**министерство образования и науки Российской Федерации**

Старооскольский технологический институт им. А.А. УГАРОВА

(филиал) федерального государственного автономного образовательного учреждения

высшего образования

«Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»

**ОСКОЛЬСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ**

УТВЕРЖДЕНО

НМС опк

пРОТОКОЛ №1

ОТ «01» СЕНТЯБРЯ 2016 г.

**ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ**

***Методические указания для студентов очной формы обучения для выполнения самостоятельной работы***

Специальность 09.02.04 Информационные системы (по отраслям)

Старый Оскол 2016г

|  |  |
| --- | --- |
| *Рассмотрены на заседании П(Ц)К 09.02.04* *Протокол №* *от «\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2016г.**Председатель**Назарова О.И.* | *Методические указания составлены в соответствии с рабочей программой по дисциплине* *Элементы математической логики**Специальности* *09.02.04 Информационные системы (по отраслям)**Зам .директора по М Р**к.п.н., доцент \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_А.М. Степанова* |

***Составитель: Артюхина Д.Д.***

***Рецензенты:***

*внутренний: Коренькова Т.Н.* - преподаватель ОПК СТИ НИТУ МИСиС

*внешний:* Анпилов А.Э. – инженер ООО «КМАЭМ»

СОДЕРЖАНИЕ

[ВВЕДЕНИЕ 4](#_Toc466553219)

[Основы математической логики 7](#_Toc466553220)

[Алгебра логики. 14](#_Toc466553221)

[ВНЕАУДИТОРНАЯ САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА 21](#_Toc466553222)

[Задания для самостоятельной работы 25](#_Toc466553223)

[Список использованных источников 28](#_Toc466553224)

# ВВЕДЕНИЕ

**1.1. Назначение курса**

Данный курс служит формированию знаний и умений, которые образуют теоретический фундамент, необходимый для постановки и решения задач в области информатики, для корректного понимания ограничений, возникающих при создании вычислительных структур, алгоритмов и программ обработки информации.

 Новые разделы курса дискретной математики, хотя и реализованы в виде учебных программ и циклов лекций, пока не существуют в виде монографий, по крайней мере, на русском языке, так как курс дискретной математики для технических вузов ориентирован на старые прикладные задачи, которые приходилось решать инженерам. В частности в математической логике это была минимизация логических схем, которая сегодня потеряла актуальность.

 Интересно отметить, что теория синтеза логических схем, пройдя почти полный "биологический цикл" на глазах одного поколения исследователей, представляет собой весьма поучительный пример того, как сильно подвержены моральному старению отрасли технических наук, слабо связанные с фундаментальной наукой. Ещё 10 лет назад все технические журналы были заполнены статьями по минимизации и синтезу логических схем. Большинство методов минимизации, разработанных учёными, сейчас забыты и не востребованы практикой. А те идеи, которые в то время считались сугубо теоретическими, нашли практическое применение в современной технике. Например, нечёткая логика, сети Петри и теория алгоритмов выдержали проверку временем и находят широкое применение в различных областях кибернетики и программирования, таких как системное программирование, сложность вычисления и искусственный интеллект.

 Математическая логика и теория алгоритмов стала центральным разделом дискретной математики. Однако в отличие от большинства монографий на русском языке в курсе лекций эти вопросы изложены как средство решения практических, инженерных задач.

 Как известно, по истечении каждого десятилетия элементная база компьютеров, операционные системы, средства доступа и сами программы меняются коренным образом. Однако структуры и алгоритмы, лежащие в их основе, остаются неизменными в течение гораздо большего времени. Эти основы стали закладываться тысячелетия назад, когда разработана формальная логика и разработаны первые алгоритмы.

 Математическая логика и теория алгоритмов традиционно относятся к фундаментальной науке и считаются мало связанными с практикой и трудными для понимания. Действительно, когда Дж. Буль создал математический аппарат булевой алгебры, он долго не находил практического применения, однако в 20-ом столетии именно этот математический аппарат позволил спроектировать все узлы ЭВМ. Следовательно, первый из этих предрассудков успешно опровергается развитием вычислительной техники.

 Что же касается предрассудка о трудности понимания этой дисциплины, то он в значительной степени происходит оттого, что книги по математической логике и теории алгоритмов написаны математиками для математиков.

 Сейчас, когда возможности вычислительной техники многократно возросли, а самих персональных компьютеров значительно больше, чем людей, умеющих их эффективно использовать, понимание того, что можно и что нельзя сделать с помощью современной вычислительной техники приобретает исключительное значение.

 Именно общая теория алгоритмов показала, что есть задачи неразрешимые ни при каком увеличении мощности вычислительных средств, а её бурно развивающаяся ветвь - теория сложности вычислений постепенно приводит к пониманию того, что бывают задачи разрешимые, но объективно-сложные, причём сложность их может оказаться в некотором смысле абсолютной, т.е. практически недоступной для современных ЭВМ.

В данном курсе ставились следующие задачи:

1. Изложить все рассматриваемые вопросы по возможности как можно более просто, но не проще чем это требуется для специалиста высшей квалификации.

2. Практические проблемы проектирования и анализа информационных систем являются отправной точкой, а формальный аппарат – средством систематического решения этих проблем. По нашему глубокому убеждению, студент – это не сосуд, который надо наполнить, а факел, который надо зажечь.

3. Каждый раздел курса содержит вопросы для самопроверки. Для усвоения данного курса студент обязан ответить на все эти вопросы.

В результате освоения данного курса студент на основе ясного понимания соответствующих теоретических разделов должен уметь:

- реализовывать простейший вид логического преобразования информации в произвольном базисе логических функций;

- выделять в доказательных рассуждениях естественного языка логическую структуру, строить схемы формальных доказательств и проверять их правильность.

**1.2 Логические представления**

*Логические представления —* описание исследуемой сис­темы, процесса, явления в виде совокупности *сложных выс­казываний,* составленных из *простых (элементарных) выс­казываний* и *логических связок* между ними. Логические представления и их составляющие характеризуются опре­деленными свойствами и набором допустимых преобразо­ваний над ними (операций, правил вывода и т.п.), реализую­щих разработанные в формальной (математической) *логике правильные методы рассуждений - законы логики.*

Способы (правила) формального представления выска­зываний, построения новых высказываний из имеющихся с помощью логически правильных преобразований, а так­же способы (методы) установления истинности или лож­ности высказываний изучаются в *математической логике.* Современная математическая логика включает два основ­ных раздела: *логику высказываний* и охватывающую ее *ло­гику предикатов* (рис. 1.1), для построения которых существуют два подхода (языка), образующих два варианта фор­мальной логики: *алгебру логики* и *логические исчисления.* Между основными понятиями этих языков формальной ло­гики имеет место взаимно однозначное соответствие. Их изоморфизм обеспечивается в конечном итоге единством законов логики, лежащих в основе допустимых преобразо­ваний.



**Рис. 1.1**

Основными объектами традиционных разделов логики являются высказывания.

*Высказывание -* повествовательное предложение *(утвер­ждение, суждение), о* котором имеет смысл говорить, что оно *истинно* или *ложно.* Все научные знания (законы и яв­ления физики, химии, биологии и др., математические тео­ремы и т.п.), события повседневной жизни, ситуации, воз­никающие в экономике и процессах управления, фор­мулируются в виде высказываний. Повелительные и вопро­сительные предложения не являются выс­казываниями.

Примеры высказываний: "Дважды два - четыре", "Мы живем в XXI веке", "Рубль - российская валюта", "Алеша - брат Олега", "Операции объединения, пересечения и дополнения являют­ся булевыми операциями над множествами", "Человек смер­тен", "От перестановки мест слагаемых сумма не меняет­ся", "Сегодня понедельник", "Если идет дождь, вам следует взять зонт".

