МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Сибирский государственный университет геосистем и технологий»
Кафедра высшей математики

ПРАКТИКУМ «МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ В ЭКОЛОГИИ»

Электронное учебно-методическое пособие
для обучающихся на 2 курсе по направлениям подготовки
05.03.06 Экология и природопользование (уровень бакалавриата)
05.03.03 Картография и геоинформатика (уровень бакалавриата)

Учебно-методическое пособие разработал
доцент кафедры высшей математики Мартынов Геннадий Павлович

Новосибирск, 2020

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГЕОСИСТЕМ И ТЕХНОЛОГИЙ»
(СГУГиТ)

Г.П. Мартынов

ПРАКТИКУМ «МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ В ЭКОЛОГИИ»

Электронное учебно-методическое пособие
для обучающихся на 2 курсе по направлениям подготовки
05.03.06 Экология и природопользование (уровень бакалавриата)
05.03.03 Картография и геоинформатика (уровень бакалавриата)

Новосибирск
2020

УДК 519.2:91

Рецензент: доктор физико-математических наук, доцент, профессор НГТУ,
Костюченко В.Я.

Мартынов, Г.П.
М 294 Практикум «Математика. Математические аспекты в экологии», учебно-методическое пособие [Электронный ресурс] / Г.П. Мартынов, – Новосибирск: 2020. – 61 с.

Учебно-методическое пособие разработано сотрудником кафедры высшей математики Сибирского государственного университета геосистем и технологий, доцентом Г.П. Мартыновым. Пособие предназначено для обучающихся на 2 курсе СГУГиТ по направлениям подготовки 05.03.06 Экология и природопользование (уровень бакалавриата), 05.03.03 Картография и геоинформатика (уровень бакалавриата). Пособие содержит практикум для всего семестра: контрольные вопросы для повторения теоретического материала, аудиторные задания, самостоятельную работу обучающихся, расчетно-графическую работу по всем перечисленным в названии разделам и библиографический список рекомендуемой литературы. Данное пособие может быть использовано в качестве второго учебного документа после лекционного курса при формировании комплекта учебных материалов 3 и 4 семестров для дистанционного обучения в вузе.

УДК 519.2:91

© Мартынов Г.П., 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

Занятие 1. Случайные события. Классическое определение вероятности Геометрическая вероятность. Относительная частота появления события ……..…….……4
Занятие 2. Теоремы сложения и умножения вероятностей, формула полной вероятности, формула Байеса……..…….....10
Занятия 3, 4. Повторение испытаний: формула Бернулли, локальная и интегральная теоремы Лапласа. Дискретная случайная величина. Биномиальное распределение и распределение Пуассона. Простейший поток событий ……14
Занятие 5, 6. Контрольная работа №1 «Теория вероятностей»……...20
Занятие 7, 8. Числовые характеристики дискретных случайных величин и их свойства……22
Занятия 9, 10. Неравенство Чебышева. Функция распределения вероятностей и плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины. Числовые характеристики непрерывных случайных величин. Нормальное распределение……26
Занятие 11. Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения. Полигон и гистограмма……33
Занятие 12. Статистические оценки параметров распределения.……37
Занятие 13. Визуализация статистического распределения. Проверка типа распределения на его нормальность……...40
Занятие 14. Зависимые и независимые случайные величины……....43
Занятия 15,16. Контрольная работа №2 «Теория вероятностей и математическая статистика»……..47
Расчётно-графическая работа……..49
Библиографический список рекомендуемой литературы……59

Таблица 1……...60

Таблица 2……...…61

Занятие 1. Случайные события. Классическое определение вероятности. Геометрическая вероятность. Относительная частота появления события

Контрольные вопросы

1. Какое событие называется случайным?
2. Сформулируйте классическое определение вероятности.
3. Как находится геометрическая вероятность?
4. Что такое относительная частота появления события?

Аудиторные задания

Пример 1. Брошены 2 игральные кости. Найти вероятность следующего события A = {сумма выпавших на двух гранях – четная; причем хотя бы на одной грани – будет 4 очка}.

Решение

Испытание в этой задаче заключается в следующем: брошены 2 игральные кости, причем, у каждой кости есть 6 граней. В таком испытании возможны различные случайные элементарные исходы.

Всего элементарных исходов в этом испытании: $n = 6\times6 = 36$.

Благоприятные для случайного события A элементарные исходы таковы:

$\omega_1 = \{2+4\}$, $\omega_2 = \{4+2\}$, $\omega_3 = \{4+4\}$, $\omega_4 = \{6+4\}$, $\omega_5 = \{4+6\}$.

Причем других благоприятных исходов нет, поэтому число всех благоприятных элементарных исходов $m = 5$. Следовательно, в соответствии с классическим определением вероятности: $p(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{36}$.

Пример 2. На столе экзаменатора 8 одинаковых по форме билетов с номерами: 1,2,...,8. Студенты наудачу берут 5 билетов со стола. Найти вероятность того, что среди взятых билетов окажутся: а) билет №1 (он самый легкий из всех билетов); б) билет №1 и билет №2 (в билете №2 написано: ваша оценка – «хорошо»).

Решение

Испытание в этой задаче заключается в следующем: студенты наудачу берут со стола 5 билетов из 8 имеющихся. В результате такого испытания возможно множество вариантов элементарных исходов. Общее число n всех элементарных исходов в этом испытании равно числу различных способов выбора пяти билетов из восьми, то есть равно числу сочетаний:

$$n = C_8^5 = \frac{8!}{5!\cdot3!} = \frac{6\cdot7\cdot8}{3!} = \frac{6\cdot56}{6} = 56.$$

а) Рассматривается первое случайное событие A_1 = {среди взятых наудачу студентами 5 билетов оказался билет №1, следовательно, вместе с билетом №1 студенты взяли еще 4 билета с номерами от 2 до 8 (а это 7 различных номеров билетов)}. Число m_1 всех благоприятных для A_1 элементарных исходов равно числу различных способов выбора номеров четырех билетов из семи, то есть равно числу сочетаний:

$$m_1 = C_7^4 = \frac{7!}{4!\cdot3!} = \frac{5\cdot6\cdot7}{3!} = \frac{6\cdot35}{6} = 35.$$

Следовательно, в соответствии с классическим определением вероятности:

$$p(A_1) = \frac{35}{56} = 0{,}625;$$

б) рассматривается второе случайное событие A_2 = {среди взятых наудачу студентами 5 билетов оказались билеты №1 и №2, следовательно, вместе с билетами №1, 2 студенты взяли еще 3 билета с номерами от 3 до 8 (а это 6 различных номеров билетов)}. Число m_2 всех благоприятных для A_2 элементарных исходов равно числу различных способов выбора номеров трех билетов из шести, то есть равно числу сочетаний:

$$m_2 = C_6^3 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{3!} = \frac{6\cdot 20}{6} = 20.$$

Следовательно, в соответствии с классическим определением вероятности:

$$p(A_2) = \frac{m_2}{n} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}.$$

Ответ. $p(A_1) = 0{,}625;\ p(A_2) = \frac{5}{14}.$

Пример 3. При испытании партии телефонов относительная частота исправных телефонов оказалась равной 0,93. Найти число исправных телефонов, если всего было проверено 400 телефонов.

Решение

Рассматривается случайное событие A = {проверяемый телефон исправен}. При проверке большой партии произвольных изделий такое случайное событие появляется не в каждом испытании из этой большой серии испытаний. Поэтому вводится понятие относительной частоты появления случайного события в большой серии испытаний – это число $w(A)$, равное отношению числа m_0 появления интересующего нас события A к общему числу n_0 всех испытаний данной серии. Поэтому:

$$w(A) = 0{,}93 = \frac{m_0}{n_0}.$$

Так как $n_0 = 400$, то $m_0 = 0{,}93\cdot 400 = 372$.

Ответ. В партии 372 исправных телефона.

Пример 4. Быстро вращающийся диск разделен на нечетное число равных по площади секторов, попеременно раскрашенных синим и красным цветом (5 красных и 4 синих сектора). По диску произведен удачный выстрел. Найти вероятность того, что пуля попадет в один из красных секторов.

Решение

Рассмотрим случайное событие A = {пуля попала в красный сектор}. Данная задача решается с помощью геометрической вероятности. Всего секторов в диске – девять, из них красных – пять, поэтому благоприятная (красная) площадь диска равна: $S_{крас} = S_{круга} \cdot 5/9$. Следовательно, при использовании понятия геометрической вероятности (как отношение благоприятной площади ко всей площади), получается ответ.

Ответ. $p(A) = \dfrac{S_{крас}}{S_{круга}} = \dfrac{5}{9}$.

Пример 5. На плоскость, разлинованную (рис. 1) параллельными горизонтальными прямыми, отстоящими друг от друга на 9 см, наудачу брошена монета радиуса 1,5 см. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из прямых.

Решение

Рассмотрим случайное событие A = {монета находится в какой-то полосе и не пересекает линий границ этой полосы}. Данная задача решается также методом геометрической вероятности. Если монета попала в какую-то полосу, то, чтобы она не пересекала линий границ этой полосы, необходимо, чтобы центр монеты не выходил за пределы внутренней полосы шириной 6 см (сверху – отступ 1, 5 см и снизу – отступ 1,5 см). Максимум монета может касаться линии границы в одной точке сверху, либо в одной точке снизу.

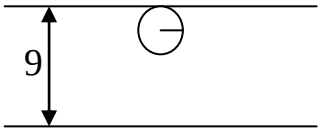


Рис. 1. Монета

Следовательно, при использовании понятия геометрической вероятности (как отношение ширины благоприятной полосы к ширине всей полосы), получается ответ.

Ответ. $p(A) = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$.

Пример 6. В коробке осталось семь одинаковых по размеру яблок: 4 красных и 3 зеленых. Наудачу из этой коробки взяты 3 яблока. Найти, вероятность того, что трех взятых яблок окажется: а) одно красное; б) два красных; в) хотя бы одно красное яблоко.

Решение

Испытание в этой задаче заключается в следующем: из коробки наудачу взяты 3 яблока из 7 имеющихся яблок. В результате такого испытания возможно множество вариантов элементарных исходов. Общее число

n всех элементарных исходов в этом испытании равно числу различных способов выбора трех яблок из семи, то есть равно числу сочетаний:

$$n = C_7^3 = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{3!} = 35.$$

а) Рассмотрим случайное событие A_1 = {среди трех взятых наудачу яблок – оказалось одно красное, следовательно, еще было взято 2 зеленых яблока}.

Одно красное яблоко можно взять из 4 имеющихся в коробке красных яблок C_4^1 различными способами. А два зеленых яблока из 3 имеющихся в коробке зеленых яблок можно взять C_3^2 различными способами. Поэтому число благоприятных для события A_1 элементарных исходов находится так:

$$m = C_4^1 \cdot C_3^2 = \frac{4!}{1!\cdot 3!}\cdot\frac{3!}{2!\cdot 1!} = \frac{24}{2} = 12.$$

Следовательно, в соответствии с классическим определением вероятности:

$$p(A_1) = \frac{12}{35} \approx 0{,}343;$$

б) рассмотрим случайное событие A_3 = {среди трех взятых наудачу яблок – оказалось два красных, следовательно, еще было взято 1 зеленое яблоко}.

Два красных яблока можно взять из 4 имеющихся в коробке красных яблок C_4^2 различными способами. А одно зеленое яблоко из 3 имеющихся в коробке зеленых яблок можно взять C_3^1 различными способами. Поэтому число благоприятных для события A_2 элементарных исходов находится так:

$$m = C_4^2 \cdot C_3^1 = \frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{3!}{1!\cdot 2!} = \frac{24\cdot 6}{4\cdot 2} = 18.$$

Следовательно, в соответствии с классическим определением вероятности:

$$p(A_2) = \frac{18}{35} \approx 0{,}514;$$

в) рассмотрим случайное событие A_3 = {среди трех взятых наудачу яблок – оказалось хотя бы одно красное яблоко}. Вероятность такого события проще находить с помощью противоположного события $\overline{A_3}$ = {среди трех взятых наудачу яблок – оказалось ни одного красного яблок, то есть оказалось три зеленых яблока}. Три зеленых яблока из 3 имеющихся в коробке зеленых яблок можно единственным способом. Поэтому число благоприятных для события $\overline{A_3}$ элементарных исходов находится так:

$m = 1$.

Следовательно, в соответствии с классическим определением вероятности:

$p(\overline{A_3}) = \frac{1}{35} \approx 0{,}0286$.

При использовании свойства противоположных событий, получается:

$p(A_3) = 1 - \frac{1}{35} = \frac{34}{35} \approx 0{,}9714$.

