**Методические указания**

**к выполнению практической работы № 13**

**по дисциплине: «Математика: алгебра и начала анализа, геометрия»**

(для обучающихся первых курсов на базе основного общего образования)

Наименование образовательного учреждения: государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение Архангельской области «Вельский экономический колледж»

Ф.И.О. разработчика: Жаркова Нина Ивановна

Должность: преподаватель

**Тема: «Уравнение касательной и нормали к кривой. Исследование функций на монотонность и экстремумы».**

**Учебная цель:** Научиться составлять уравнения касательной и нормали, вычислять угловой коэффициент и угол наклона касательной, находить интервалы монотонности и экстремумы функций.

**Форма выполнения работы:** групповая.

**Форма контроля:** зачёт.

**Обеспечение:** Методические указания к выполнению работы.

**Необходимые сведения из теории.**

1. Геометрический смысл производной, уравнение касательной и нормали.
* Производная функции *y = f* (*x*) при данном значении аргумента *x = x0* равна угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику функции *y = f* (*x*) в точке с абсциссой *x0* или тангенсу угла наклона касательной к положительному направлению оси абсцисс:

*f ' (x0) = k = tgα* (1)

* Уравнение касательной к графику функции в точке *М0* (*x0* ; f(x*0*)) имеет вид:

*y = f(x0)+f’(x0) (x–x0)* (2)

* Уравнение нормали, т.е. прямой, проходящей через точку касания *М0* (*x0* ;*y0*) перпендикулярно касательной кграфику функции , имеет вид:

 (3)

Пример 1.

Составить уравнение касательной и нормали к параболе *y* = 2*x*2– 6*x* + 3 в точке

*М0*(1 ; -1). Найти точку, в которой угловой коэффициент касательной равен 6.

*Решение.*

1) Найдем f(1) = -1. Найдём производную функции *y* = 2*x*2– 6*x* + 3 при *x* = 1. Имеем *y***’** = 4*x*– 6, откуда f**’**(1)=-2.

2) Воспользовавшись уравнением (2), получим искомое уравнение касательной: y = -1 -2 (x – 1), или у = -2x +1.

3) Уравнение нормали получим, используя уравнение (3): , или у = 0,5х-1,5.

4) Угловой коэффициент касательно по формуле (1) равен *k = f ' (x0),* тогда

*f ' (x0)= 6,* получаем 4х-6 = 6, откуда х =3.

*Ответ:* у = -2x +1; у = 0,5х-1,5; 3.

1. Исследование функций на монотонность и экстремумы.

План исследования:

1. Найти производную функции *f ' (x).*
2. Найти критические точки, решив уравнение *f ' (x) = 0.*
3. Отметить полученные точки на числовой прямой и определить знак производной на каждом интервале.
4. При исследовании на монотонность сделать вывод:

*- если f ' (x)*$\geq 0$*, то на данном интервале функция возрастает, а если*

*f ' (x)*$\leq 0$*, то на данном интервале функция убывает.*

При исследовании на экстремумы сделать вывод:

*- если при переходе через критическую точку (в которой f ' (x) = 0),*

*f ' (x) меняет знак с «+» на «- », то в данной точке функция имеет максимум, а если с «-» на «+», то минимум, если f ' (x) не меняет знак, то в данной точке экстремума нет.*

1. При нахождении экстремумов функции найти $у\_{min} и у\_{max}$.
2. Записать ответ.

Пример 2.

Найти промежутки возрастания и убывания и экстремумы функции: y = $х^{3}$·(x – 1).

*Решение:*
1) Находим производную:
*y*' = (*x*3)'·(*x* – 1) + *x*3·(*x* – 1)' = 3*x*2·(*x* – 1) + *x*3·(1 – 0) = 3*x*3 – 3*x*2 + *x*3 = 4*x*3 – 3*x*2.

2) Приравниваем производную к нулю и решаем уравнение:

4*x*3 – 3*x*2 = 0;
 *x*2·(4*x* – 3) = 0.
*x*1 = 0 и *x*2 = 3/4 = 0,75.

3) На числовой прямой отмечаем найденные значения аргумента x. В этих точках производная функции равна нулю. Между ними (на интервалах) она сохраняет знак "+" или "–". Чтобы определить положительна или отрицательна производная функции на конкретном интервале, подставляем в формулу для производной произвольное значение из этого интервала.
*y*' = 4*x*3 – 3*x*2;
*y*' (–1) = 4(–1)3 – 3(–1)2 = – 4 – 3 < 0;
*y*' (0,5) = 4·(0,5)3 – 3·(0,5)2 = 0,5 – 0,75 < 0;
*y*' (1) = 4·13 – 3·12 = 4 – 3 > 0.