Для того чтобы далее оперировать этими предложениями как высказываниями, мы обязаны знать относительно каж­дого из них, истинно оно или ложно, т.е. знать их *истиннос­тное значение (истинность).* Заметим, что в ряде случаев истинность или ложность высказывания зависит от того, ка­кую конкретную реальность (систему, процесс, явление) мы пытаемся с его помощью описать. В таком случае говорят, что данное высказывание истинно (или ложно) в данной интерпретации (контексте). Далее предполагаем, что контекст задан и высказывание имеет определенное истинностное значение.

**1.3 История развитая математической логики**

Логика как наука сформировалась в 4 в. до н.э. Ее создал гречес­кий ученый Аристотель.

Слово «логика» происходит от греческого "логос", что с одной стороны означает "слово" или "изложение", а с другой мышление. В толковом словаре Ожегова С.И. сказано: "Логика наука о законах мышления и его формах".В 17 в. немецкий ученый Лейбниц задумал создать новую науку, ко­торая была бы «искусством исчисления истины»*.* В этой логике, по мысли Лейбница, каждому высказыванию соответствовал бы символ, а рассуждения имели бы вид вычислений. Эта идея Лейбница, не встретив понимания современников,не получила распространения и развития и осталась гениальной догадкой.

Только в середине 19 в. ирландский математик Джордж Буль воплотил идею Лейбница.В 1854 году им была написана работа "Исследование законов мышления" (Investigation the laws of thought), которая заложила основы алгебры логики, в которой действуют законы, схожие с законами обычной алгебры, но буквами обозначаются не числа, а высказывания. На языке булевой алгебры можно описать рассуждения и "вычислить" их результаты. Однако ею охватываются далеко не все рассуждения, а лишь определенный тип их**,** поэтому алгебру Буля считают исчислением высказываний.

Алгебра логики Буля явилась зародышем новой науки – математической логики. В отличии от нее, логику Аристотеля называют традиционной формальной логикой. В названии "математическая логика" отражены две особенности этой науки: во-первых, математическая логика - это логика, использующая язык и методы математики; во-вторых, математическая логика вызвана к жизни потребностями математики.

В конце 19 в. созданная Георгом Кантором теория множеств предста­влялась надежным фундаментом для всей математики, в том числе и математической логики, по крайней, мере, для исчисления высказываний (алгебры Буля),т.к. оказалось, что алгебра Кантора (теория множеств) изоморфна алгебре Буля.

Математическая логика сама стала областью математики, поначалу казавшейся в высшей степени абстрактной и бесконечно далекой от практических приложений. Однако эта область недолго оставалась уделом "чистых" математиков. В начале 20 в. (1910 г.) русский ученый Эренфест П.С. указал на возможность применения аппарата булевой алгебры в телефонной связи для описания переключательных цепей. В 1938-1940 г. почти одновременно появились работы советского ученого Шестакова В. И., американского ученого Шеннона и японских ученых Накасимы и Хакадзавы о применении математической логики в цифровой технике. Пер­вая монография, посвященная использованию математической логики при проектировании цифровой аппаратуры, была опубликована в СССР советским ученым Гавриловым М.А. в 1950 г. Чрезвычайно важна роль математической логики в развитии современной микропроцессорной техники: она исполь­зуется в проектировании аппаратных средств ЭВМ, в разработке всех языков программирования и в конструировании дискретных устройств автоматики.

Большой вклад в развитие математической логики сделали ученые разных стран: профессор Казанского Университета Порецкий П.С., де-Морган, Пирс, Тьюринг, Колмогоров А.Н., Гейдель К. и др.

**1.4 Вопросы для самопроверки.**

 1. Сформулируйте задачи курса «математическая логика и теория алгоритмов».

 2. Назовите области использования логических представлений.

 3. Назовите имена ученых в области математической логики.

 4. Назовите этапы развития математической логики.

# 2. Основы математической логики

**2.1 Логика высказываний. Основные понятия и определения.**

Основными понятиями математической логики, с которымимы будем постоянно оперировать, являются логические высказывания, высказывательные формы (или пропозициональные формулы), предикаты и кванторы. Высказывание - это предложение, которое либо истинно, либо ложно. Например, высказывание "Москва - столица России" является истинным, а "Волга впадает в Балтийское море" - ложным. Не всякое предложение является высказыванием. Логическими высказываниями являются утвердительные предложения, относительно которых можно говорить об истинности или ложности. Вопросительные и повелительные предложения не являются логическими высказываниями. Если предложение истинно, то его значение истинности равно 1, если ложно - то 0. По аналогии с элементарной алгеброй, где любое число является константой, высказывание является логической константой, величина которой равна 1 или 0.

Предложение "х2 = 4" не является высказыванием, для того, чтобы имело смысл говорить об его истинности или ложности, необходимы допол­нительные сведения, в частности, какое число обозначено буквой "х", т.к. она может не обозначать конкретного числа, - а быть переменной, т.е. представлять элементы некоторого множества, например (-2. О, 2, 4).

Каждому значению переменной соответствует либо истинное, либо ложное высказывание; например высказывания (-2)2 = 4, 22 =4 истинны, остальные ложны.

***Предложение, которое содержит хотя бы одну переменную* и *становится высказыванием при подстановке вместо всех переменных* их значений, *называют высказывательной или пропозициональной (ПФ) формой.***

Аналогом ПФ в элементарной алгебре являются алгебраические формулы или арифметические выражения.

**2.2 Предикаты и кванторы**

Рассмотрим высказывательную форму *cos*х=1. Каждому значению "х" на множестве действительных чисел эта форма ставит в соответствие высказываниеи**,** тем самым, одно из значений истинности {0,1}. Так значению х = 0, соответствует истинное высказывание *cos0* = 1, при х = 2π соответствует истинное высказывание *cos*2π = 1, вообще всякому значению х кратному 2х соответствует истинное высказывание, а всем остальным значениям ложные высказывания. Т.о. данная высказывательная форма задает отображение множества R действитель­ных чисел на множество {1, 0} или {и, л}, иначе говоря, задает функцию с областью определения R и множеством значений {1, 0}.

Говорят, что определена некоторая функция, если, во-первых, зада­но некоторое множество, называемое областью определения функции или областью отправления, во-вторых, задано некоторое множество, назы­ваемое областью значений (прибытия) функциии**,** в-третьих, указанно определенное правило, с помощью которого каждому элементу, взятому из области определения, становится в соответствие некоторый элемент из области значений.

Произвольный элемент взятый из области определения функции назы­вается *аргументом* и обозначается “х”. Правило соответствия обозначае­тся F, т.о. запись у=F(х) означает, что х - аргумент, у - функция, F - правило соответствия.

***Функция, область определения которой задана множеством М, а все значения которой, принадлежат множеству {1, 0} называется предикатом.***

Пример 1: Если переменная “х” в высказывательной форме "Река х впадает в Каспийскоеморе" принимает значение из множества М названий всевозможных рек, то эта форма задает предикат.

Из высказывательных форм можно получать высказывания не только подстановкой вместо переменныхих значений, но и с помощью специальных слов: "всякий" (а также его синонимов "любой", "каждый") и "су­ществует" ("некоторые", "по меньшей мере один") например из высказывательной формы: "Число х делится на 7" можно получить ложное высказывание “Всякое число х делится на 7” и истинное высказывание "Существует число х, которое делится на 7".

Выражение "для всякого х" называется *кванторам общности* по переменной х (вместо х может быть любая другая переменная) и запи­сывается ∀ х (Ф (х)).

Выражение, "существует х, такое что..." называется *квантором существования* по переменной х и обозначается ∃ х (Ф(х)), что означает существует значение "х" такое, что Ф(х) при этом значении - истинное высказывание. Переход от формы Ф(х) к высказыванию ∀ х (Ф(х)) или ∃ х (Ф(х)) называется операцией *квантификацией формы* Ф(х). Будем называть переменную "х" в Ф(х) после применения к ней операции квантификации *связанной переменной.* В отличие от связанных переменных, переменные в первоначальном смысле слова называются свободными *переменными.*

**2.3 Булевы функции, булевы константы.**

***Булевыми функциями (или функциями алгебры логики или истинностными функциями) называются функции, значения которых равны 0 или 1 и аргументы которых принимают только два значения 0 и 1.***

Булевы функции могут быть заданы специальными таблицами истин­ности или аналитически в виде специальных высказывательных форм, называемых иногда булевыми формами.