Ответ. $p(A_1) = \frac{12}{35} \approx 0{,}343$, $p(A_2) = \frac{18}{35} \approx 0{,}514$, $p(A_3) = \frac{34}{35} \approx 0{,}9714$.

Самостоятельная работа

Задача 7. На кафедре прикладной оптики работают 6 мужчин и 4 женщины. Отдел кадров произвольно выбрал 7 человек из этой кафедры для награждения по поводу юбилея института. Найти вероятность того, что среди отобранных сотрудников окажутся 3 женщины (событие A).

Ответ. $p(A) = \frac{m}{n} = 0{,}5$.

Задача 8. Брошены две игральные кости. Найти вероятность следующих событий: A_1 = {сумма выпавших очков равна 8, а разность равна 4}, A_2 = {сумма выпавших очков равна 7}.

Ответ. $p(A_1) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$; $p(A_2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Задача 9. Устройство состоит из 5 элементов, из которых только три в рабочем состоянии. При включении устройства включаются случайным образом только два элемента. Найти вероятность следующих событий: A_1 = {включенными окажутся рабочие элементы}, A_2 = {включенным окажется хотя бы один рабочий элемент}.

Ответ. $p(A_1) = \frac{3}{10}$, б) $p(A_2)$=1 – 0,1= 0,9.

Задача 10. В коробке осталось восемь одинаковых по размеру груш: 3 желтых и 5 зеленых. Наудачу из этой коробки взяты 3 груши. Найти, вероятность того, что трех взятых груш окажется: а) одна желтая; б) две желтых; в) хотя бы одна желтая груша.

Ответ. $p(A_1) = \frac{15}{28} \approx 0{,}536$, $p(A_2) = \frac{15}{56} \approx 0{,}268$, $p(A_3) = \frac{23}{28} \approx 0{,}821$.

Задача 11. В круг радиуса R вписан правильный шестиугольник. По данному кругу произведен удачный выстрел. Найти вероятность того, что пуля попадет в этот шестиугольник.

Ответ. $p(A)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

Занятие 2. Теоремы сложения и умножения вероятностей, формула полной вероятности, формула Байеса

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте теорему сложения вероятностей для несовместных событий.
2. Сформулируйте теорему сложения вероятностей для совместных событий.
3. Сформулируйте теорему умножения вероятностей для независимых событий.
4. Сформулируйте теорему умножения вероятностей для зависимых событий.
5. Запишите формулу полной вероятности для двух (трех) гипотез.
6. Что такое формулы Байеса?

Аудиторные задания

Пример 1. В библиотеке на стеллаже «Математика» стоят 24 учебника, из которых – 6 новых учебников (2020 г. издания), а остальные учебники – старые. Библиотекарь наугад берет 4 учебника для группы Э–21. Найти вероятность того, что:

A_1 = {хотя бы один из четырех выбранных учебников – новый},

A_2 = {3 учебника из четырех выбранных – новые}.

Решение

Испытание в этой задаче заключается в следующем: со стеллажа наудачу взяты 4 учебника из 24 имеющихся учебников. В результате такого испытания возможно множество вариантов элементарных исходов. Общее число n всех элементарных исходов в этом испытании равно числу различных способов выбора четырех учебников из двадцати четырех, то есть равно числу сочетаний:

$$n=C_{24}^{4}=\frac{24!}{20!\cdot 4!}=\frac{21\cdot 22\cdot 23\cdot 24}{4!}=10626.$$

а) рассмотрим событие A_1 = {хотя бы один из четырех выбранных учебников – новый}, данное событие достаточно сложно, т. к. включает в себя много вариантов, поэтому рассмотрим более простое противоположное событие:

$\bar{A}_1$ = {все четыре отобранных учебника – старые}. Эти четыре старых учебника можно выбрать со стеллажа из 18 старых учебников. Для события $\bar{A}_1$ число благоприятных исходов равно: $m_1 = C_{18}^4 = \frac{18!}{14!\cdot 4!} = \frac{15\cdot 16\cdot 17\cdot 18}{24} = 3060$.

Следовательно, в соответствии с классическим определением вероятности:

$p(\bar{A}_1) = \frac{3060}{10626} \approx 0{,}288$, поэтому по свойствам противоположных событий:

$p(A_1) = 1 - \frac{3060}{10626} \approx 0{,}712$.

б) рассмотрим событие A_2 = {3 учебника из четырех выбранных – новые, что автоматически означает, что четвертый учебник – старый}.

Для события число благоприятных исходов равно:

$m_2 = C_6^3 \cdot C_{18}^1 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} \cdot \frac{18!}{17!\cdot 1!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{3!} \cdot 18 = 360$.

Следовательно, в соответствии с классическим определением вероятности:

$p(A_2) = \frac{360}{10626} \approx 0{,}0339$.

Ответ. $p(A_1) \approx 0{,}712$, $p(A_2) \approx 0{,}0339$.

Пример 2. Для сигнализации о пожаре в гаражном боксе установлены два независимо работающих датчика. Вероятность того, что при пожаре первый из них сработает, равна 0,95; для второго это вероятность равна 0,9. Найти вероятности следующих событий: а) A_1 = {при пожаре сработал только один датчик}; б) A_2 = {при пожаре сработал хотя бы один датчик}, в) A_3 = {при пожаре не сработали оба датчика}.

Решение

а) рассмотрим первое случайное событие A_1 = {при пожаре сработает только один датчик}, данное событие включает в себя два варианта, поэтому рассмотрим более простые события:

событие B_1 = {сработал первый датчик}, по условию: $p(B_1) = 0{,}95$;

событие B_2 = {сработал второй датчик}, по условию: $p(B_2) = 0{,}9$.

Тогда событие A_1 можно представить в виде:

$A_1 = B_1 \cdot \bar{B}_2 + \bar{B}_1 \cdot B_2 \Rightarrow p(A_1) = p(B_1 \cdot \bar{B}_2 + \bar{B}_1 \cdot B_2)$.

По теореме сложения вероятностей для несовместных событий (с учетом свойств противоположных событий) получается:

$p(A_1) = p(B_1 \cdot \bar{B}_2) + p(\bar{B}_1 \cdot B_2) = p(B_1)(1 \cdot p(\bar{B}_2)) + (1 - p(\bar{B}_1) \cdot p(B_2)$.

В итоге: $p(A_1) = 0{,}95\cdot 0{,}1 + 0{,}05\cdot 0{,}9 = 0{,}095 + 0{,}045 = 0{,}14$.

в) рассмотрим второе случайное событие A_2 = {при пожаре сработал хотя бы один датчик}. При сравнении событий A_2 и A_3 можно отметить,

что они противоположны, причем событие A_3 проще. Это событие можно представить в виде формулы: $A_3 = \overline{B}_1 \cdot \overline{B}_2$, поэтому по теореме произведения вероятностей для независимых событий (по условию: датчики работают независимо друг от друга) и с учетом свойств противоположных событий получается:

$$p(A_3) = p(\overline{B}_1 \cdot \overline{B}_2) = p(\overline{B}_1) \cdot p(\overline{B}_2) = (1 - p(\overline{B}_1) \cdot p(1 - \overline{B}_2) = 0{,}05 \cdot 0{,}1 = 0{,}005.$$

б) с учетом противоположности событий A_2 и A_3 вычисляется вероятность:

$p(A_2) = 1 - 0{,}005 = 0{,}995.$

Ответ. $p\ (A_1) = 0{,}14$, $p\ (A_2) = 0{,}995$, $p\ (A_3) = 0{,}005$.

Пример 3. По данным переписи населения за 2010 год некоторой африканской страны установлено: чернокожие отцы и чернокожие сыновья (событие $A \cdot B$) составили 5% обследованных лиц, чернокожие отцы и светлокожие сыновья (событие $A \cdot \overline{B}$) – 7,9%, светлокожие отцы и чернокожие сыновья (событие $\overline{A} \cdot B$) – 8,9%, светлокожие отцы и светлокожие сыновья ($\overline{A} \cdot \overline{B}$) – 78,2%. Найти связь между цветом кожи отца и сына.

Решение

По условию:

$p(A \cdot B) = 0{,}05$, $p(A \cdot \overline{B}) = 0{,}079$, $p(\overline{A} \cdot B) = 0{,}089$, , $p(\overline{A} \cdot \overline{B}) = 0{,}782$.

1. Первая возможная связь: если отец чернокожий (A), то сын – чернокожий (B). Найдем условную вероятность:

$$p_A(B) = \frac{p(A \cdot B)}{p(A)} = \frac{0{,}05}{p(A \cdot B + A \cdot \overline{B})} = \frac{0{,}05}{p(A \cdot B) + p(A \cdot \overline{B})} = \frac{0{,}05}{0{,}05 + 0{,}079} = 0{,}39.$$

2. Вторая возможная связь: если отец чернокожий (A), то сын – светлокожий ($\overline{B}$).Найдем условную вероятность:

$$p_A(\overline{B}) = \frac{p(A \cdot \overline{B})}{p(A)} = \frac{0{,}079}{0{,}129} = 0{,}61.$$

3. Третья возможная связь: если отец светлокожий ($\overline{A}$), то сын – чернокожий (B). Найдем условную вероятность:

$$p_{\overline{A}}(B) = \frac{p(\overline{A} \cdot B)}{p(\overline{A})} = \frac{0{,}089}{p(\overline{A} \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B})} = \frac{0{,}089}{p(\overline{A} \cdot B) + p(\overline{A} \cdot \overline{B})} = \frac{0{,}089}{0{,}089 + 0{,}782} = 0{,}102.$$

4. Четвертая возможная связь: если отец светлокожий ($\overline{A}$), то сын – светлокожий ($\overline{B}$). Найдем условную вероятность:

$$p_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{p(\overline{A}\cdot\overline{B})}{p(\overline{A})} = \frac{0{,}782}{0{,}089+0{,}782} = 0{,}898.$$

Ответ. Наиболее вероятна следующая связь: если отец светлокожий, то сын – светлокожий.

Пример 4. Два станка-автомата производят одинаковые тетрапаки для молока, затем все тетрапаки поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата в два раза выше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 66% тетрапаков отличного качества, а второй – 93%. Наудачу взятый с конвейера тетрапак оказался отличного качества (событие A). Найти вероятность того, что этот тетрапак произведен первым автоматом.

Решение

По поводу события A имеются две (и только две) гипотезы:
B_1 = {этот тетрапак произведен первым станком-автоматом},
B_2 = {этот тетрапак произведен вторым станком-автоматом}.
По условию: $p(B_1) = \frac{2}{3},\ p(B_2) = \frac{1}{3}$.

Условная вероятность $p_{B_1}(A)$ – это вероятность того, что тетрапак окажется отличного качества (A), при условии, что он произведен первым станком-автоматом (B_1). По условию она равна: $p_{B_1}(A) = 0{,}66$.

Аналогично другая условная вероятность равна: $p_{B_2}(A) = 0{,}93$.

Поэтому по формуле полной вероятности для двух гипотез:

$$p(A) = p(B_1)\cdot p_{B_1}(A) + p(B_2)\cdot p(A) = \frac{2}{3}\cdot 0{,}66 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}93 = 0{,}44 + 0{,}31 = 0{,}75.$$

В данной задаче требуется найти вероятность того, что данный тетрапак произведен первым автоматом, при условии, что он оказался отличного качества. А это есть условная вероятность $p_A(B_1)$, которую можно найти по формуле Байеса:

$$p_A(B_1) = \frac{p(B_1)\cdot p_{B_1}(A)}{p(A)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot 0{,}66}{0{,}75} = \frac{44}{75} \approx 0{,}587.$$

Ответ. $p_A(B_1) = \frac{44}{75} \approx 0{,}587$.

Самостоятельная работа

Задача 5. В казарме находится пирамида из 10 винтовок. Причем в этой пирамиде – четыре винтовки с оптическим прицелом, а шесть винтовок – без такого прицела. Вероятность того, что солдат поразит врага из

винтовки с оптическим прицелом (гипотеза B_1), равна 0,97; а для винтовки без оптического прицела эта вероятность меньше – 0,81. Солдат поразил врага из наудачу выбранной винтовки (событие A). Что вероятнее: он стрелял с оптическим прицелом, или без него?

Ответ. $p_A(B_1) \approx 0{,}444,\ p_A(B_2) \approx 0{,}556$. Вывод: солдат вероятнее стрелял без оптического прицела.

Задача 6. В магазин «Эльдорадо» поступила партия телевизоров со склада: 12 штук – корейского производства, 20 штук – малазийской сборки, 18 штук – японской сборки. Вероятность того, что телевизор, изготовленный в Корее, отличного качества, равна 0,9; для Малайзии – 0,6, а для Японии – 0,9. Найти вероятность того, что наудачу взятый телевизор окажется отличного качества (событие A).

