и Оу углы в $\pi/4$, а $\overline{r} = (2\overline{a} - \overline{b}) \times (\overline{a} + 2\overline{b})$, где $\overline{a} = 3\overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{b} = -\overline{i} + 2\overline{j} - 3\overline{k}$.

30) $\overline{p} = \overline{MN}$, где $M(3,2,4)$, $N(8,1,5)$; $\overline{q} = (6 + \overline{j} - \overline{k}) \times (5\overline{i} + \overline{j} + x\overline{k})$, $\overline{r}$ коллинеарен вектору $\overline{a} = 7\overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}$.

4. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Дайте определение вектора. Какие линейные операции возможны над векторами? Как они определяются?
2. Что такое линейно зависимая система векторов? Линейно независимая?

3. Что является базисом на плоскости? Базисом в трёхмерном пространстве?
4. Что означает «разложить вектор по базису»?

5. Дайте определение скалярного произведения двух векторов.
6. Каковы свойства скалярного произведения?

7. Как оно находится через координаты векторов в декартовом базисе?
8. Дайте определение проекции вектора на ось. Как она находится?

9. Как можно найти проекцию вектора на направление другого вектора?
10. Дайте определение векторного произведения.

11. Каковы свойства векторного произведения?
12. Как оно находится через координаты векторов в декартовом базисе?

13. Дайте определение смешанного произведения.
14. Каковы его свойства?

15. Как оно находится через координаты векторов в декартовом базисе?

5. ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО ТЕМЕ «ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ»

1. Даны точки M (3; -4; -2) и N (2; 5; 2). Найти проекцию вектора $\overline{MN}$ на ось ℓ, составляющую с осями Ox, Oy углы $\alpha = 60^o$, $\beta = 120^o$, а с осью Oz – тупой угол γ.
2. Даны вершины четырехугольника:
A (1; -2; 2), B (1; 4; 0), C (-4; 1; 1) и D (-5; -5; 3). Доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.
3. Найти внутренний угол $\angle ABC$ треугольника с вершинами: A (-1; -2; 4), B (-4; -2; 0) и C (3; -2; 1).
4. Найти площадь треугольника с вершинами A (2; 1;-3), B (4; 1; 1), C (0; 2; 4).
5. Найти объём пирамиды $ABCD$, если:
A (0;-2; 5), B (6; 6; 0), C (2; -1; 3) и D (3; -3; 6).

Ответы: 1. $-5-2\sqrt{2}$; **3.** 45°; **4.** 3; **5.** 7,5.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мартынов, Г.П. Учебно-методический комплекс дисциплины «Математика» для экологов и картографов [Электронный ресурс]: учебно-методический комплекс / Г.П. Мартынов. – М.: ИНФОРМРЕГИСТР, 2014. – 1,61 МБ. Режим доступа: http//www.lib/ssga.ru/
2. Мартынов, Г.П. Рабочая программа дисциплины «Математика» [Электронный ресурс]: методический документ / Г.П. Мартынов. –Москва, «ИНФОРМИО», 2016 – 18 с. // Свидетельство о публикации в СМИ «ИНФОРМИО» от 04.07.2016, серия А № 001511/2016 / www.informio.ru.
3. Мартынов, Г.П. «Фонд оценочных средств дисциплины «Математика» [Электронный ресурс]: методическая разработка / Г.П. Мартынов. – Москва, «ИНФОРМИО», 2016 – 14 с. // Свидетельство о публикации в СМИ «ИНФОРМИО» от 15.11.2016, серия А № 002150/2016 / www.informio.ru.
4. Мартынов, Г.П. Организация самостоятельной работы студентов направления подготовки «Картография и геоинформатика» при изучении дисциплины «Математика» [Электронный ресурс]: методическая разработка / Г.П. Мартынов. – Москва, «ИНФОРМИО», 2016 – 7 с. // Свидетельство о публикации в СМИ «ИНФОРМИО» от 26.07.2016, серия А № 001637/2016 / www.informio.ru.

5. Мартынов, Г.П. Математика для экологов и картографов [Электронный ресурс]: учебное пособие. Ч. 1. / Г.П. Мартынов. – М.: ИНФОРМРЕГИСТР, 2013. – 2,63 МБ. Режим доступа: http//www.lib/ssga.ru/
6. Мартынов, Г.П. Математика для картографов и экологов [Текст]: учебное пособие. В 4-х ч. Ч. 1 / Г.П. Мартынов. – Новосибирск: СГУГиТ, 2016. – 192 с.
7. Вербная, В.П. Математика для дистанционного обучения: учебное пособие, издание 2-ое, стереотипное (Рекомендовано СибРУМЦ) / В.П. Вербная, Г.П. Мартынов, Е.С. Плюснина. – Новосибирск: СГУГиТ, 2016. – 278 с.
8. Вербная, В.П. Математика для дистанционного изучения [Электронный ресурс]: учебное пособие для вузов (Рекомендовано СибРУМЦ) / В.П. Вербная, Г.П. Мартынов, Е.С. Плюснина. – М.: ИНФОРМРЕГИСТР, 2013. – 230 с. Режим доступа: http//www.lib/ssga.ru/
9. Мартынов, Г.П. Математика. Часть 2. Векторная алгебра [Текст]: методические указания / Г.П. Мартынов. – Новосибирск: СГГА, 2003, 42 с.