Выражения, содержащие одну или несколько переменных (аргумен­тов), соединенных знаками логических операций, называются *логическим формами*. Высказывания, не содержащие ни одной переменной, называются константами. В логике, в отличие от арифметики, только две константы 0 - false и 1- true.

Напомним, что *форма называется числовой,* если при допустимом зна­чении своих аргументов, она обозначает число (является числом). Булева форма является частным случаем числовой формы. Т.о. при помощи суперпозиции, исходя из логических операций над логическими переменными, можно строить сложные составные высказывания и затем вычислятьих. Такого рода составные высказывания являются частным случаем так называемых булевых функций, которые являются предметом изучения математической логики. Обобщая все сказанное, можно дать определение булевых функций:

***Булевыми функциями, называются предикаты, все аргументы которых определены на множестве {0, 1}, интерпретируемые как {ложь, ис­тина}.***

Можно сказать, что понятие булевой функции является частным случаем понятия предиката. Отличие состоит лишь в том, что у булевой функции четко фиксирована как область определения {0, 1}, так и область значений функции {0, 1}, в то время как у предиката четко фиксирована только одна область значений {0, 1}, в то время как область определения задана произвольным множеством.

В свою очередь понятие предиката является частным случаем понятия функции, отличие состоит в том, что у предиката четко фиксирована область значений {0, 1}, а у функции это может быть вся числовая ось.

**2.4 Основные логические связи.**

Будем называть *высказывание простым (элементарным),* если оно рассматривается нами как некое неделимое целое (аналогично атому или элементу множества). Обычно к ним относят высказывания, не содержащие логических связок. *Сложным (составным)* называется *высказывание,* составленное из про­стых с помощью *логических связок.*

В естественном языке (при вербальном описании явле­ния) роль связок при составлении сложных предложений из простых играют грамматические средства: со­юзы "и", "или", "не"; слова "если ..., то", "либо ... либо" (в разделительном смысле), "тогда и только тогда, когда" и др. В логике высказываний логические связки, используемые для составления сложных высказываний, обязаны быть опреде­ленными точно. Рассмотрим основные логические связки.

### Отрицание (логическая связь "не")

Записывается Р=Ā или в виде P= ¬A (Читается "Р есть не А"). *Отрицанием называется сложное логическое высказывание Р, которое истинно, если А ложно и наоборот.* Эта логическая связь может быть проиллюстрирована табл. 3.1, в которой показаны значения истинности сложного высказывания Р в зависимости от значения истинности составляющего его простого высказывания А. Логический элемент «не» в схемах управления часто называется таблица 2.1 схемах управления, часто называется *инвертором.* Условное обозначение инвертора показано на рис. 2.1. Также ниже (рис. 2.2) приведена диаграмма Венна.



Табл. 2. 1



Рис. 2.1 Условное обозначение инвертора



Рис. 2.2



Рис. 2.3 Диаграмма Венна (отрицание)

Отрицание является простейшей логической операцией и единственной логической операцией, выполняемой над одним аргументом.

Заметим, что последовательное выполнение двух операций отрицания Ā приводит к исходному значению А.

### Конъюнкция

Р = А  В; Р = А & В. (Читается Р есть А и В). *Конъюнкция -* сложное логическое высказывание, которое истинно только в случае истинности всех составляющих высказываний, в противном случае ложно. Эта логическая связь проиллюстрирована табл. 2.2.



Табл. 2. 2

В схемах управления логическая операция конъюнкция реализуется в схеме совпадения, показаннойна рис. 2.4. Операция конъюнкция часто называется логическим умножением или логической связью "и".



Рис. 2.4 Условное обозначение логического элемента "и"



Рис. 2.5 Диаграмма Венна (конъюнкция)

Заметим, что A  0 = 0; A  Ā = 0; A  1 = A.

### Дизъюнкция

Р = А  В (читается Р есть А или В). Дизъюнкция - это сложное логическое высказывание, которое ложно только в случае ложности всех составляющих высказываний, в противном случае истинно (vel - или (лат.)).

Дизъюнкция проиллюстрирована табл. 2.3.



Табл. 2. 3

Операция дизъюнкции часто называется *логическим сложением,* а также логической операцией "ИЛИ". Схему, воспроизводящую операцию логического сложения обычно называют собирательной схемой*.* Она изображена на рисунке 2.6.

 

Рис. 2.6 Условное обозначение логического элемента "ИЛИ"



Рис. 2.7



Рис. 2.8 Диаграмма Венна (дизъюнкция)

Заметим, что A  1 = 1; A  Ā = 1.

Из двух простых высказываний при помощи логических связей можно образовать 16 логических высказываний. Но отрицание, конъюнкция и дизъюнкция являются основными логическими связями, так как все остальные можно образовать из основных логических связей.

### Импликация.

Импликацией высказываний А и В называется высказывание, обозначенное символами А  В, которое ложно тогда и только тогда, когда А истинно, а В ложно. Читается А влечет В либо "А имплицирует В", импликация - это логическая операция, соответствующая союзу "если... то". Запись А  В означает то же, что и высказывание : "если А то В", "из А вытекает В" "А есть достаточное условие для В", для того чтобы А необходимо, чтобы В ", "В есть необходимое условие для А", " для того чтобы В, достаточно чтобы А". Сравним такие предложения :

1. Если число n делится на 4, то оно делится на 2.

2. Если Иванов увлечен математикой, то Петров ничем не интересуется.

Очевидно, что смысл союза "если... то" в этих предложениях различный. Определение импликации, представленное таблицей истинности,



соответствует смыслу союза, "если... то" в первом предложении. В импликации А  В первый член А называется антецедентом (от лат. antecedens - предшествующий), а второй член В - консеквентом (от лат. consequens - последующий). Из определения импликации следует, что :

1. Импликация с ложным антецедентом всегда истинна.

2. Импликация с истинным консеквентом всегда истинна.

3. Импликация ложна тогда и только тогда, когда ее антецендент истинный, а консеквент ложный.

Принятое определение импликации соответствует употреблению союза "если... то" в предложении "Если будет хорошая погода, то я приду к тебе в гости", которое вы расцените как ложь в том случае, когда пого­да хорошая, а приятель к вам не придет.

Вместе с тем определение импликации вынуждает считать истинным предложения как "Если 2х2=4, то Москва столица России"; "Если 2х2=5, то я самая красивая девушка России". Это связано с тем, что определениями логических операций смысл составляющих высказываний не учитывается, они рассматриваются как объекты, обладающие единственным свойством - быть истинными либо ложными.



Рис. 2.9 диаграма Венна (импликация)

### Эквиваленция или равнозначность

*Эквивалвниией высказываний А и В называется высказывание, обозначаемое символом А  В (или ≡,~⇔*), *которое истинно тогда и только тогда, когда значения истинности высказываний А и В совпадают.* (см. таблицу).

Логическая операция, называемая эквивалентностью, соответствует союзу "тогда и только тогда, когда" и читается "А эквивалентно В", "Для того, чтобы А необходимо и достаточно, чтобы В".

Когдамы говорим "А только тогда, когда В" то имеем в виду, что оба предложения А и В одновременно истинны, либо одновременно ложны. Например, говоря: "Я поеду в Ленинград тогда и только тогда, когда ты поедешь в Киев", мы утверждаем, что-либо произойдет и то и другое, либо ни того, ни другого. Можно доказать используя таблицу истинности, что для любых высказываний А и В высказывание (А  В) = 1 тогда и только тогда, когда (А  В) = 1 и (В  А) = 1.

Это утверждение используется при доказательстве теорем вида А  В. Одним из способов доказательства истинности высказывания А  В является доказательство истинности высказывания А  В (необходимость) и истинности высказывания В  А (достаточность).