Ответ: $p(A) = \dfrac{39}{50} = 0{,}78$.

Задача 7. Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить 4 авиабомбы, вероятность попадания которых равны 0,3; 0,4; 0,6 и 0,7

Ответ. Вероятность примерно равна 0,95.

Задача 8. Студент знает 20 из 25 вопросов к экзамену. Найти вероятность того, что студент знает заданные экзаменатором три вопроса.

Ответ. $\dfrac{57}{118} \approx 0{,}496$.

Задача 9. Обучающийся разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что нужная формула находится в первом справочнике, равна 0,6; для второго – 0,7; и для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что формула находится: а) только в первом справочнике; б) только в двух справочниках; в) во всех трех справочниках.

Ответ. 0,188, 0,452, 0,336.

Занятия 3, 4. Повторение испытаний: формула Бернулли, локальная и интегральная теоремы Лапласа. Дискретная случайная величина. Биномиальное распределение и распределение Пуассона. Простейший поток событий

Контрольные вопросы

1. При каких условиях применима формула Бернулли?
2. Записать формулу Бернулли.
3. В каких случаях применяется локальная теорема Лапласа и как она записывается?
4. В каких случаях применяется интегральная теорема Лапласа и как она записывается?
5. Что такое дискретная случайная величина и как выглядит закон распределения дискретной случайной величины?
6. Что такое биномиальное распределение?
7. Записать распределение Пуассона.
8. Что такое простейший поток событий?

Аудиторные задания

Пример 1. Два равносильных мастера спорта играют в шахматы. Что вероятнее выиграть: а) одну партию из двух или две из четырех? б) не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из пяти?

Решение

В этой задаче формула Бернулли применима, так как каждая партия играется не зависимо от результатов предыдущих партий; вероятность выигрыша $p = 0{,}5$ и постоянна в силу равносильности шахматистов. Кроме того, общее количество партий не большое, поэтому эффект усталости шахматистов не влияет на результаты. Поэтому по формуле Бернулли:

$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, $q = 1 - p = 0{,}5 = p$.

а) сравниваем вероятности:

$$\left.\begin{aligned} P_2(1) = C_2^1 \cdot p^1 \cdot q^1 = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}5 = \frac{8}{16} \\ P_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^2 = \frac{6}{16} \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_2(1) > P_4(2);$$

б) $P_4(k \geq 2) = 1 - P_4(k < 2) = 1 - P_4(0) - P_4(1) = 1 - C_4^0 \cdot p^0 \cdot q^4 - C_4^1 \cdot p^1 \cdot q^3 =$

$$= 1 - 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{16} - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{11}{16};$$

$$P_5(k \geq 3) = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 + C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^0 + C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 =$$

$$= \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot \frac{1}{32} + 5 \cdot \frac{1}{32} + 1 \cdot \frac{1}{32} = \frac{16}{32} = \frac{8}{16} \Rightarrow P_4(k \geq 2) > P_5(k \geq 3).$$

Ответ. $P_2(1) > P_4(2)$, $P_4(k \geq 2) > P_5(k \geq 3)$.

Пример 2. В среднестатистической семье Узбекистана 5 детей. Найти вероятность того, что среди этих детей: а) два пацана; б) не более двух па-

цанов; в) более двух пацанов; г) не менее двух и не более 3 трех пацанов. Вероятность рождения мальчика (пацана) в этот период времени считается равной $p = 0{,}51$.

Решение

Задача решается по формуле Бернулли, т. к. она аналогична предыдущему примеру:

а) $P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{6} 0{,}51^2 \cdot 0{,}49^3 \approx 0{,}306$;

б) $P_5(k \le 2) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 + C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 + P_5(2) =$

$= 1 \cdot 0{,}49^5 + 5 \cdot 0{,}51 \cdot 0{,}49^4 + 0{,}306 \approx 0{,}028 + 0{,}147 + 0{,}306 \approx 0{,}481$;

в) $P_5(k > 2) = 1 - P_5(k \le 2) \approx 1 - 0{,}481 = 0{,}519$;

г) $P_5(2 \le k \le 3) = P_5(2) + P_5(3) =$

$= 0{,}306 + C_5^3 \cdot 0{,}51^3 \cdot 0{,}49^2 = 0{,}306 + \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 0{,}133 \cdot 0{,}240 \approx 0{,}625$.

Ответ. $P_5(2) \approx 0{,}306$, $P_5(k \le 2) \approx 0{,}481$, $P_5(k > 2) \approx 0{,}519$, $P_5(2 \le k \le 3) \approx 0{,}625$.

Пример 3. В мирное время вероятность p рождения мальчика равна 0,49. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется ровно 50 мальчиков.

Решение

В связи с тем, что количество испытаний (100) достаточно большое, в этой задаче вместо формулы Бернулли применяется локальная теорема Лапласа (локальная – потому, что в условии число успехов (50) дано со словом «ровно»):

$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$, *где* $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

У нас: $n = 100$, $k = 50$, $p = 0{,}49$, $q = 0{,}51$,

$\Rightarrow \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}51} \approx 4{,}999$, поэтому $x = \frac{(50 - 100 \cdot 0{,}49)}{4{,}999} \approx 0{,}200$, а, следовательно, по таблице 1 (с. 60 данного пособия) для нахождения значений функции Лапласа $\varphi(x) = \varphi(0{,}200) \approx 0{,}391$, в итоге получается: $P_{100}(50) \approx \frac{1}{4{,}999} \cdot 0{,}391 \approx 0{,}078$.

Пример 4. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8 и постоянна в каждом из 400 выстрелов. Найти вероятность того,

что мишень будет поражена при 400 выстрелах: а) не менее 310 раз, но не более 340 раз; б) не менее 310 раз.

Решение

В связи с тем, что количество испытаний (400) достаточно большое, в этой задаче вместо формулы Бернулли применяется интегральная теорема Лапласа (интегральная – потому, что в условии число успехов дано в виде интервала (от…до…)):

$P_n(k_1;k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$,

причем значения функции Лапласа $\Phi(x)$ находятся (с. 61 данного пособия) с помощью таблицы 2, в которой, в частности, написано, что функция $\Phi(x)$ является нечетной:

а) имеем: $n = 400$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2 \Rightarrow \sqrt{npq} = 8$, $\Rightarrow$

$x_2 = \dfrac{(340 - 0{,}8 \cdot 400)}{8} \approx 2{,}5$; $x_1 = \dfrac{(310 - 0{,}8 \cdot 400)}{8} \approx -1{,}25$.

Поэтому $P_{400}(310; 340) \approx \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) =$ (в силу нечетности) $=$
$= \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25) \approx 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882$;

б) $P_{100}(310; 400) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где

$x_2 = \dfrac{(400 - 320)}{8} \approx 10$; $x_1 = \dfrac{(310 - 320)}{8} \approx -1{,}25$, $\Rightarrow$

$P_{400}(310; 400) \approx \Phi(10) + \Phi(1{,}25) = 0{,}5 + 0{,}3944 \approx 0{,}8944$.

Ответ. $P_{400}(310; 340) \approx 0{,}8882$; $P_{400}(310; 400) \approx 0{,}8944$ (вывод: если количество успехов дано в виде интервала, то вероятность успеха существенно выше).

Пример 5. Сложное устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность p отказа каждого элемента одинакова и равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном испытании.

Решение

Пусть дискретная случайная величина X = {число отказавших элементов из трех имеющихся в одном испытании}.

Все возможные значения данной случайной величины таковы:

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

При описанных в тексте задачи условиях применима формула Бернулли:

$$P_3(0) = C_3^0 \cdot p^0 \cdot q^3 = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}729;$$
$$P_3(1) = C_3^1 \cdot p \ \cdot q^2 = 3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}243;$$
$$P_3(2) = C_3^2 \cdot p^2 \cdot q \ = 3 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9 \ = 0{,}027;$$
$$P_3(3) = C_3^3 \cdot p^3 \cdot q^0 = 1 \cdot 0{,}1^3 \cdot 1 = 0{,}001.$$

Проверка: 0,729 + 0,243 + 0,027 + 0,001 = 1 (точно).

Ответ. Закон распределения:

x	0	1	2	3
P	0,729	0,243	0,027	0,001

Пример 6. Книга издана тиражом 100 тысяч экземпляров. Вероятность того, что отдельно взятая книга неправильно сброшюрована, равно 0,0001. Найти вероятность того, что весь тираж содержит: а) равно 10 бракованных книг; б) от 8 до 10 бракованных книг.

Решение

Число испытаний n = 100 000 – достаточно большое, а вероятность $p = 0{,}0001$ – очень маленькая, поэтому применимо распределение Пуассона: $P_n(k) \approx \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где $\lambda = n \cdot p$ = 100000·0,0001=10;

а) в первом случае:

$$P_{100000}(10) \approx \frac{10^{10} \cdot e^{-10}}{10!} = \frac{(10/e)^{10}}{10!} \approx \frac{453999{,}2984}{3628800} \approx 0{,}12511;$$

б) во втором: $P_{100000}(8 \le k \le 10) = P_{10^5}(8) + P_{10^5}(9) + P_{10^5}(10)$, где

$$P_{10^5}(8) \approx \frac{10^8 \cdot e^{-10}}{8!} = \frac{(10/e)^8}{e^2 \cdot 8!} \approx 0{,}112599,$$

$$P_{10^5}(9) \approx \frac{10^9 \cdot e^{-10}}{9!} = \frac{(10/e)^9 \cdot e^{-1}}{9!} \approx \frac{45399{,}92984}{362880} \approx 0{,}12511,$$

$$P_{10^5}(10) \approx 0{,}12511.$$

Поэтому при сложении получается: $P_{10^5}(8 \le k \le 10) \approx 0{,}36282$.

Ответ. $P_{10^5}(8 \le k \le 10) \approx 0{,}36282$.

Пример 7. Среднее число вызовов Яндекс-такси, поступающих диспетчеру (по телефону 3830000) за одну минуту, равно 3. Найти вероятность того, что за 120 секунд поступит: а) 4 вызова; б) менее четырех вызовов; в) не менее четырех вызовов.

Решение

Имеет место простейший поток событий (вызов такси), поэтому по формуле Пуассона:

$$P_t(k) \approx \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!},$$

где по условию: $\lambda = 3$, $t = 120$ сек. (секунды переводим в минуты, т. к. в начале условия время дано в минутах): $t = 2$ мин., поэтому:

$$P_t(k) \approx \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!} = \frac{6^k \cdot e^{-6}}{k!}.$$

а) в первом случае: $P_2(4) \approx \frac{6^4 \cdot e^{-6}}{4!} = \frac{36 \cdot 36}{24 \cdot e^6} = \frac{54}{e^6} \approx 0{,}13385$;

б) во втором: $P_2(k < 4) = P_2(0) + P_2(1) + P_2(2) + P_2(3) =$

$$= \frac{6^0 \cdot e^{-6}}{0!} + \frac{6^1 \cdot e^{-6}}{1!} + \frac{6^2 \cdot e^{-6}}{2!} + \frac{6^3 \cdot e^{-6}}{3!} = e^{-6}(1+6+18+36) = \frac{61}{e^6} \approx 0{,}15120;$$

в) в третьем случае: $P_2(k \geq 4) = 1 - P_2(k < 4) \approx 1 - 0{,}15120 = 0{,}84880$.

Ответ. $P_2(4) \approx 0{,}13385$, $P_2(k < 4) \approx 0{,}15120$, $P_2(k \geq 4) \approx 0{,}84880$.

Самостоятельная работа

Задача 8. Среднее число вызовов машины скорой помощи, поступающих в 1 минуту, равно 2. Найти вероятность того, что за 240 секунд поступит:
а) 2 вызова; б) < 3 вызовов; в) не менее трех вызовов.

Ответ. а) $P_4(2) \approx 0{,}0107$; б) $P_4(k<3) \approx 0{,}0123$; в) $P_4(k \geq 3) \approx 0{,}9877$.

Задача 9. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах стрелок поразит мишень ровно 75 раз.

Краткое решение

Здесь: $n = 100$, $k = 75$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$, $\Rightarrow$

$\sqrt{npq} = 4$, $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{(75 - 80)}{4} \approx -1{,}25$, с учетом того, что функция $\varphi(x)$ – это четная функция (таблица 1, с. 60):

$$\varphi(x) = \varphi(-1{,}25) = \varphi(1{,}25) \approx 0{,}1826 \Rightarrow P_{100}(75) \approx \frac{1}{4} \cdot 0{,}1826 \approx 0{,}04565.$$

Замечание. Студентам необходимо представить полное решение этой задачи.