Таким образом, точки, в которых производная равняется нулю, разбили числовую прямую на три интервала. В первом и втором из них производная отрицательна, в третьем положительна. Отмечаем это на числовой прямой.

Функция возрастает на интервале, если её производная на этом интервале положительна, и убывает, если производная отрицательна. Отметим это стрелочками с соответствующим наклоном, соотнося их со знаками производной.

Получили следующую схему:

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

0 0,75 х

min

По схеме видно, что в точке *x*1 = 0 экстремума нет, функция убывает и правее, и левее этой точки. В точке *x*2 = 0,75 функция меняет характер монотонности с убывания на возрастание, значит эта точка является точкой минимума.

Определяем минимальное значение функции:
*y* = *x*3·(*x* – 1);
*y*(0,75) = (0,75)3·(0,75 – 1) = –0,10546875 ≈ –0,11.

*Ответ:* Функция убывает на ($-\infty ;\left.0,75\right]$, возрастает на $\left[0,75; +\infty )\right.$,*y*min (0,75) ≈ –0,11.

**Задания.**

**Вариант 1.**

1. Дана функция $у=-0,5x^{2}-4х+3$. Найдите:

а) угловой коэффициент касательной к графику этой функции в точке $х\_{0}=-1$;

б) точку, в которой угловой коэффициент касательной равен k = 0;

в) составьте уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой $х\_{0}=-1$;

г) напишите уравнение нормали в т. $х\_{0}=-1$.

1. Найдите угол наклона касательной к кривой

$f\left(x\right)=\frac{1}{4}sin4x в точке x\_{0}=-\frac{π}{4}$.

1. Исследуйте функцию $у=60+45х-3x^{2}-x^{3}$на монотонность.
2. Найдите промежутки возрастания функции $у=0,5x^{2}-х-2lnх$.
3. Найдите экстремумы функции $у=7+12х-x^{3}$ .
4. Дана функция $у=x^{4}∙e^{х-2}$. Найдите точки максимума.

*Ответы:* ***1****. а) -3; б) -4; в) у=-3х+3,5; г)* $у=\frac{1}{3}х+5\frac{1}{2}$*.****2****.* $135^{°}$*.* ***3****. Функция убывает на*

*(-∞; -5]*$∪$*[3;+∞), а возрастает на [-5;3].* ***4****. [-1;0)* $∪$ *[2;+∞).* ***5****.* $у\_{min}\left(-2\right)=-9; у\_{max}(2)=23.$***6.***$ х\_{max}=-4$*.*

**Вариант 2.**

1. Дана функция $у=3x^{2}-6х+1$. Найдите:

а) угловой коэффициент касательной к графику этой функции в точке $х\_{0}=0$;

б) точку, в которой угловой коэффициент касательной равен k = 6;

в) составьте уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой $х\_{0}=-1$;

г) напишите уравнение нормали в т. $х\_{0}=0$.

1. Найдите угол наклона касательной к кривой

$f\left(x\right)=-\frac{1}{3}cos3x в точке x\_{0}=\frac{π}{6}$.

1. Исследуйте функцию $у=2x^{3}+3x^{2}-12х+5 $на монотонность.
2. Найдите промежутки убывания функции $у=0,5x^{2}-х-2lnх$.
3. Найдите экстремумы функции $у=3x^{3}+9x^{2}-7$ .
4. Дана функция $у=x^{3}∙e^{х+7}$. Найдите точки минимума.

*Ответы:* ***1****. а) -6; б) 2; в) у=-12х-2; г)* $у=\frac{1}{6}х+1$*.****2****.* $45^{°}$*.* ***3****. Функция возрастает на*

*(-∞; -2]*$∪$*[1;+∞), а убывает на [-2;1].* ***4****. (-∞; -1]*$∪$*(0;2].* ***5****.* $у\_{min}\left(0\right)=-7; у\_{max}(-2)=5.$***6.***$ х\_{min}=-3$*.*

Результаты практической работы оформить в тетради, сделать вывод и сдать на проверку преподавателю.

По теме предусмотрена контрольная работа.

Преподаватель: Н.И. Жаркова