***Высказывания А и В называются равносильными., если (А  В) = 1 говорят, что формулы F1 и F2 равносильны, если их эквиваленция F1  F2 - тавтология (тождественно истинное высказывание).***



Рис. 2.10 Диаграмма Венна (эквиваленция)

Запись F1 ≡ F2 читается : "формула F1 равносильна формуле F2"

А  В ≡ (А ⇒ В) ∧ (В ⇒ А)

*Равносильность* есть отношение между формулами (также как равенст­во отношение между числами, параллельность - отношение между прямыми). Отношение равносильности обладает следующими свойствами:

а) рефлективности F ≡ F

б) симметричности: если F1 ≡F2 то F2 ≡F1

в) транзитивности: если F1≡F2и F2 ≡F3, то F1 ≡F3

Таким образом, в математической логике для записи более сложных высказываний используются следующие логические операции над простыми высказываниями:

¬ НЕ

& И

∨ ИЛИ

⇒ влечет

⇔ совпадает.

Логическое выражение служит для задания вычислительного процесса нахождения логического значения, подобно тому, как в математике арифметическое выражение служит для задания правил вычисления некоторого числового значения. Напомним, что логическое выражение может иметь только одно из двух возможных значений true (1) или false (0).

Все рассмотренные логические операции иллюстрируются в сводной таблице ##, где булевские числа true и false заменены 1 и 0 соответственно.



Порядок старшинства логических операций следующий: ¬, &, ∧, ⇒, ⇔.

Для изменения порядка выполнения логических операций используются круглые скобки. В первую очередь выполняются операции в скобках, затем все остальные логические операции в порядке старшинства слева направо.

**2.5 Вопросы для самопроверки.**

1. В данных составных предложениях выделите составляющие их элементарные предложения и логические связки:

а) диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам;

б) треугольник является равносторонним тогда и только тогда, когда все его углы конгруэнтны.

2. Определите значение истинности высказываний A, B, C, D, если:

а) А ∧ (2 \* 2) = 4 – истинное высказывание;

б) В ∧ (2 \* 2) = 4 – ложно;

в) С ∨ (2 \* 2) = 5 – истинно;

г) В ∨ (2 \* 2) = 5 – ложно;

3. Изобразите на координатной плоскости множество точек, коор­динаты которых обращают следующие высказывательные формы в истинные высказывания :

а) (х > 0) ∧ (у > 0), б) (х > 0) ∧ (у < 0), в) (х < 0) ∧ (у < 0)

г) (х = 0) ∨ (у = 0), д) (х = 0) ∧ (у = 0), е) (х > 0) ∨ (у > 0)

ж) (х > 0) ∨ (у = 0), з) (х > 0) ∨(у < 0).

4. Сформулируйте и запишите в вида конъюнкции или дизъюнкции условие истинности каждого предложения :

а) ab ≠ 0, б) ab = 0, в) а2 + b2 = 0, г) а / b = 0, д) | а | > 2, е) | а | < 2

5. Следующие предложения запишите без знака отрицания :



6. Определите значения истинности следующих высказываний :

а) если 12 делится на 6, то 12 делится на 3;

б) если 11 делитсяна 6, то 11 делится на 3;

в) если 15 делится на 6, то 15 делится на 3;

г) если 15 делится на 3. то 15 делится на 6;

д) если Париж расположен на Темзе, то белые медведи живут в Африке;

е) 12 делится на 6 тогда и только тогда, когда 12 делится на 3;

ж) 11 делится на 6 тогда и только тогда, когда 11 делится на 3;

з) 15 делится на 6 тогда и только тогда, когда 15 делится на 3.

7. Пусть через А обозначено высказывание "9 делится на З", а через В - высказывание "10 делится на З". Определите значения истин­ности следующих высказываний:

; ; ; ; ; ; ; ; ; ; .

8. Определите значение истинности высказываний A, B, C, D в предложениях, а, б, д, е из которых истинны, а в, г, ж, з – ложны:

а) Если 4 нечетное число, то А;

б) Если В, то 4 нечетное число;

в) Если 4 четное число, то С;

г) Если D, то 4 нечетное число;

д) А ⇔ (2 < 3);

е) В ⇔ (2 > 3);

ж) С ⇔ (2 < 3);

з) D ⇔ (2 > 3).

9. Придумайте по два примера : а) истинной импликации с истинным антецедентом; б) истинной импликации с ложным консеквентом; в) ложной импликации; г) истинной эквивалентности; д) ложной эквива­лентности.

10. Сформулируйте в виде импликации: "Диагонали ромба взаимно перпендикулярны", "Во всяком треугольнике сумма внутренних углов равна 180°".

11. Найдется ли такой день недели, когда: а) утверждение "Если сегодня понедельник, то завтра пятница" истинно; б) "Если сегодня понедельник, то завтра вторник" ложно.

12. Известно, что если число делится на 6, оно делится на 3 и 2. Сформулируйте это в виде импликации.

# 3. Алгебра логики.

**3.1 Понятие алгебры.**

 Функцию типа *f*: Mn→M будем называть n - арной операцией на множестве М; n называется арностью операции *f*.

 **Алгеброй А называется совокупность < > множества М с заданными на нём операциями S={f11, f12,..., f1k, f21, f22, ..., f2l, ..., fn1, ..., fnm}**

 **A=<M,S>, где М - называется основным или несущим множеством (или просто носителем) алгебры А. Вектор арностей алгебры называется её типом, совокупность операций S - сигнатурой алгебры.**

 Первый индекс у идентификатора операции указывает её местность. Для идентификации единого целого, содержащего объекты, которые имеют различное математическое строение, например множество операций в нём, было предложено использовать термин совокупность и обозначать его угловыми скобками.

 В этой главе особую роль будет играть двухэлементное множество В и двоичные переменные, принимающие значения из В. Его элементы часто обозначаются 0 и 1, однако они не являются числами в обычном смысле. Наиболее распространённая интерпретация переменных - логическая: 1 - истинно, 0 - ложно. В контексте, содержащем одновременно двоичные и арифметические величины и функции, эта интерпретация фиксируется явно: например, в языках программирования (Паскаль и др.) вводится специальный тип переменной - логическая переменная, значения которой обозначаются true и false.

 Алгебра, образованная множеством В вместе с всеми возможными операциями на нём, называется алгеброй логики. Функцией алгебры логики (или логической функцией) от n переменных называется n - арная операция на B. Множество всех логических функций обозначается P2, множество всех логических функций от n переменных – P2(n). Алгебра, образованная к - элементным множеством вместе со всеми операциями на нём, называется алгеброй к - значной логики, а n - арные операции на к - элементном множестве называются к - значными логическими функциями n переменных; множество всех к - значных функций обозначается Pk. Множество всех к - значных логических функций от n переменных обозначается Pk(n).

 Всякая логическая функция n переменных может быть задана таблицей истинности, в левой части которой перечислены все 2n наборов переменных (т.е. двоичных векторов длины n), а в правой части - значения функций на этих наборах. Наборы, на которых функция *f* = 1, часто называют единичными наборами функции *f*, а множество единичных наборов - единичным множеством *f*. Соответственно наборы, на которых *f* = 0, называют нулевыми наборами *f*.

 В таблице истинности наборы расположены в определённом порядке - лексикографическом, который совпадает с порядком возрастания наборов, рассматриваемых как двоичные числа. Этим упорядочением будем пользоваться и в дальнейшем. При любом фиксированном упорядочении наборов логическая функция n-переменных полностью определяется вектор - столбцом значений функции, т.е. 2n. Поэтому мощность множества |P2(n)| т.е. число различных логических функций n переменных равно числу различных двоичных векторов длины 2n, т.е. N =.