Ответ. Вероятность равна 0, 04565 (вывод: довольно маленькая вероятность для достижения конкретного числа (75) успехов).

Задача 10. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,7 и постоянна в каждом из 200 выстрелов. Найти вероятность того, что мишень будет поражена при 200 выстрелах: а) не менее 120 раз, но не более 160 раз; б) не менее 160 раз; в) ровно 140 раз.

Ответ: а) 0,986; б) 0,007; в) 0,062.

Задача 11. В партии 10% бракованных изделий. Наудачу отобраны 4 изделия. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа бракованных изделий среди четырех отобранных.

Ответ.

x	0	1	2	3	4
P	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

Задача 12. Устройство состоит из 1000 простейших элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказа любого элемента в течение недели равна 0,02. Найти вероятность того, что за неделю откажут ровно три простейших элемента.

Ответ: $P_{1000}(3) = 0{,}18$.

Занятие 5 и 6. Контрольная работа №1 «Теория вероятностей»

Для получения допуска к первой контрольной работе студенту необходимо выполнить следующее:

а) сдать первую и вторую задачи расчетно-графической работы по своему варианту и получить по этим задачам «зачтено»;

б) затем представить на проверку рукописные решения занятий №1, 2, 3, 4 (ответы на контрольные вопросы, аудиторные задания и самостоятельную работу), и получить по ним «зачтено»;

в) представить рукописные решения нижеследующего образца контрольной работы (и получить «зачтено»).

ОБРАЗЕЦ

1. В коробке находятся 5 синих, 4 красных и 3 зелёных карандаша. Наудачу из этой коробки взяты 3 карандаша. Какова вероятность того, что

среди взятых трёх карандашей окажется: а) три карандаша одного цвета; б) все три карандаша разных цветов; в) 2 синих и 1 зелёный карандаш?

Ответ: а) 3/44; б) 3/11; в) 3/22.

2. В круг радиуса R вписан правильный треугольник. По данному кругу произведен удачный выстрел. Найти вероятность того, что пуля попадет в этот треугольник.

Ответ. $p(A) = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

3. Из колоды в 36 карт наудачу взяты 3 карты. Найти вероятность того, что среди взятых трёх карт окажется: а) хотя бы один туз; б) ровно два туза.

Ответ: а) 0,3053; б) 192/7140.

4. В выставочный зал магазина электроники поступает 40% телевизоров с первого склада и 60% - со второго склада. На первом складе находится в среднем 90% исправных телевизоров, а на втором – 5% бракованных телевизоров. Найти вероятность того, что наудачу взятый продавцом телевизор окажется исправным.

Ответ. 0,93.

5. Студент Сидоров выучил 30 экзаменационных билетов из сорока, которые приготовил преподаватель для этого экзамена. Каким ему выгоднее зайти на экзамен: первым или вторым?

Ответ. Вероятность равна 0,75, одинаково.

6. Прибор составлен из двух микросхем. Вероятность выхода из строя в течение 10 лет для первой микросхемы равна 0,07, та же вероятность для второй микросхемы – 0,1. Известно, что из строя вышла одна (неизвестно которая) микросхема. Какова вероятность того, что вышла из строя именно первая микросхема?

Ответ. 0,404.

Занятие 7, 8. Числовые характеристики дискретных случайных величин и их свойства

Контрольные вопросы

1. Как находится математическое ожидание дискретной случайной величины?
2. Запишите свойства математического ожидания.
3. Как находится дисперсия и среднеквадратическое отклонение дискретной случайной величины?
4. Запишите свойства дисперсии.

Аудиторные задания

Пример 1. Найти математическое ожидание $M(X)$ дискретной случайной величины X, которая задана законом распределения:

а)

X	–4	6	10
P	0,2	0,3	0,5

б)

X	0,21	0,54	0,61
P	0,1	0,5	0,4

Решение

а) $M(X) = -4 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}3 + 10 \cdot 0{,}5 = 6$;
б) аналогично: $M(X) = 0{,}535$.

Пример 2. Найти математическое ожидание $M(Z)$, если известно:
а) $Z = X + 2Y$, $M(X) = 5$, $M(Y) = 3$; б) $Z = 3X + 4Y$, $M(X) = 2$, $M(Y) = 6$.

Решение

а) Используя свойство линейности математического ожидания:
$M(Z) = M(X+2Y) = M(X) + 2\,M(Y) = 5 + 6 = 11$;

б) аналогично: $M(Z) = 30$.

Пример 3. Дан перечень всех возможных значений дискретной случайной величины X: $x_1=-1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$; кроме этого, известны: $M(X) = 0{,}5$; $M(X^2) = 0{,}9$. Найти вероятности p_1, p_2 и p_3. Записать закон распределения.

Решение

По формуле для нахождения математического ожидания получается система трех уравнений:

$$\begin{cases} p_1+p_2+p_3=1 \\ M(X)=0{,}1 \\ M(X^2)=0{,}9 \end{cases} \left| \begin{array}{l} p_1+p_2+p_3=1 \\ -1\cdot p_1+0+1\cdot p_3=0{,}1 \\ (-1)^2\cdot p_1+0^2+1^2\cdot p_3=0{,}9 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} p_2=1-p_1-p_3 \\ p_1=p_3-0{,}1 \\ 2p_3=1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} p_2=0{,}1; \\ p_1=0{,}4; \\ p_3=0{,}5. \end{array} \right.$$

Ответ. Закон распределения:

X	–1	0	1
P	0,4	0,1	0,5

Пример 4. Найти $M(X)$, если X = {число таких бросаний пяти игральных костей, в каждом из которых на двух костях появляется по единице, причем общее число бросаний $n = 20$}.

Решение

По свойствам математического ожидания:

$M(X) = n \cdot P$, где $n = 20$, а вероятность P находится по формуле Бернулли:

$$P = P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{4\cdot 5}{2} \cdot \frac{5^3}{6^5} = 2 \cdot \frac{5^4}{6^5} \Rightarrow$$

$$M(X) = n \cdot P = 20 \cdot 2 \cdot \frac{5^4}{6^5} = 8 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 3{,}215.$$

Пример 5. Случайные величины X и Y независимы. Найти дисперсию $D(Z)$, если $Z = 3X + 2Y$, $D(X) = 5$, $D(Y) = 7$.

Решение

Случайные величины $3X$ и $2Y$ – тоже независимы, поэтому по свойствам дисперсии:

$D(Z) = D(3X+2Y) = D(3X) + D(2Y) = 3^2 \cdot D(X) + 2^2 \cdot D(Y) = 9\cdot 5 + 4\cdot 7 = 73$.

Пример 6. Найти дисперсию $D(X)$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$, если дан закон распределения случайной величины.

X	–5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Решение

По свойствам дисперсии: $\sigma^2(X) = D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$.

Закон распределения для X^2 составляется так:

X^2	25	4	9	16
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Поэтому:

$M(X^2) = 25\cdot0{,}4 + 4\cdot0{,}3 + 9\cdot0{,}1 + 16\cdot0{,}2 = 10 + 1{,}2 + 0{,}9 + 3{,}2 = 15{,}3.$
Далее: $M(X) = -5\cdot0{,}4 + 2\cdot0{,}3 + 3\cdot0{,}1 + 4\cdot0{,}2 = -2 + 0{,}6 + 0{,}3 + 0{,}8 = -0{,}3,$
$\Rightarrow D(X) = \sigma^2(X) = 15{,}3 - (-0{,}3)^2 = 15{,}21 \Rightarrow \sigma(X) = \sqrt{15{,}21} = 3{,}9.$

Ответ. $D(X) = 15{,}21$; $\sigma(X) = 3{,}9$.

Пример 7. Найти $D(X)$, если X = {число отказов элемента устройства в двух независимых опытах}, при условии, что вероятность отказа в каждом опыте постоянна и математическое ожидание $M(X) = 1{,}2$.

Решение

По свойствам дисперсии: $D(X) = n\cdot p\cdot q$.
По свойствам математического ожидания:
$M(X) = n\cdot p = M(X) = 1{,}2 = n\cdot p = 2\cdot p \Rightarrow p = 0{,}6 \Rightarrow q = 0{,}4 \Rightarrow$
$D(X) = n\cdot p\cdot q = 2\cdot0{,}6\cdot0{,}4 = 0{,}48.$

Пример 8. Дискретная случайная величина X принимает только два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_2 > x_1$. Вероятность p_1 для x_1 равна 0,6. Найти закон распределения, если математическое ожидание $M(X) = 1{,}4$, а дисперсия $D(X) = 0{,}24$.

Решение

Имеем: $p_1+p_2 = 1 \Rightarrow p_2 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$. Осталось найти x_1 и x_2. Закон распределения для случайной величины X^2:

X^2	x_1^2	x_2^2
P	0,6	0,4

Далее получается система двух уравнений для двух неизвестных:

$$\begin{cases} M(X) = 1{,}4 \\ D(X) = 0{,}24 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 0{,}6\cdot x_1 + 0{,}4\cdot x_2 = 1{,}4 \\ D(X) = 0{,}24 \end{array} \right.$$

Учитывая следующее:

$$\left.\begin{array}{l} M(X^2) = 0{,}6\cdot x_1^2 + 0{,}4\cdot x_2^2 \\ [M(X)]^2 = 1{,}4^2 = 1{,}96 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 0{,}6x_1^2 + 0{,}4x_2^2 - 1{,}96 = 0{,}24 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 0{,}6x_1 + 0{,}4x_2 = 1{,}4 \\ 0{,}6x_1^2 + 0{,}4x_2^2 = 2{,}2 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 6x_1 + 4x_2 = 14 \\ 6x_1^2 + 4x_2^2 = 22 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} x_2 = 3{,}5 - 1{,}5x_1 \\ 3x_1^2 + 2x_2^2 = 11 \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x_1^2 + 2(3{,}5 - 1{,}5x_1)^2 = 11 \\ x_2 = 3{,}5 - 1{,}5x_1 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 3x_1^2 + 2(12{,}25 - 10{,}5x_1 + 2{,}25x_1^2) = 11 \\ x_2 = 3{,}5 - 1{,}5x_1 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 7{,}5x_1^2 - 21x_1 + 13{,}5 = 0 \\ x_2 = 3{,}5 - 1{,}5x_1 \end{cases} \left| \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{21 \pm \sqrt{441 - 405}}{15} = \dfrac{21 \pm 6}{15} \\ x_2 = 3{,}5 - 1{,}5x_1 \end{array} \right| \Rightarrow$$

$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1 = 1{,}8 \\ x_2 = 0{,}8 \end{cases}$, однако по условию $x_2 > x_1$, следовательно в ответ пойдет первый вариант.

Ответ.

X	1	2
P	0,6	0,4

Самостоятельная работа

Задача 9. Дискретная случайная величина X принимает только три возможных значений: $x_1 = 4$ с вероятностью $p_1 = 0{,}5$; $x_2 = 6$ с вероятностью $p_2 = 0{,}3$ и x_3 с вероятностью p_3. Найти закон распределения, если $M(X) = 8$.

Ответ.

X	4	6	21
P	0,5	0,3	0,2

Задача 10. Известны все возможные значения дискретной случайной величины X: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$; кроме этого, даны $M(X) = 2{,}3$; $M(X^2) = 5{,}9$. Найти закон распределения.

Ответ.

X	1	2	3
P	0,2	0,3	0,5

Задача 11. Устройство состоит из 8 элементов. Вероятность отказа любого элемента в течении опыта равна $p = 0{,}1$. Найти математическое ожидание числа таких опытов, в каждом из которых откажет ровно два элемента, если всего произведено 30 опытов, которые не зависят друг от друга.

Ответ. $M(X) \approx 4{,}464$.

Задача 12. Случайные величины X и Y независимы. Найти $D(Z)$, если $Z = 2X + 3Y$, $D(X) = 2$, $D(Y) = 6$.

Ответ. $D(Z) = 62$.

Задача 13. Найти $D(X)$ и $\sigma(X)$, если дан закон распределения.

X	4,3	5,1	10,6
P	0,2	0,3	0,5

Ответ. $D(X) = 8{,}545$; $\sigma(X) = 2{,}923$.

Задача 14. Дискретная случайная величина X принимает только два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_2 > x_1$. Вероятность p_1 для x_1 равна 0,2. Найти закон распределения, если $M(X) = 2{,}6$ и $\sigma(X) = 0{,}8$.

Ответ.