 **Переменная *x*i в функции *f*(x1, x2, ..., x(i-1), xi, x(i+1), ..., xn) называется несущественной (или фиктивной), если *f*(x1, x2, ..., x(i-1), 0, , x(i+1), ..., xn) = *f*(x1, x2, ..., x(i-1), 1, x(i+1), ..., xn) при любых значениях остальных переменных, если изменение значения xi в любом наборе x1,..., xn не меняет значения функции.**

 В этом случае функция *f*(x1,..., xn) по существу зависит от n-1 переменной, т.е. представляет собой функцию *g*(x1, x2, ..., x(i-1), x(i+1), ..., xn-1) от n-1 переменной. Говорят, что функция *g* получена из функции *f* удалением фиктивной переменной xi, а функция *f* получена из *g* введением фиктивной переменной, причём эти функции по определению считаются равными. Например, запись *f*(x1, x2, x3)= *g*(x1, x2) означает, что при любых значения x1 и x2 *f* = *g* независимо от значения переменной x3.

 Смысл удаления фиктивных переменных при минимализации функции очевиден, поскольку они не влияют на значения функции и являются с этой точки зрения лишними. Однако иногда бывает полезно вводить фиктивные переменные. Благодаря такому введению всякую функцию от n переменных можно сделать функцией большего числа переменных.

 В частности, только это доказанное равенство |P2(n)|= справедливо при условии, что P2(n) содержит все возможные функции n переменных, в том числе и функции с фиктивными переменными.

**3.2 Основные логические функции**

В алгебре логики логические формулы рассматриваются как алгебраические выражения, которые можно преобразовывать по определен­ным правилам, реализующим логические законы. Алгебра логики как раздел математической логики изучает строение сложных логических высказываний (логических формул) и способы установления их истинности с помощью алгебраи­ческих методов.

Основные объекты, изучаемые в этом разделе, - *формулы алгебры логики,* состоящие из букв, знаков логических опе­раций и скобок. Буквы обозначают *логические (двоичные) переменные,* которые принимают только два значения -"ложь" и "истина". Знаки операций обозначают *логические операции* (логические связки). Каждая формула задает *логическую функцию -* функцию от логических переменных, ко­торая сама может принимать только два логических значе­ния.

Итак, пусть *В* = {0, 1} - бинарное множество, элемента­ми которого являются формальные символы 1 и 0, не имею­щие арифметического смысла и интерпретируемые как {"да", "нет"}, {"истинно", "ложно"} и т.д.

***Алгебра логики -* алгебра, образованная множеством *В* ={0, 1} вместе со всеми возможными операциями на нем.**

***Функцией алгебры логики* (или *логической функцией) f* от *п* переменных *f* (*х1*, *х2 ..., хn)* называется *п-арная логичес­кая операция* на *В,* т.е. *f*: *Вn —> В.* Множество всех логичес­ких функций (логических операций) обозначается *Р2*, мно­жество всех логических операций *п* переменных - *Р2 (п).***

Любую логическую функцию *f* (*х1*, *х2 ..., хn)* можно задать *таблицей истинности,* в левой части которой выписаны все возможные наборы значений ее аргументов *х1*, *х2 ..., хn,,* а пра­вая часть представляет собой столбец значений функций, соответствующих этим наборам. Набор значений перемен­ных, на котором функция принимает значение *f*=1, называ­ется *единичным набором функции* *f*; множество всех еди­ничных наборов - *единичным множеством функции f.* Ана­логично набор значений, на котором / = 0, называется *нулевым набором функции f,* а множество нулевых наборов - *нулевым множеством.*

Число всех возможных различающихся наборов значений *п* переменных логической функции *f* (*х1*, *х2 ..., хn)*  равно 2n (рав­но числу всех возможных двоичных векторов длины *п).* Число всех различных функций *п* переменных равно числу возмож­ных расстановок нулей и единиц в столбце с 2n строками, т.е. *|Р2 (п)|=* 22n.

Особую роль в алгебре логики играют логические функ­ции одной и двух переменных *- унарные* и *бинарные логи­ческие операции,* так как очевидным образом интерпретиру­ются естественными логическими связками "не", "и", "или" и т.д., широко используемыми при описании систем, явле­ний, формализации рассуждений и пр.

φ0 и φ3, - константы 0 и 1 соответственно. Значения этих функций не зависят от переменной*х****,*** в таких случаях говорят, что переменная *х* является *несущественной (фиктивной)* для этих функций;

φ1(х) *=х* (повторение переменной).

**Таблица 3.1**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *х* | φ0 | φ1 | φ2 | φ3 |
| 01 | 00 | 01 | 10 | 11 |
|  |  |  |  |  |

Множество всех логических функций двух переменных *Р2*(2) *-*  бинарных логических операций - представлено в табл. 3.2 своими таблицами истинности; |*Р2*(2)| = 16 функций, из которых шесть имеют фиктивные переменные.

**Таблица 3.2**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *х1 х2* | φ0 | φ1 | φ2 | φ3 | φ4 | φ5 | φ6 | φ7 |
| 0 00 11 01 1 | 0000 | 0001 | 0010 | 0011 | 0100 | 0101 | 0110 | 0111 |
|  | Кон-станта 0 | Конъ-юнк-ция | Левая ко-имплика-ция | Переменная *х1*  | Правая ко-имплика-ция | Перемен-ная *х2*  | Сложе-ние по mod 2 | Дизъ-юнк- ция |
|  | 0 | & | → | *х1* |  ← | *х2* |  | ٧ |

**Продолжение таблицы**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *х1 х2* | φ8 | φ9 | φ10 | φ11 | φ12 | φ13 | φ14 | φ15 |
| 0 00 11 01 1 | 1000 | 1001 | 1010 | 1011 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 |
|  | Стрелка Пирса | Экви-валент-ность | Отрица-ние *х2* | Правая имплика-ция | Отрица-ние *х1* | Левая имплика-ция | Штрих Шеф-фера | Кон-станта 1 |
|  | ↓ | ~ | *¬ х2* | *←* | *¬ х1* | *→* | | | 1 |

В двух нижних дополнительных строках таблицы указаны наиболее употребляемые наименования логических операций и их обозначения, которые, однако, не являются единственными. Например:

φ1(*х1*, *х2*) *-* конъюнкция (логическое умножение, операция И), обозначается:

*х1 & х2*, *х1 · х2* (часто *х1  х2*), *х1 Λ х2;*

φ7(*х1*, *х2*) *-* дизъюнкция (логическое сложение, операция ИЛИ), обозначается:

 *х1 ٧ х2,* иногда *х1* + *х2* и т.п.

Логические функции трех и более переменных обычно за­даются (наряду с таблицами истинности) также формулами бинарных операций. Например, выражение *f* (*х1*, *х2, х3)* = (*х1 ٧ х2)* → *(х1 & х3)* означает, что функция трех переменных *f* задана формулой, состоящей из символов этих перемен­ных *х1*, *х2, х3*, над которыми выполняются одна унарная операция отрицания и три бинарные операции: дизъюнкция (٧), импликация *(→)* и конъюнкция (&).

Наиболее употребляемыми являются операции: *¬*, ٧, &, →, ~, mod2, |, ↓. Значение любой логической формулы, со­держащей знаки этих операций, можно вычислить для лю­бого набора значений переменных, используя табл. 3.1 и 3.2.

Таким образом, *формула* наряду с *таблицей* служит *спо­собом задания* и вычисления функции. В общем случае фор­мула описывает логическую функцию как *суперпозицию* других более простых функций.

*Эквивалентными,* или *равносильными,* называются фор­мулы, представляющие одну и ту же функцию (эквивалент­ность формул в алгебре логики обозначается знаком = ).

Стандартный метод установления эквива­лентности двух формул:

1) по каждой формуле восстанавливается таблица истин­ности;

2) полученные таблицы сравниваются по каждому набо­ру значений переменных, (стандартный метод требует 2 • 2n вычислений).

**3.3 Основные законы алгебры логики**

В алгебре логики введена система аксиом, определяющая свойства и отношения основных операции, т.е. таких действий, с помощью которых из конечного числа некоторых заданных элементов алгебры строятся новые элементы.

Алгебра логики строится на определенной системе аксиом.

### Постулаты алгебры логики

1. Существуют такие 0 и 1, что =1 и =0. Необходимо отме­тить, что цифры 0 и 1 не выражают здесь количественных соотношений и являются не числами, а символамии**,** следовательно, алгебра логики является не алгеброй чисел, а алгеброй состояний.

2. Переменная может принимать лишь одно из двух возможных значений

x = 0, если, x ≠ 1

x = 1 если, x≠ 0

3. Действия с константами

0 ∧ 0 = 0 1 ∨ 1 = 1

1 ∧ 1 = 1 0 ∨ 0 = 0

1 ∧ 0 = 0 0 ∨ 1 = 1

0 ∧ 1 = 0 1 ∨ 0 = 1

Каждая из приведенных аксиом состоит из двух частей, что соответ­ствует правилу инверсии, которое заключается в том, что любая аксиома может быть преобразована в другую одновременной заменой цифра 0 на цифру 1 и операции умножения на сложение, и наоборот.

На основании этих аксиом выводятся все теоремы, выражающие основ­ные законы алгебры логики.

### Законы алгебры логики. Теоремы одной переменной

1. *Закон, тождества Х=Х.* Необходимо, чтобы мысль, заключенная в высказывании не менялась в течение всего рассуждения.

2. *Закон нулевого множества:*

0 ∧ а = 0

0 ∨ а = а

0 ∧ а ∧ b ∧ … ∧ x = 0

Т.е. произведение любого числа переменных обращается в нуль, если какая-либо одна переменная имеет значение "0" независимо от значения других переменных.

3. Закон универсального множества:

1 ∧ а = а

1 ∨ а = 1

1 ∨ а ∨ b ∨ … ∨ z = 1

4. Закон тавтологии, повторения (идемпотентности):

а ∧ а∧ … ∧ а = а

а ∨ а ∨ … ∨ а = а

Истина, повторенная несколько раз, все равно, остается только истиной.

5. Закон двойной инверсии (инволютивности): . Отрицание отрицания равносильно утверждению.

6. Законы дополнительности:

а) закон логического противоречия . Произведение любой пере­менной и ее отрицания всегда ложно (утверждение "речка дви­жется и не движется" всегда ложно);

б) закон исключенного третьего . Сумма любой переменной и ее отрицания всегда истинна: "Студент или сдаст экзамен или не сдаст". "Паду ли я стрелой пронзенный, иль мимо пролетит она".

### Теоремы для двух и трех переменных

7. Коммутативные (переместительные) законы:

а ∧ b = b ∧ а

а ∨ b = b ∨ а

От перемены мест слагаемых сумма не меняется.

8. Ассоциативные (сочетательные) законы:

а ∧ (b ∧ c) = (a ∧ b) ∧ c ассоциативность конъюнкции.

а ∨ (b ∨ c) = (а ∨ b) ∨ c ассоциативность дизъюнкции.

Для записи умножения или сложения скобки можно опустить.

9. *Дистрибутивные (распределительные) законы:*

а) умножение относительно сложения

а ∧ (b ∨ c) = а ∧ b ∨ а ∨ c

а (b + с) = аb + ас (в обычной алгебре)

б) сложение относительно умножения

a ∨ b ∧ c = (a ∨ b) ∧ (a ∨ c)

a+bc ≠ (a+b) (a+c) (в обычной алгебре)

10. Законы инверсии (правило де Моргана)



11. Обобщение законов де Моргана, предложенное Шенноном:



т.е. инверсия дизъюнкции и конъюнкции получается заменой каждой переменной ее инверсией и одновременно взаимной заменой символов суммы и произведения.

12. Законы поглощения



13. *Закон контрапозиции* . Согласно закону контрапозиции два высказывания вида  и одновременно истинны или одновременно ложны. Вместо заданной теоремы можно доказать обратно противоположную теорему. Например. "Если m2 нечетно, то m - нечетно". Докажем что если m четно, то m2 четно. Действительно, если m = 2n, то m2 = 4n2.

14. Закон транзитивности импликации (закон силлогизма).

(а ⇒ b) ∧ (b ⇒ с) ⇒( а ⇒ с)

15. Закон транзитивности эквиваленции.

(а ⇔ b) ∧ (b ⇔ с) ⇒( а ⇔ с)

16. Закон противоположности.

(а ⇔ b)⇔ (¬а ⇔¬b)

17. Законы склеивания (распространения).



**3.4 Тавтологии. Равносильные формулы**

 ***ПФ, значения которых для любого набора переменных есть 1 (соответственно 0) будем называть тождественно истинными формулами, или тавтологиями (тождественно-ложными ПФ или противоречием).***

Тавтологии играют в логике особо важную роль как формулы, отражающие логическую структуру предложений, истинных в силу одной только этой структуры. Для доказательства того, что ПФ является тавтологией доста­точно построить таблицу истинности для этой ПФ. Перечислим некоторые основные тавтологии или законы логики. Обозначим | = А, что А тавтология. Справедливость | = и ≡ вытекает из определений:

1. | = х ≡ х - закон тождества

2. | = ≡ 0 - закон противоречия

3. | = ≡1 - закон исключенного третьего

4. | = ≡ х - закон двойного отрицания

5. | = =  - закон идемпотентности

6.  -законы де Моргана

7. | =  - закон контрапозиции

8. | = - закон транзитивности импликации (закон силлогизма)

9. | =  - закон противоположности

10.| =  - закон транзитивности эквиваленции

Законы 1-3 выражают законы формальной логики, выведенные Аристо­телем. Закон тождества требует, чтобы мысль, заключенная в высказыва­нии не изменялась в течении всего рассуждения. Закон противоречия говорит, что одна и та же мысль не может быть одновременно и истин­ной и ложной.

В силу законов идемпотентности в алгебре логики нет показателей степени и коэффициентов (idem - "то же", potentia - сила).

Смысл законов де Моргана можно выразить так: отрицание дизъюнк­ции равно конъюнкции отрицаний и vice versa. Согласно закону контрапозиции два предложения вида  и одновременно истинны или одновременно ложны.

***Две ПФ  и  назовем равносильными, если для любых наборов  они принимают одинаковые значения.***

Это обозначается А≡В и читается "А равносильно В" (равно­сильность рефлексивна, симметрична и транзитивна).

Теорема 1. А ≡ В тогда и только тогда, когда | = А ⇔ В. Убедимся, что теорема верна, если докажем необходимость: если А≡В, то | = А ⇔ В; достаточность: если | = А ⇔ В, то А ≡ В. Справедливость этих утверждений вытекает непосредственно из оп­ределений.

Принцип двойственности: *Если две формулы, (не содержащие знаков* **⇒,** *и ⇔) равносильны*, *то двойственные ил формулы равносильны.*

*Две формулы называются двойственными, если каждую из них можно получить из другой заменой* ∧, ∨ , 1, 0 *соответственно* на ∨ , ∧, 0 и 1 (X ∨ 0 = Х ∧ 1).

Обратные и противоположные теоремы. Для каждого предложения, формализованного импликацией А ⇒ В, можно составить три таких пред­ложения В ⇒ А,  и . Предложение В ⇒ А называется об­ратным данному, предложения  противоположным данному и  обратно противоположным. Для всякой теоремы вида "если А, то В" можно сформулировать обратное ей предложение "если В, то А". Однако не для всякой теоремы предложение ей обратное является истинным. Например: "если два прямоугольника конгруэнтны, то их площади равны", обратное: "Если площади двух прямоугольников равны, то они конгруэнтны" - неверно. Если А ⇒ В теорема, то А есть достаточное условие В, а В необходимое условие А. Если оба взаимообратных предложения А ⇒ В и В ⇒ А теоремы, т.е. предложение А⇔ В теорема, то В является необходимым и достаточным условием А, а А достаточным и необходимым условием В (если два квадрата конгруэнтны...). Если А ⇒ В теорема, а В ⇒ А нет, то А - достаточное, но не необходимое условие В, а В - необходимое, но не достаточное условие А.