X	1	3
P	0,2	0,8

Занятия 9, 10. Неравенство Чебышева. Функция распределения вероятностей и плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины. Числовые характеристики непрерывных случайных величин. Нормальное распределение

Контрольные вопросы

1. Запишите неравенство Чебышева.
2. Что такое непрерывная случайная величина и как задается ее функция распределения?
3. Каковы свойства функции распределения?
4. Что называется плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины, и каковы ее свойства?
5. Как можно найти функцию распределения, если задана плотность распределения?
6. Как определяются числовые характеристики непрерывной случайной величины?
7. Что такое нормальное распределение и как выглядит нормальная кривая?

Пример 1. Вероятность p появления «решки» в каждом из 100 независимых бросаний постоянна и равна 0,5. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что случайная величина X = {число «решек» в этих 100 бросаниях} будет заключено в пределах от 40 до 60.

Решение

По свойствам математического ожидания: $M(X) = n \cdot P = 50$.

По свойствам дисперсии: $D(X) = n \cdot p \cdot q = 50 \cdot 0{,}5 = 25$. По условию случайная величина X должна находиться в пределах от 40 до 60, то есть середина этого интервала есть 50, а разброс (влево, вправо) равен $\varepsilon = 10$.

Далее в соответствии с неравенством Чебышева:

$P(40<X<60) = P(|X - 50| <10) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{25}{100} = 0{,}75.$

Вывод: оцениваемая вероятность – не менее 0,75.

Пример 2. В осветительную сеть параллельно включены двадцать ламп. Вероятность того, что за сутки лампа будет включена, равна 0,8. Пользуясь неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом включенных ламп и средним числом (математическим ожиданием) включенных ламп за сутки:

а) будет меньше трех; б) будет не меньше трех.

Решение

Пусть дискретная случайная величина X задана так:

X = {число включенных ламп за сутки).

По свойствам математического ожидания: $M(X) = n \cdot p = 20 \cdot 0{,}8 = 16$; а по свойствам дисперсии: $D(X) = n \cdot p \cdot q = 16 \cdot 0{,}2 = 3{,}2$. Далее по неравенству Чебышеву:

а) $P(|X - 16| < 3) > 1 - \frac{3{,}2}{3^2} \approx 0{,}64$, поэтому

б) $P(|X - 16| \geq 3) = 1 - P(|X - 16| < 3) < 0{,}36.$

Пример 3. Случайная величина X задана на всей числовой прямой своей функцией распределения: $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctgx$. Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервал (0;1)

Решение

В соответствии со свойствами функции распределения непрерывной случайной величины:

$P(a<X<b) = F(b) - F(a)$, при этом $b = 1$, $a = 0$, значения функции распределения:

$F(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = 0{,}75,$

$F(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg\,0 = 0{,}5$

Ответ. $P(0<X<1) = 0{,}25.$

Пример 4. Задана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 0;\\ x^2 & при\ 0<x\le 1;\\ 1 & при\ x>1.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний величина X ровно 3 раза примет значение из интервала (¼;¾).

Решение

В этой задаче есть повторение испытаний (четыре раза), поэтому по формуле Бернулли:

$$P_4(3)=C_4^3\cdot p^3\cdot q=\frac{4!}{3!\cdot 1!}\cdot p^3\cdot q=4\cdot p^3\cdot(1-p).$$

Найдем $p = P(¼<X<¾) = F(¾) – F(¼)$,

По условию: $F(¾)=x^2\Big|_{x=\frac{3}{4}}=\frac{9}{16}$; $F(¼)=x^2\Big|_{x=\frac{1}{4}}=\frac{1}{16}$;

поэтому $p = F(¾) – F(¼) = \frac{9}{16}-\frac{1}{16}=\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$.

Следовательно $P_4(3)=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}=4\cdot\frac{1}{16}=0{,}25$.

Ответ. 0,25.

Пример 5. Задан закон распределения дискретной случайной величины. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

X	2	4	7
P	0,5	0,2	0,3

Решение

В соответствии с определением функция распределения задается так: $F(x) = P(X<x)$. Получается несколько интервалов:

а) если $x \le 2 \Rightarrow F(x) = 0$;

б) если $2 < x \le 4 \Rightarrow F(x) = 0{,}5$;

в) если $4 < x \le 7 \Rightarrow F(x) = P(X<x) = P(X<4) + P(4 <X \le 7) =$
$= 0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}7$;

г) если $x>7 \Rightarrow F(x) = P(X<x) =$
$= P(X<4) + P(4\le X<7) + P(7\le X<x) =$
$= 0{,}5 + 0{,}2 + 0{,}3 = 1$, поэтому

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 2;\\ 0{,}5 & при\ 2<x\le 4;\\ 0{,}7 & при\ 4<x\le 7;\\ 1 & при\ x>7.\end{cases}$$

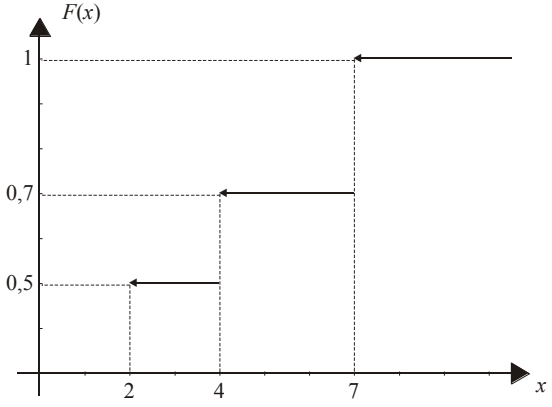


График функции на рисунке внизу страницы 28.

Пример 6. Дана функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины: $F(x)=\begin{cases}0\,при\,x\le 0;\\ \sin x\,при\,0<x\le \pi/2;\\ 1\,при\,x>\pi/2.\end{cases}$. Найти плотность распределения $f(x)$.

Решение

По определению плотности распределения:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0\,при\,x\le 0;\\ \cos x\,при\,0<x<\pi/2;\\ 0\,при\,x>\pi/2.\end{cases}$$

Причем $f(0)$ не существует, так односторонние пределы слева и справа от нуля не равны между собой: $F'(-0)\neq F'(+0)$.

Пример 7. Известна плотность распределения непрерывной случайной величины: $f(x)=\frac{2}{3}\sin(3x), x\in(0;\pi/3)$; и $f(x)$ = 0 для всех остальных x. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(\pi/6; \pi/4)$.

Решение

По свойствам плотности распределения непрерывной случайной величины:

$$P(X\in(\pi/6;\pi/4))=\int_{\pi/6}^{\pi/4}f(x)dx=\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{2}{3}\sin(3x)dx=-\frac{2}{9}\cos(3x)\Big|_{\pi/6}^{\pi/4}=$$

$$=-\frac{2}{9}\left(\cos\frac{3\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{9}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{9}.$$

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{9}$.

Пример 8. Дана плотность распределения $f(x)$ непрерывной случайной величины. Найти функцию распределения, если:

$$f(x)=\cos x, x\in(0;\pi/2];\ f(x)=0, x\notin(0;\pi/2].$$

Решение

По формуле для восстановления функции распределения:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)\,du\ .$$

Здесь имеется несколько вариантов:

а) если $x \le 0$, то $f(u) = 0$, поэтому $F(x) = 0$ на $(-\infty;0]$;

б) если $0 < x \le \pi/2$, то $f(u) = 0$ на $(-\infty;0)$ и $f(u) = \cos u$ на $(0; x]$, поэтому

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\ du+\int_{0}^{x}\cos u\,du=0+\sin u\Big|_0^x=\sin x-\sin 0=\sin x;$$

в) если $x > \pi/2$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0\,du+\int_{0}^{\pi/2}\cos u\,du+\int_{\pi/2}^{x}0\,du=\sin x\Big|_0^{\pi/2}=\sin(\pi/2)-\sin 0=1.$$

Ответ. $F(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 0;\\ \sin x & при\ 0<x\le\pi/2;\\ 1 & при\ x>\pi/2.\end{cases}$

Пример 9. Известна плотность распределения $f(x)$ непрерывной случайной величины X. Найти $M(X)$ и $\sigma(X)$, если:

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin x,\ x\in(0;\pi);\ f(x)=0,\ x\notin(0;\pi).$$

Решение

По определению математического ожидания непрерывной случайной величины:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)dx,\sigma^2=D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[x-M(X)\right]^2\cdot f(x)dx\Rightarrow$$

$$M(X)=\int_{0}^{\pi}x\cdot\frac{1}{2}\sin x\,dx.$$

Для нахождения последнего интеграла первого класса применим метод интегрирование по частям:

$$U=x,\ dU=dx,\ dV=\frac{1}{2}\sin x\,dx\Rightarrow V=\int dV=-\frac{1}{2}\cos x\Rightarrow$$

$$M(X)=U\cdot V\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}VdU=-\frac{x}{2}\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\cos x dx=\frac{\pi}{2}+0+\frac{1}{2}\sin x\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}+0+0=\frac{\pi}{2}.$$

То есть математическое ожидание найдено: $M(X)=\frac{\pi}{2}$.

Тогда дисперсия:

$$D(X)=\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\sin x dx.$$

В этом интеграле тоже применяется метод интегрирования по частям:

$$U=\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2, dU=(2x-\pi)dx, dV=\frac{1}{2}\sin x dx, V=-\frac{1}{2}\cos x\Rightarrow$$

$$D(X)=U\cdot V\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}VdU=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x dx=$$

$$=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{8}+\int_0^{\pi}x\cos x dx-\frac{\pi}{2}\sin x\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{4}+\int_0^{\pi}x\cos x dx-0+0=\int_0^{\pi}x\cos x dx+\frac{\pi^2}{4}.$$

К последнему интегралу применим метод интегрирования по частям:

$U = x$, $dU = dx$, $dV = \cos x\, dx$, $V = \sin x$, поэтому

$$D(X)=U\cdot V\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}VdU+\frac{\pi^2}{4}=x\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x dx+\frac{\pi^2}{4}=0+0+\cos x\Big|_0^{\pi}+\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{4}-2.$$

Ответ. $M(X)=\frac{\pi}{2}, \sigma=\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-2}$.

Пример 10. Дана функция $F(x)$ нормального распределения: $F(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{\frac{-(x-2)^2}{18}}dx$. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

Решение

Для непрерывной случайной величины функция распределения выражается через плотность распределения следующим образом:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx\ .$$

Следовательно, можно найти плотность распределения $f(x)$ и сравнить ее со стандартной записью плотности нормального распределения:

$$f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-2)^2}{18}}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-a)^2}{(2\sigma^2)}}\ .$$

Из полученного равенства следует:

$\sigma = 3$, $a = 2$, $M(X) = a = 2$, $D(X) = \sigma^2 = 9$.

Ответ. $M(X) = 2$, $D(X) = 9$.

Пример 11. Случайная величина X распределена нормально, причем $M(X) = 20$, $D(X) = 25$: Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение из интервала (15;25).

Решение

По свойствам нормального распределения вероятность попадания в заданный интервал находится так:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{25-20}{5}\right) - \Phi\left(\frac{15-20}{5}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) =$$ (так как $\Phi(x)$ – нечетная функция) $= 2\Phi(1) =$ (по таблице 1) $= 2 \cdot 0{,}3413 = 0{,}6826$.

Ответ. 0,6826.

Самостоятельная работа

Задача 12. Непрерывная случайная величина X задана своей функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad при\ x \le -1; \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \quad при\ -1 < x \le \frac{1}{3}; \\ 1 \quad при\ x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в X примет значение из интервала (0;⅓).

Ответ. P (0<X<⅓) = 0,25.

Задача 13. Задан закон распределения дискретной случайной величины X. Найти функцию распределения и построить ее график.

X	3	4	7	10
P	0,2	0,1	0,4	0,3

Ответ:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad при\ x \le 3; \\ 0{,}2\ при\ 3 < x \le 4; \\ 0{,}3\ при\ 4 < x \le 7; \\ 0{,}7\ при\ 7 < x \le 10; \\ 1 \quad при\ x > 10. \end{cases}$$

Задача 14. Найти плотность распределения непрерывной случайной величины, если известна ее функция распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0\ при\ x\le 0;\\ \sin(2x)\ при\ 0<x<\pi/4;\\ 0\ при\ x>\pi/4.\end{cases}$$

Ответ. $f(x) = 2\cos(2x)$, $0 < x < \pi/4$, а для всех остальных x: $f(x) = 0$.

Задача 15. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины: $f(x)=\alpha\cdot e^{-\alpha x}, x\in(0;\infty), \alpha>0,\ f(x)=0, x\notin(0;\infty)$. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение из интервала (1; 2).

Ответ: $e^{-\alpha}-e^{-2\alpha}$.

Задача 16. Задана плотность распределения $f(x)$. Найти соответствующую ей функцию распределения $F(x)$, если:

$f(x)=\sin x, x\in(0;\pi/2]; f(x)=0, x\notin(0;\pi/2]$.