Для всякой теоремы А ⇒ В, можно составить противоположное пред­ложение , которое может быть истинным, но может и не быть истин­ным. Чтобы убедиться в этом, надо составить таблицу истинности.

Согласно закону контрапозиции два предложения вида  одновременно истинны или ложны. Вместо данной теоремы можно доказать обратно противоположную.

# ВНЕАУДИТОРНАЯ САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

**ВНЕАУДИТОРНАЯ САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА №1**

**Тема:** Написание реферата на тему: «Логика высказывания».

**Цель работы**: научиться осуществлять подбор необходимой литературы, вычленять из нее главное, систематизировать имеющийся материал.

**Общие указания к выполнению работы:**  написать реферата на тему: «Логика высказывания».

**Форма отчетности и контроля:** реферат, защита, оценка.

**ВНЕАУДИТОРНАЯ САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА №2**

**Тема:** Решение задач по теме: Применение логики высказываний к переключательным схемам.

**Цель работы**: научиться решать задачи на указанную тему, осуществлять подбор необходимой литературы, вычленять из нее главное, систематизировать имеющийся материал; углубить знания, умения, студентов по изучаемой теме.

**Общие указания к выполнению работы:** решить задачи по теме «Применение логики высказываний к переключательным схемам»

Задана функция *f* от нечетких переменных. Упростить эту нечеткую функцию.

1. *f(a,b) = a (ab),*

2.  *f(a,b) =( ab)( ab)(b).*

3. *f(a,b) = (ab) (ab) (aab),*

4.  *f(a,b,c) =( ab)( ac)(c) b,*

5. *f(a,b,c) =( [ab)(ac]) (bc)) b,*

6. *f(a,b) =(ab)(ac) (bc) b,*

7. *f(a,b,c) =( ab) (ac) (a)b,*

8. *f(a,b) =( ab) (a b)(ab),*

9. *f(a,b,c) =( ab) (ab) (b*

10. *f(a,b) =a(ab)( b).*

**Форма отчетности и контроля:** задача с решением, защита, оценка.

**ВНЕАУДИТОРНАЯ САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА №3**

**Тема:** Решение задач на тему: Приведение формул логики высказываний к виду ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ.

**Цель работы**: научиться решать задачи на указанную тему, осуществлять подбор необходимой литературы, вычленять из нее главное, систематизировать имеющийся материал; углубить знания, умения, студентов по изучаемой теме.

**Общие указания к выполнению работы:** решить задачи по теме «Приведение формул логики высказываний к виду ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ».

Задана формула . От формулы  перейти к эквивалентной ей формуле  так, чтобы формула  не содержала связок «→» и «↔». Исходя из истинностных таблиц доказать, что форулы  и  равносильны (логически эквивалентны). Для формулы  найти СКНФ и СДНФ.

1.  =  6. 
2.  =  7. 
3.  =  8. 
4.  =  9. 
5.  =  10. 

**Форма отчетности и контроля:** задача с решение, защита, оценка.

**ВНЕАУДИТОРНАЯ САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА №4**

**Тема:** Решение задач на тему: Предикаты, кванторы

**Цель работы**: научиться решать задачи на указанную тему, осуществлять подбор необходимой литературы, вычленять из нее главное, систематизировать имеющийся материал; углубить знания, умения, студентов по изучаемой теме.

**Общие указания к выполнению работы:** Решить задачи на тему: Предикаты, кванторы

Предикат задан своей называющей формой. Найти область истинности предиката.

1.  = , 

 где *А* = {1,2,3,4}.

2.  = , 

 где *А* = {1,2,3,4}.

3.  = , 

 где *А* = {1,2,3,4}.

4.  = ), 

 где *А* = {1,2,3,4}.

5.  = , 

 где *А* = {1,2,3,4}.

6.  = , 

 где *А* = {1,2,3,4}.

7.  = , 

 где *А* = {1,2,3,4}.

8.  = , 

 где *А* = {1,2,3,4}.

9.  = , 

 где *А* = {1,2,3,4}.

10.  = ,

 где *А* = {1,2,3,4}.

**Форма отчетности и контроля:** задача с решение, защита, оценка.

**ВНЕАУДИТОРНАЯ САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА №5**

**Тема:** Подготовка сообщения по теме: Применение логики предикатов к анализу рассуждений.

**Цель работы**: научиться осуществлять подбор необходимой литературы, вычленять из нее главное, систематизировать имеющийся материал.

**Общие указания к выполнению работы:** Подготовить сообщения по теме: Применение логики предикатов к анализу рассуждений.

**Форма отчетности и контроля:** сообщение, защита, оценка.

**ВНЕАУДИТОРНАЯ САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА №6**

**Тема:** Решение задач по теме: Модель данной сигнатуры

**Цель работы**: научиться решать задачи на указанную тему, осуществлять подбор необходимой литературы, вычленять из нее главное, систематизировать имеющийся материал; углубить знания, умения, студентов по изучаемой теме.

**Общие указания к выполнению работы:** Решить задачи по теме: Модель данной сигнатуры

Пользуясь определением примитивно рекурсивной функции,

показать, что числовая функция *f*  примитивно рекурсивной.

 1. 2. 

 3.  4. 

 5.  6. 

 7.  8. 

 9.  10. 

**Форма отчетности и контроля:** задача с решение, защита, оценка.

**ВНЕАУДИТОРНАЯ САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА №7**

**Тема:** Написание Расчетно-графической работы на тему: Интерпретация формулы в модели.

**Цель работы**: научиться осуществлять подбор необходимой литературы, вычленять из нее главное, систематизировать имеющийся материал.

**Общие указания к выполнению работы:** Написать Расчетно-графической работы на тему: Интерпретация формулы в модели.

**Форма отчетности и контроля:** расчетно-графическая работа, защита, оценка.

**ВНЕАУДИТОРНАЯ САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА №8**

**Тема:** Решение задач по теме: Аксиоматический метод в математике

**Цель работы**: научиться решать задачи на указанную тему, осуществлять подбор необходимой литературы, вычленять из нее главное, систематизировать имеющийся материал; углубить знания, умения, студентов по изучаемой теме.

**Общие указания к выполнению работы:** Решить задачу по теме: Аксиоматический метод в математике

Решите логическую графическую задачу, записав логическое выражение для всех точек в заштрихованных областях:
А – истинно для точек, принадлежащих кругу,
B - истинно для точек, принадлежащих треугольнику,
C - истинно для точек, принадлежащих прямоугольнику.



**Форма отчетности и контроля:** задача с решение, защита, оценка.

**ВНЕАУДИТОРНАЯ САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА №9**

**Тема:** Написание плана конспекта на тему: Теории первого порядка

**Цель работы**: научиться осуществлять подбор необходимой литературы, вычленять из нее главное, систематизировать имеющийся материал.

**Общие указания к выполнению работы:** Написать план конспект на тему: Теории первого порядка.

**Форма отчетности и контроля:** план конспекта, защита, оценка.

**Задания для самостоятельной работы**

**I. Логические формулы. Таблицы значений**

1. Примем следующие обозначения высказываний: A: «сегодня ясно», B: «сегодня идет дождь», C: «сегодня идет снег», D: «сегодня пасмурно». Переведите следующие логические формулы на естественный язык:

a) A ⇒ ¬(B ∨ C);

b) D ⇔ ¬A;

c) D ∧ (C ∨ B);

d) (D ⇒ B) ∨ A;

e) D ⇔ (B ∧ ¬C);

f) (D ⇔ B) ∧ ¬C.

2. Расставьте скобки, укажите порядок выполнения операций, отметьте все подформулы и постройте дерево, изображающее структуру следующих формул:

a) (A ⇒ B) ⇒ ¬C ∧ (¬B ∨ C);

b) ¬A ⇒ B ∧ C ⇔ ¬B ∨ A;

c) A ⇔ (B ⇒ ¬C) ∧ (C ⇒ ¬A ∨ B);

d) (A ∨ B) ∧ ¬C ⇒ A ∨ B ∨ ¬C.

3. Перепишите, удалив лишние скобки:

a) (((A ⇒ B) ∨ C) ∧ (A ⇒ (B ∨ C)));

b) ((A ∧ B) ⇒ ((C ∨ D) ⇒ (B ∧ C)));

c) ((¬A) ⇒ (((B ∧ C) ∧ (¬A)) ∨ (B ∨ C)));

d) ((¬(¬A)) ∧ ((B ⇒ C) ⇔ (B ⇒ (A ∨ (¬C))))).

4. Постройте таблицы истинности для формул:

a) (A ⇒ B) ∧ ¬A ⇒ ¬B;

b) ¬A ∧ B ⇒ A ∨ B;

c) A ⇒ B ⇔ ¬A ∨ B;

d) A ⇒ (A ⇒ B);

e) (A ∨ B) ∧ ((A ⇒ B) ⇒ C);

f) (A ∨ B ⇒ ¬C) ⇒ A;

g) A ∨ B ⇒ (A ⇒ B ∧ C);

h) A ⇒ ¬(B ∧ C);

i) (A ∧ B) ⇒ (C ∧ ¬C ⇒ A ∨ C);

j) ¬A ∨ B ⇒ D ∧ ¬C;

k) (¬A ∨ C) ∧ (B ⇒ (D ⇒ A));

l) A ⇒ ¬B ⇔ C ∧ D ∨ E.

5. Определите значения формул при указанных значениях A и B:

a) (A ⇒ ¬B) ∧ (B ⇒ ¬C) ∨ (C ⇒ ¬A) ⇔

(¬A ⇒ B) ∨ (¬B ⇒ C) ∧ (¬C ⇒ A), |A| = |B| = 1;

b) ((B ⇒ C) ⇒ A) ⇒ ¬D, |A| = 0, |B| = 1;

c) ((¬A ⇔ C) ⇔ D) ⇒ (B ∧ C ⇔ ¬E), |A| = |B| = 0.

6. Исследуйте следующие формулы на их логические значения:

a) A1 ⇒ (A2 ⇒ . . . ⇒ (An−1 ⇒ An). . .);

b) A1 ∧ A2 ∧ . . . ∧ An ⇒ B1 ∨ B2 ∨ . . . ∨ Bn;

c) A1 ∨ A2 ∨ . . . ∨ An ⇒ B1 ∧ B2 ∧ . . . ∧ Bn;

d) (A1 ⊕ A2) ∧ (A2 ⊕ A3) ∧ (A3 ⊕ A4) ∧ . . . ∧ (An−1 ⊕ An).

7. Проверьте, что следующие формулы являются тавтологиями:

3a) (¬A ⇒ A) ⇒ A;

b) (A ⇒ B) ∧ A ⇒ B;

c) (A ⇒ B) ⇔ (¬B ⇒ ¬A);

d) ¬(A ⇒ B) ⇔ (A ∧ ¬B);

e) (A ⇒ B) ⇒ (A ∧ C ⇒ B ∧ C);

f) (A ⇒ B) ∧ (C ⇒ D) ⇒ (A ∧ C ⇒ B ∧ D);

g) (A ⇒ B) ∨ (C ⇒ D) ⇒ (A ∧ C ⇒ B ∨ D).

8. Докажите выполнимость следующих формул, указав соответствующую модель:

a) ¬(A ⇒ ¬A);

b) (A ⇒ B) ⇒ (B ⇒ A);

c) ¬((A ⇔ ¬B) ∨ C) ∧ B;

d) A ∧ B ⇒ (C ∨ B ⇒ ¬C).

9. Покажите, что следующие формулы опровержимы, указав интерпретации, при которой они ложны:

a) A ∨ B ⇒ (¬A ∧ B) ∨ (A ∧ ¬B);

b) (A ∨ B) ∨ C ⇒ (A ∨ B) ∧ (A ∨ C);

c) ((A ⇒ B ∧ C) ⇒ (¬B ⇒ ¬A)) ⇒ ¬B.

10. Определите, являются ли следующие формулы общезначимыми, выполнимыми, опровержимыми или противоречивыми:

a) A ⇔ A;

b) A ⇒ ¬A;

c) A ∨ B ⇔ A ∧ B;

d) ((A ⇒ B) ⇒ B) ⇒ B;

e) (A ⇒ B) ⇒ C;

f) (A ⇒ B) ∧ (B ⇒ C) ∧ ¬(A ⇒ C).

11. Докажите эквивалентность формул:

a) A ∨ B ∼ ¬A ⇒ B;

b) A ∧ B ∼ ¬(A ⇒ ¬B);

c) (A ∨ B) ∧ (A ∨ ¬B) ∼ A;

d) A ⇔ B ∼ (¬A ∨ B) ∧ (A ∨ ¬B);

e) (A ∧ B) ⇒ C ∼ A ⇒ (B ⇒ C).

12. Докажите, что следующие пары формул не эквивалентныmдруг другу:

a) A ⇒ B и ¬A ⇒ ¬B;

b) A ⇒ B и B ⇒ A;

c) A ⇒ (B ⇒ C) и (A ⇒ B) ⇒ C;

d) A ⇒ (B ⇒ C) и A ⇒ (B ⇔ C).

13. Найдите наипростейшие формулы от трех переменных, последние столбцы таблиц значений которых имеют следующий вид:

a) 0 0 0 0 1 1 1 1;

b) 0 1 0 1 0 1 0 1;

c) 0 0 1 0 0 1 0 0;

d) 1 0 1 1 1 1 0 1;

e) 1 1 0 0 0 0 1 0;

f) 1 0 1 0 1 1 1 0.

**ТРЕБОВАНИЯ И РЕКОМЕНДАЦИИ К НАПИСАНИЮ ТВОРЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ**

**(РЕФЕРАТ, СООБЩЕНИЕ)**

Реферат - это самостоятельная научно-исследовательская работа студента, где раскрывается суть исследуемой студентом проблемы, изложение материала носит проблемно-тематический характер, показываются различные точки зрения, а так же собственные взгляды.

**Структура и оформление.**

1. Титульный лист;
2. План-оглавление;
3. Введение (дается постановка вопроса, объясняется выбор темы, ее значимость и актуальность, указывается цель и задачи реферата, дается характеристика используемой литературы).
4. Основная часть (каждый раздел основной части раскрывает отдельную проблему.)
5. Заключение (подводятся итоги, и дается обобщенный вывод по теме реферата, даются рекомендации);
6. Библиография. При разработке реферата используется 8-10 различных источников. Допускается включение таблиц, схем, графиков.

**Критерии оценки реферата.**

1. Соответствие теме;
2. Глубина проработки материала;
3. Правильность и полнота использования источников;
4. Оформление реферата.

# Список использованных источников

1. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. – 2-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». – 2012.
2. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов [Текст] / В. И. **Игошин**. - 4-е изд., стерет. - Москва : Академия, 2012.
3. Дискретная математика [Текст] : учебник для технических вузов / А. И. Белоусов, С. Б. **Ткач**ев. - Москва : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2012.
4. Дискретная математика [Текст] : учебник для СПО / М. С. **Спирин**а, П. А. **Спирин**. - Москва : Академия, 2014.
5. Ершов,Ю.Л. Математическая логика [Текст]:Учебное пособие./ Ю.Л. Ершов, Е.А.Палютин- СПб.:Лань, 2013.
6. Гончаров, Г.А. Элементы дискретной математики [Текст]:Учебное пособие./ Г.А. Гончаров, А.А.Молчалин - М.:ФОРУМ: ИНФРА-М.,2012.
7. Ерусалимский, Я.М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения. [Текст]/ Я.М. Ерусалимский – М.: Вузовская книга, 2013.
8. Мендельсон, Э. Введение в математическую логику [Текст]:Учебное пособие./ Э. Мендельсон - М.:Наука.,2014.