Ответ. $F(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 0;\\ 1-\cos x & при\ 0<x\le\pi/2;\\ 1 & при\ x>\pi/2.\end{cases}$

Задача 17. Известна плотность распределения $f(x)$ непрерывной случайной величины X. Найти $M(X)$ и $D(X)$, если:

$f(x)=\cos x,\ x\in(0;\pi/2);\ f(x)=0,\ x\notin(0;\pi/2)$.

Ответ. $M(X)=\frac{\pi}{2}-1,\ D(X)=\pi-3$.

Задача 18. Найти $M(X)$ и $D(X)$, если задана плотность нормального распределения: $f(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-3)^2}{50}}dx$.

Ответ. $M(X) = 3$, $D(X) = 25$.

Задача 19. Случайная величина X распределена нормально, причем $M(X) = 10$, $D(X) = 4$: Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение из интервала (12;14).

Ответ. $P(12 < X < 14) = 0{,}1359$.

Занятие 11. Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения. Полигон и гистограмма

Контрольные вопросы

1. Что такое выборка, и какие бывают выборки?
2. Что такое статистическое распределение выборки?

3. Что называется эмпирической функцией распределения, и каковы ее свойства?
4. Что такое полигон частот (полигон относительных частот)?
5. Что такое гистограмма частот (гистограмма относительных частот) и как ее построить?

Аудиторные задания

Пример 1. Найти распределение относительных частот, если выборка задана в виде распределения частот.

x_i	3	5	10
n_i	2	3	5

Решение

Найдем объем выборки: $n = \sum n_i = 2+3+5 = 10 \Rightarrow n = 10.$

Относительные частоты: $w_1 = \frac{n_1}{n} = 0{,}2;\ w_2 = \frac{3}{10} = 0{,}3;\ w_3 = \frac{5}{10} = 0{,}5.$

Контроль: 0,2+0,3+0,5 = 1.

Ответ.

x_i	3	5	10
w_i	0,2	0,3	0,5

Пример 2. Найти эмпирическую функцию распределения, если известно распределение частот.

x_i	2	4	7
n_i	20	10	20

Решение

Эмпирической функцией распределения называется функция:

$F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, где n_x – частота появления события $A = \{X<x\}$.

Объем выборки: $n = 20+10+20 = 50$. Далее:

а) так как наименьшая варианта равна 2, а наибольшая равна 7, то по свойствам эмпирической функции распределения:

$F^*(x) = 0$ при $x \le 2$ и $F^*(x) = 1$ при $x > 7$;

б) при $X < 4$, значение $x_1 = 2$ наблюдалось 20 раз, поэтому

$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{20}{50} = 0{,}4$ при $2 < x \le 4$;

в) в интервал: $X < 7$ – попадают два значения: $x_1 = 2$ (с частотой 20 раз) и $x_2 = 4$ (с частотой 10 раз), то есть $X < 7$ наблюдалось:

$20 + 10 = 30 = n_x$ раз, поэтому $F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{30}{50} = 0{,}6$ при $4 < x \le 7$;

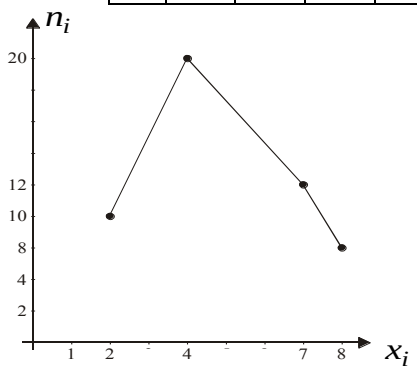
Ответ. $$F^*(x) = \begin{cases} 0 & при\ x \le 2; \\ 0{,}4 & при\ 2 < x \le 4; \\ 0{,}6 & при\ 4 < x \le 7; \\ 1 & при\ x > 7. \end{cases}$$

Пример 3. Построить полигон частот по данному распределению выборки.

x_i	2	4	7	8
n_i	10	20	12	8

Решение

По оси абсцисс откладываем варианты: x_1, x_2, x_3, x_4; а по оси ординат их частоты. Точки $(x_i; n_i)$ соединяем ломаной линией – это и есть полигон частот.



Пример 4. Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки.

x_i	2	4	5	7	10
n_i	3	4	2	2	9

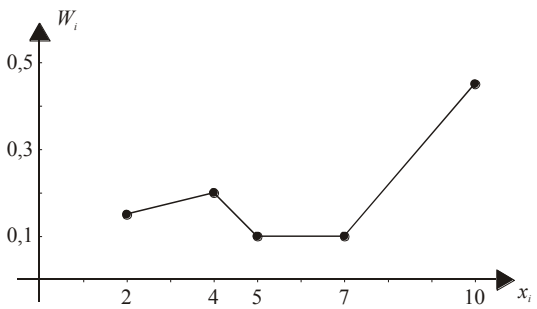
Решение

Найдем объем выборки: $n = \sum n_i = 20$.

Относительные частоты:

$$w_1 = \frac{n_1}{n} = 0{,}15;\ w_2 = \frac{4}{20} = 0{,}2;\ w_3 = \frac{2}{20} = 0{,}1;$$

$$w_4 = \frac{n_4}{n} = 0{,}1;\ w_5 = \frac{9}{20} = 0{,}45.$$



Строим полигон относительных частот.

Пример 5. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки объема $n = 100$.

Частичный интервал	Сумма частот вариант интервала
1-5	20
5-9	10
9-13	50
13-17	8
17-21	12

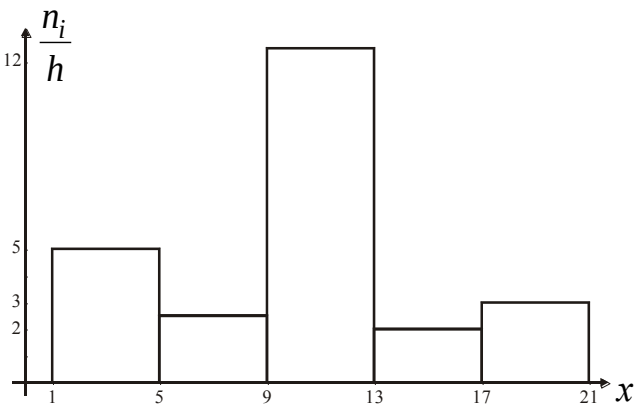
Решение

Найдем h – длину любого из интервалов: $h = 5 - 1 = 4$.

Находим плотности частот:

$$\frac{n_1}{h} = 5, \frac{n_2}{h} = 2{,}5; \frac{n_3}{h} = 12{,}5; \frac{n_4}{h} = 2, \frac{n_5}{h} = 3.$$

На оси абсцисс откладываем все частичные интервалы, а на этих интервалах достраиваем прямоугольни-



ки высотой, равной соответствующей плотности частоты. Получается гистограмма частот.

Замечание: нужно проверить, что сумма площадей всех прямоугольников равна 100 (объем выборки).

Самостоятельная работа

Задача 6. Выборка задана в виде распределения частот. Найти распределение относительных частот.

x_i	3	6	8	14
n_i	4	1	10	5

Ответ.

x_i	3	6	8	14
w_i	0,20	0,05	0,5	0,25

Задача 7. Найти эмпирическую функцию распределения, если известно распределение частот.

x_i	3	6	8
n_i	2	3	5

Ответ. $F^*(x) = \begin{cases} 0 & при\ x \le 3; \\ 0{,}2 & при\ 3 < x \le 6; \\ 0{,}5 & при\ 6 < x \le 8; \\ 1 & при\ x > 8. \end{cases}$

Задача 8. Построить полигон частот по данному распределению выборки.

x_i	1	3	5	7
n_i	15	10	20	5

Задача 9. Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки.

x_i	2	4	5	8	10
n_i	3	5	6	4	2

Задача 10. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки объема $n = 50$.

Частичный интервал	Сумма частот вариант интервала
3-8	4
8-13	6
13-18	5
18-23	10
23-28	25

Занятие 12. Статистические оценки параметров распределения

Пример 1. Из генеральной совокупности известна выборка объема $n = 50$. Найти несмещенную оценку генеральной средней, а также найти выборочную и исправленную дисперсии.

x_i	3	5	6	9
n_i	12	8	11	19

Решение

1. По свойствам выборочной средней несмещенной оценкой генеральной средней является выборочная средняя:

$$\bar{x}_B = \frac{(x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + x_3 \cdot n_3 + x_4 \cdot n_4)}{n} = \frac{(36 + 40 + 66 + 171)}{50} = 6{,}26.$$

2. Дисперсия (первый способ):

$$D_B = \overline{(x^2)_B} - \left(\overline{x_B}\right)^2 = \frac{(x_1^2 \cdot n_1 + x_2^2 \cdot n_2 + x_3^2 \cdot n_3 + x_4^2 \cdot n_4)}{n} - (6{,}26)^2 =$$

$$= \frac{(3^2 \cdot 12 + 5^2 \cdot 8 + 6^2 \cdot 11 + 9^2 \cdot 19)}{50} - 39{,}1876 = \frac{(108 + 200 + 396 + 1539)}{50} - 39{,}1876 =$$

$$= \frac{2243}{50} - 39{,}1876 = 44{,}86 - 39{,}1876 = 5{,}6724.$$

3. Дисперсия (второй способ):

$$D_B = \frac{(x_1 - \overline{x_B})^2 \cdot n_1 + (x_2 - \overline{x_B})^2 \cdot n_2 + (x_3 - \overline{x_B})^2 \cdot n_3 + (x_4 - \overline{x_B})^2 \cdot n_4}{n} =$$

$$= \frac{(3 - 6{,}26)^2 \cdot 12 + (5 - 6{,}26)^2 \cdot 8 + (6 - 6{,}26)^2 \cdot 11 + (9 - 6{,}26)^2 \cdot 19}{50} =$$

$$= \frac{10{,}6276 \cdot 12 + 1{,}5876 \cdot 8 + 0{,}0676 \cdot 11 + 7{,}5076 \cdot 19}{50} = \frac{127{,}5312 + 12{,}7008 + 0{,}7436 + 142{,}6444}{50} =$$

$$= \frac{283{,}62}{50} = 5{,}6724,$$ что совпадает абсолютно точно с первым способом.

4. Исправленная дисперсия:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_B = \frac{50}{49} \cdot 5{,}6724 \approx 5{,}7882.$$

Ответ. $\bar{x}_B = 6{,}26$, $D_B = 5{,}6724$, $S^2 \approx 5{,}7882$.

Задача 2. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 100$. Найти несмещенную оценку генеральной средней, а также найти выборочную и исправленную дисперсии.

x_i	1	2	5	8	10
n_i	10	24	11	20	35

Ответ. $\bar{x}_B = 6{,}23$, $D_B = 12{,}7971$, $S^2 \approx 12{,}926$.

Пример 3. Найти выборочную среднюю, если известно распределение выборки объема $n = 100$.

x_i	1350	1380	1420
n_i	3	5	2

Решение

Первоначальные варианты x_i – большие числа, поэтому перейдем к условным вариантам:
$u_i = x_i - 1380$, в результате чего получим следующее распределение условных вариант.

u_i	–30	0	40
n_i	3	5	2

Тогда $\bar{x}_B = 1380 + \bar{u}_B$, где $\bar{u}_B = \dfrac{(-30 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 40 \cdot 2)}{10} = -1$, поэтому $\bar{x}_B = 1379$.

Ответ. $\bar{x}_B = 1379$.

Задача 4. Найти выборочную среднюю, если известно распределение выборки объема $n = 20$.

x_i	3650	3690	3710	3740
n_i	2	3	10	5

Ответ. $\bar{x}_B = 3708{,}5$.

Пример 5. По выборке объема $n = 51$ найдена смещенная оценка $D_B = 4$ генеральной дисперсии. Найти несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности.

Решение

По свойствам выборочной дисперсии искомая несмещенная оценка равна исправленной дисперсии: $S^2 = \dfrac{n}{n-1} \cdot D_B = \dfrac{51}{50} \cdot 4 = 4{,}08$.

Ответ. $S^2 = 4{,}08$.

Задача 6. По выборке объема $n = 106$ найдена смещенная оценка $D_B = 6$ генеральной дисперсии. Найти несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности.

Ответ. $S^2 = 6{,}06$.

Пример 7. В итоге пяти измерений прибором длины недоступного объекта получены следующие результаты (без систематических ошибок): 92 мм; 94 мм; 103 мм; 105 мм; 106 мм. Найти:
1) выборочную среднюю длину объекта;
2) выборочную и исправленную дисперсии ошибок прибора.

Решение

1. Используем технологию решения примера 3 для нахождения выборочной средней:

$$\bar{x}_B = 92 + \frac{(0 + 2 + 11 + 13 + 14)}{5} = 100;$$

2. Выборочная дисперсия (первый способ):

$$D_B = \overline{(x^2)_B} - \left(\overline{x_B}\right)^2 = \frac{(x_1^2 \cdot n_1 + x_2^2 \cdot n_2 + x_3^2 \cdot n_3 + x_4^2 \cdot n_4 + x_5^2 \cdot n_5)}{n} - 100^2 =$$

(в этом примере все частоты у вариант одинаковы и равны единице)

$$= \frac{(92^2 \cdot 1 + 94^2 \cdot 1 + 103^2 \cdot 1 + 105^2 \cdot 1 + 106^2 \cdot 1)}{5} - 10000 =$$

$$= \frac{(8464 + 8836 + 10609 + 11025 + 11236)}{50} - 10000 = \frac{50170}{50} - 10000 = 10034 - 10000 = 34.$$

3. Выборочная дисперсия (второй способ):

$$D_B = \sum_{i=1}^{5} \frac{(x_i - \bar{x}_i)^2}{n} = \frac{1}{5}[(92-100)^2 + (94-100)^2 + (103-100)^2 +$$

$$+ (105-100)^2 + (106-100)^2] = \frac{1}{5}[64+36+9+25+36] = \frac{1}{5} \cdot 170 = 34,$$

что совпадает абсолютно точно с первым способом.

4. Исправленная дисперсия: $S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_B = \frac{5}{4} \cdot 34 = 42{,}5.$

Ответ. $\bar{x}_B = 100;\ D_B = 34;\ S^2 = 42{,}5.$

Задача 8. В итоге четырех измерений прибором длины недоступного объекта получены следующие результаты (без систематических ошибок): 8; 9; 11; 12. Найти: 1) выборочную среднюю длину объекта; 2) выборочную и исправленную дисперсии ошибок.

Ответ. $\bar{x}_B = 10;\ D_B = 2{,}5;\ S^2 = \frac{10}{3}.$

Пример 9. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема n = 10.

x_i	184	192	194
n_i	2	5	3

Решение

Так как варианты x_i – большие числа, поэтому перейдем к условным вариантам: $u_i = x_i - 192$. В итоге получим распределение условных вариант.

u_i	–6	0	2
n_i	2	5	3

При этом дисперсии будут одинаковы (по свойствам дисперсии):

$$D_B(u) = \overline{u^2} - [\bar{u}]^2 = \frac{1}{10}[2 \cdot (-6)^2 + 5 \cdot 0^2 + 3 \cdot 2^2] - [\frac{1}{10}(2 \cdot (-6) + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 2)]^2 =$$

$$= \frac{84}{10} - \frac{36}{100} = 8{,}04.$$

Ответ. $D_B(x) = 8{,}04.$

Задача 10. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n = 100$.

x_i	340	360	375	380
n_i	20	50	18	12

Ответ. $D_B(x) = 167{,}29$.

Пример 11. Найти выборочную и исправленную дисперсии по данному распределению выборки:

x_i	0,01	0,05	0,09
n_i	2	3	5

Решение

Найдем объем выборки: $n = \sum n_i = 2 + 3 + 5 = 10$.

Для того, чтобы избежать действий с дробями, перейдем к условным вариантам: $u_i = 100 \cdot x_i$. При этом выборочные дисперсии связаны так (по свойствам дисперсии): $D_B(x) = \dfrac{D_B(u)}{100^2}$.

Имеем распределение условных вариант.

u_i	1	5	9
n_i	2	3	5

По свойствам выборочная дисперсия:

$$D_B(u) = \overline{u_B^{\,2}} - [\overline{u}_B]^2 = \frac{1}{10}[2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 9^2] - [\frac{1}{10}(2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 9)]^2 = 48{,}2 - 6{,}2^2 = 9{,}76.$$

Тогда: $D_B(x) = \dfrac{9{,}76}{100^2} = 0{,}000976$, а исправленная дисперсия:

$$S^2(x) = \frac{n}{n-1} \cdot D_B = \frac{10}{9} \cdot 0{,}000976 \approx 0{,}001.$$

Ответ. $D_B(x) = 0{,}000976$; $S^2(x) \approx 0{,}001$.

Задача 12. Найти выборочную и исправленную дисперсии по данному распределению выборки:

x_i	0,1	0,5	0,7	0,9
n_i	6	12	1	1

Ответ. $D_B(x) = 0{,}049875$; $S^2(x) \approx 0{,}0525$.

Занятие 13. Визуализация статистического распределения. Проверка типа распределения на его нормальность

Пример 1. Дано распределение выборки объема $n = 30$. Требуется: 1) построить гистограмму распределения относительных частот; 2) по среднеинтервальным значениям рассчитать $\bar{x}_B$ и σ_B; 3) после округления рассчитать параметры a и σ кривой соответствующего нормального распределения (кривой Гаусса);

Интервалы наблюдений	Сумма частот интервала
82-84	4
84-86	8
86-88	10
88-90	6
90-92	1
92-94	1

4) построить кривую Гаусса на одном чертеже с гистограммой относительных частот; 5) после визуального их сравнения сформулировать гипотезу о типе данного статистического распределения.

Решение

1. Находим относительные частоты (объем выборки $n = 30$):

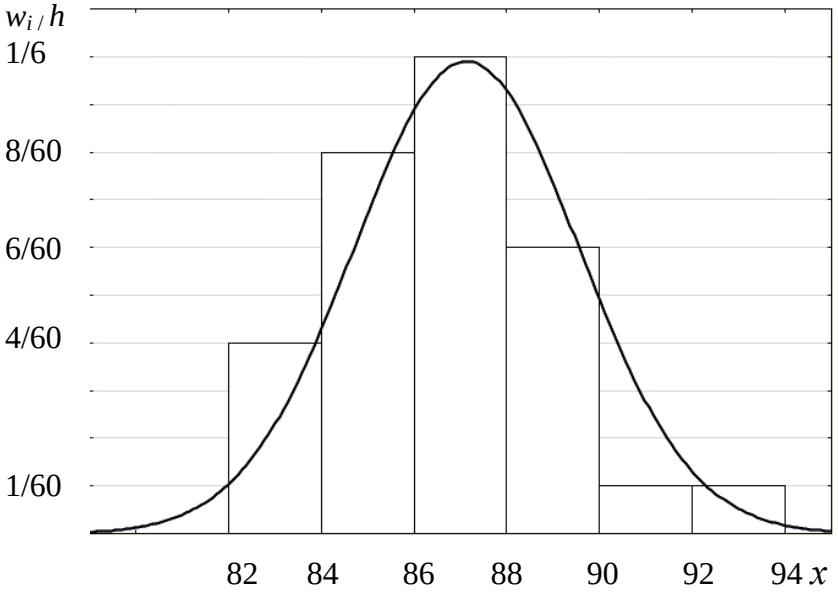
$$w_1=\frac{n_1}{n}=\frac{4}{30}, w_2=\frac{n_2}{n}=\frac{8}{30}, w_3=\frac{n_3}{n}=\frac{10}{30}, w_4=\frac{n_4}{n}=\frac{6}{30}, w_5=\frac{n_5}{n}=\frac{1}{30}, w_6=\frac{n_6}{n}=\frac{1}{30}.$$

Найдем h – длину любого из интервалов: $h = 84 - 82 = 2$.

Вычисляем плотности относительных частот:

$$\frac{w_1}{h}=\frac{4}{60}, \frac{w_2}{h}=\frac{8}{60}, \frac{w_3}{h}=\frac{10}{60}=\frac{1}{6}, \frac{w_4}{h}=\frac{6}{60}, \frac{w_5}{h}=\frac{1}{60}, \frac{w_6}{h}=\frac{1}{60}.$$

На оси абсцисс откладываем все частичные интервалы, а на этих интервалах достраиваем прямоугольники высотой, равной соответствующей плотности относительной частоты. Получается гистограмма относительных частот на рисунке справа.



2. Составляем распределение частот по среднеинтервальным значениям:

x_i	83	85	87	89	91	93
n_i	4	8	10	6	1	1

По полученному распределению частот вычисляем выборочную среднюю и выборочную дисперсию (двумя способами):

$$\bar{x}_B=\frac{(x_1\cdot n_1+x_2\cdot n_2+x_3\cdot n_3+x_4\cdot n_4+x_5\cdot n_5+x_6\cdot n_6)}{n}=$$

$$=\frac{332+680+870+534+91+93}{30}=\frac{2600}{30}\approx 86{,}667.$$

Дисперсия (первый способ):

$$D_B=\overline{(x^2)_B}-\left(\overline{x_B}\right)^2=\frac{(x_1^2\cdot n_1+x_2^2\cdot n_2+x_3^2\cdot n_3+x_4^2\cdot n_4+x_5^2\cdot n_5+x_6^2\cdot n_6)}{n}-\left(\frac{260}{3}\right)^2\approx$$

$$\approx \frac{(83^2 \cdot 4 + 85^2 \cdot 8 + 87^2 \cdot 10 + 89^2 \cdot 6 + 91^2 \cdot 1 + 93^2 \cdot 1)}{30} - 7511{,}111 =$$

$$= \frac{(6889 \cdot 4 + 7225 \cdot 8 + 7569 \cdot 10 + 7921 \cdot 6 + 8281 + 8649)}{30} - 7511{,}111 =$$

$$= \frac{27556 + 57800 + 75690 + 47526 + 8281 + 8649}{30} - 7511{,}111 =$$

$$= \frac{225502}{30} - 7511{,}111 \approx 5{,}622.$$

Дисперсия (второй способ):

$$D_B = \frac{1}{n} \cdot [(x_1 - \overline{x_B})^2 \cdot n_1 + (x_2 - \overline{x_B})^2 \cdot n_2 + (x_3 - \overline{x_B})^2 \cdot n_3 + (x_4 - \overline{x_B})^2 \cdot n_4 +$$

$$+ (x_5 - \overline{x_B})^2 \cdot n_5 + (x_6 - \overline{x_B})^2 \cdot n_6] =$$

$$\approx \frac{1}{30} \cdot [(83 - 86{,}667)^2 \cdot 4 + (85 - 86{,}667)^2 \cdot 8 + (87 - 86{,}667)^2 \cdot 10 +$$

$$+ (89 - 86{,}667)^2 \cdot 6 + (91 - 86{,}667)^2 \cdot 1 + (93 - 86{,}667)^2 \cdot 1] \approx$$

$$\approx \frac{1}{30} \cdot [13{,}444 \cdot 4 + 2{,}779 \cdot 8 + 0{,}111 \cdot 10 + 5{,}443 \cdot 6 + 18{,}775 \cdot 1 + 40{,}107 \cdot 1] =$$

$$= \frac{1}{30} \cdot [53{,}776 + 22{,}232 + 1{,}111 + 32{,}658 + 18{,}775 + 40{,}107] = 5{,}622,$$

что совпадает абсолютно точно с первым способом.

Следовательно, выборочное среднеквадратическое отклонение:
$\sigma_B = \sqrt{D_B} \approx \sqrt{5{,}622} \approx 2{,}371$.

3. Округляем $\bar{x}_B \approx 86{,}667$ до $86{,}7 = a$, округляем $\sigma_B \approx 2{,}371$ до $2{,}4 = \sigma$. Получены параметры кривой Гаусса: $86{,}7 = a$, $2{,}4 = \sigma$.

Кривая Гаусса – это график плотности нормального распределения, то есть график функции (заданной на всей числовой прямой):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}.$$

Сначала рассчитаем максимальную высоту нашей кривой:

$$f(a) = f(86{,}7) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \frac{1}{2{,}4 \cdot \sqrt{2 \cdot 3{,}14159}} \approx \frac{1}{6{,}016} \approx \frac{1}{6}.$$

Эта высота практически совпадает с высотой наибольшего прямоугольника гистограммы относительных частот.

Далее рассчитаем значения функции $f(x)$ в дополнительных точках: $x = 82$, $x = 84$, $x = 86$, $x = 88$, $x = 90$, $x = 92$, $x = 94$.
Получается:

$$f(82) \approx \frac{1}{6} \cdot e^{-(82-86{,}7)^2/11{,}244} \approx 0{,}0167 \approx \frac{1}{60}; \; f(84) \approx \frac{1}{6} \cdot e^{-(84-86{,}7)^2/11{,}244} \approx 0{,}0667 \approx \frac{4}{60};$$ и т. д.

$$f(92) \approx \frac{1}{6} \cdot e^{-(92-86{,}7)^2/11{,}244} \approx 0{,}0208 \approx \frac{1{,}25}{60}; \; f(94) \approx \frac{1}{6} \cdot e^{-(94-86{,}7)^2/11{,}244} \approx 0{,}0031 \approx 0.$$

4. Строим кривую Гаусса с помощью рассчитанных дополнительных точек на одном чертеже с гистограммой относительных частот.

5. Визуальное сравнение кривой и гистограммы позволяет сформулировать гипотезу о том, что исследуемое статистическое распределение имеет нормальный тип распределения. Проверка этой гипотезы не входит в рамки данной задачи, но описана в соответствующем пособии: [2, с. 266] или в пособии [3, с. 78, 79].

Задача 2. Дано распределение выборки объема $n = 50$. Требуется: 1) построить гистограмму распределения относительных частот; 2) по среднеинтервальным значениям рассчитать $\bar{x}_B$ и σ_B; 3) после округления рассчитать параметры a и σ кривой соответствующего нормального распределения (кривой Гаусса); 4) построить кривую Гаусса на одном чертеже с гистограммой относительных частот; 5) после визуального их сравнения сформулировать гипотезу о типе данного статистического распределения.

Интервалы наблюдений	Сумма частот интервала
2-4	6
4-6	8
6-8	16
8-10	10
10-12	6
12-14	4

Занятие 14. Зависимые и независимые случайные величины

Пример 1. Пусть изучается связь между количественным признаком X и другим количественным признаком Y по карте заданного масштаба. Результаты измерений этих двух признаков сведены в таблицу 3.

Таблица 3

Y / X	среднее	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80	
	среднее	25	35	45	55	65	75	n_x
40–60	50	2	1	0	0	0	0	3
60–80	70	0	2	1	0	0	0	3
80–100	90	0	0	2	1	0	0	3
100–120	110	0	0	0	1	2	0	3
120–140	130	0	0	0	0	3	1	4
140–160	150	0	0	0	0	2	2	4
	n_y	2	3	3	2	7	3	20

Требуется: 1) проверить признаки X и Y на наличие корреляционной зависимости между ними; 2) записать выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X.

Решение

1. С помощью среднеинтервальных значений признаков составим таблицу для двумерной случайной величины, перейдя при этом от частот появления к относительным частотам (некоторые аналоги вероятностей). Результат в таблице 4.

Таблица 4

X \ Y	25	35	45	55	65	75	w_x
50	2/20	1/20	0	0	0	0	3/20
70	0	2/20	1/20	0	0	0	3/20
90	0	0	2/20	1/20	0	0	3/20
110	0	0	0	1/20	2/20	0	3/20
130	0	0	0	0	3/20	1/20	4/20
150	0	0	0	0	2/20	2/20	4/20
w_y	2/20	3/20	3/20	2/20	7/20	3/20	1

Далее составляем отдельные законы распределения для случайных величин X и Y.

Y	25	35	45	55	65	75
W	2/20	3/20	3/20	2/20	7/20	3/20

X	50	70	90	110	130	150
W	3/20	3/20	3/20	3/20	4/20	4/20

Находим выборочные средние:

$$\bar{x}=\frac{1}{20}\cdot[50\cdot 3+ 70\cdot 3+90\cdot 3+ 110\cdot 3+130\cdot 4+ 150\cdot 4]=104,$$

$$\bar{y}=\frac{1}{20}\cdot[25\cdot 2+ 35\cdot 3+45\cdot 3+ 55\cdot 2+65\cdot 7+ 75\cdot 3]=54.$$

Находим выборочные дисперсии составляющих X и Y (первым способом):

$$D_B(X)=\overline{\left((X-\bar{x})^2\right)}_B=\frac{1}{20}\cdot[(50-104)^2\cdot 3+ (70-104)^2\cdot 3+(90-104)^2\cdot 3+$$

$$+(110-104)^2\cdot 3+(130-104)^2\cdot 4+ (150-104)^2\cdot 4]=$$

$$=\frac{1}{20}\cdot[2916\cdot 3+ 1156\cdot 3+196\cdot 3+36\cdot 3+676\cdot 4+2116\cdot 4]=$$

$$=\frac{1}{20}\cdot[8748+ 3468+588+108+2704+8464]=1204,$$

$$D_B(Y)=\overline{\left(Y-\bar{y}\right)^2}_B=\frac{1}{20}\cdot[(25-54)^2\cdot 2+(35-54)^2\cdot 3+(45-54)^2\cdot 3+$$

$$+(55-54)^2\cdot 2+(65-54)^2\cdot 7+(75-54)^2\cdot 3]=\frac{1}{20}\cdot[841\cdot 2+361\cdot 3+$$

$$+81\cdot 3+1\cdot 2+121\cdot 7+441\cdot 3]=\frac{1}{20}\cdot[1682+1083+243+2+847+1323]=259.$$

Находим выборочные дисперсии составляющих X и Y (вторым способом):

$$D_B(X)=\overline{\left(x^2\right)}_B-\left(\bar{x}\right)^2=\frac{1}{20}\cdot[50^2\cdot 3+70^2\cdot 3+90^2\cdot 3+110^2\cdot 3+$$

$$+130^2\cdot 4+150^2\cdot 4]-104^2=\frac{1}{20}\cdot[7500+14700+24300+$$

$$+36300+67600+90000]-10816=12020-10816=1204,$$

$$D_B(Y)=\overline{\left(y^2\right)}_B-\left(\bar{y}\right)^2=\frac{1}{20}\cdot[25^2\cdot 2+35^2\cdot 3+45^2\cdot 3+55^2\cdot 2+$$

$$+65^2\cdot 7+75^2\cdot 3]-54^2=\frac{1}{20}\cdot[1250+3675+6075+6050+$$

$$+29575+16875]-2916=3175-2916=259.$$

Два способа нахождения выборочных дисперсий сошлись абсолютно точно. Поэтому выборочные среднеквадратические отклонения получаются такие:

$$\sigma_B(X)=\sqrt{1204}\approx 34{,}6987,\ \sigma_B(Y)=\sqrt{259}=16{,}0935.$$

Далее с помощью таблицы 4 найдём выборочную среднюю произведения случайных величин X и Y:

$$\overline{(X\cdot Y)}=\frac{1}{20}\cdot[25\cdot 50\cdot 2+35\cdot 50\cdot 1+35\cdot 70\cdot 2+45\cdot 70\cdot 1+45\cdot 90\cdot 2+55\cdot 90\cdot 1+$$

$$+55\cdot 110\cdot 1+65\cdot 110\cdot 2+65\cdot 130\cdot 3+65\cdot 150\cdot 2\ +75\cdot 130\cdot 1+75\cdot 150\cdot 2]=$$

$$=\frac{1}{20}\cdot[2500+1750+4900+3150+8100+4950+6050+14300+25350+$$

$$+19500\ +9750+22500]=6140.$$

Теперь находим выборочный коэффициент корреляции:

$$r_B=\frac{\overline{(X\cdot Y)}-\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sigma_B(X)\cdot\sigma_B(Y)}=\frac{6140-104\cdot 54}{34{,}6987\cdot 16{,}0935}\approx 0{,}9384>0.$$

Вывод: выборочный коэффициент корреляции близок к единице, по-

этому можно говорить о почти прямой линейной (корреляционной) зависимости случайных величин X и Y (в рамках представленной в условии статистики). В следующем пункте будет найдена эта зависимость.

2. Изучая эту таблицу 3, видим, что каждому значению x соответствует не одно значение y, а целый ряд значений. Поэтому вычислим для отдельных интервалов по x среднюю величину y, при этом получим таблицу 5, состоящую из двух строк, где в первой строке находятся средние величины x каждого интервала, а во второй строке – условные средние $\bar{y}_x$, которые находятся так:

при среднем $x=50$ $\bar{y}_x=\dfrac{25\cdot 2+35\cdot 1}{2+1}\approx 28{,}3$, *при среднем* $x=70$ $\bar{y}_x=\dfrac{35\cdot 2+45\cdot 1}{2+1}\approx 38{,}3,...$

при среднем $x=130$ $\bar{y}_x=\dfrac{65\cdot 3+75\cdot 1}{3+1}=67{,}5$, *при среднем* $x=150$ $\bar{y}_x=\dfrac{65\cdot 2+75\cdot 2}{4}=70.$

Таблица 5

x	50	70	90	110	130	150
$\bar{y}_x$	28,3	38,3	48,3	61,7	67,5	70

Если последние данные (x и $\bar{y}_x$) из таблицы 5 отметить в виде точек на плоскости, то можно заметить, что все эти точки располагаются вдоль некоторой прямой. Поэтому считаем, что связь x и $\bar{y}_x$ – линейная, то есть $\bar{y}_x\approx a\cdot x+b$, где числа a и b определяются как решение системы уравнений:

$$\begin{cases} a\cdot\Sigma x+6b=\Sigma\bar{y}_x \\ a\cdot\Sigma x+b\cdot\Sigma(x)^2=\Sigma x\cdot\bar{y}_x \end{cases}\Bigg|\begin{matrix} a\cdot 600+6b=314{,}1 \\ a\cdot 600+b\cdot 67000=34505 \end{matrix}\cdot$$

У нас:

Σx = 50 + 70 +90 + 110 + 130 + 150 = 600, $\Sigma\bar{y}_x$ = 314,1,

$\Sigma\,(x)^2$ = 2500 + 4900 + 8100 + 12100+ 16900 + 22500 = 67000,

$\Sigma x\cdot\bar{y}_x$ = 50·28,3 + 70·38,3 + 90·48,3 + 110·61,7 + 130·67,5 + 150·70 = 34505.

Решая систему двух уравнений с двумя неизвестными (a и b) по правилу Крамера, получаем:

$$a=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ b=\frac{\Delta_2}{\Delta},\ \Delta=40196400,\ \Delta_1=20837670,\ \Delta_2=20514540\Rightarrow$$

$$a\approx 0{,}51840,\ b\approx 0{,}51036\Rightarrow \bar{y}_x\approx 0{,}51840\cdot x+0{,}51036.$$

Ответ. $\bar{y}_x\approx 0{,}51840\cdot x+0{,}51036.$

Замечание. Студентам необходимо самостоятельно построить на плоскости точки (в соответствии с таблицей 5) и на этом же чертеже построить график прямой линии $\overline{y}_x = 0{,}51840 \cdot x + 0{,}51036$, после чего можно отметить, что экспериментальные точки не очень сильно разбросаны относительно этой прямой линии.

Задача 1. Пусть изучается связь между количественным признаком *X* и другим количественным признаком *Y* по карте заданного масштаба. Результаты измерений этих двух признаков сведены в таблицу 6.

Таблица 6

Y / X		0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	
	среднее	5	15	25	35	45	55	n_x
60–80	70	2	0	0	0	0	0	2
80–100	90	1	2	1	0	0	0	4
100–120	110	0	0	2	1	0	0	3
120–140	130	0	0	0	1	2	0	3
140–160	150	0	0	0	0	3	1	4
160–180	170	0	0	0	0	2	2	4
	n_y	3	2	3	2	7	3	20

Требуется:

1) проверить признаки *X* и *Y* на наличие корреляционной зависимости между ними;

2) записать выборочное уравнение прямой линии регрессии *Y* на *X*;

3) построить на плоскости экспериментальные точки и на этом же чертеже построить график прямой линии регрессии, после чего сделать вывод.

Занятия 15, 16. Контрольная работа №2 «Теория вероятностей и математическая статистика»

Для получения допуска ко второй контрольной работе студенту необходимо выполнить следующее:

а) сдать все задачи расчетно-графической работы по своему варианту и получить по этим задачам «зачтено»;

б) затем представить на проверку рукописные решения занятий № 7-14 (ответы на контрольные вопросы, аудиторные задания и самостоятельную работу) и получить по ним «зачтено»;

в) представить рукописные решения нижеследующего образца контрольной работы (и получить «зачтено»).

ОБРАЗЕЦ

1. Найти математическое ожидание, дисперсию (двумя способами) и среднеквадратическое отклонение дискретной случайной величины X, если известно распределение.

X	1	2	3	4	5
P	0,1	0,2	0,3	0,25	0,15

Ответ. $M(X) = 3{,}15$, $D(X) = 1{,}4275$, $\sigma(X) = 1{,}1948$.

2. Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию (двумя способами), если дано распределение выборки.

x_i	3	5	7	9	11
p_i	10	20	30	20	20

Ответ. $\bar{x}_B = 7{,}4$; $D_B(x) = 6{,}24$.

3. Построить гистограмму относительных частот по данному распределению. По среднеинтервальным значениям найти $\bar{x}_B$ и σ_B, затем построить на том же чертеже кривую Гаусса по найденным a и σ. Произвести сравнение гистограммы и кривой Гаусса, сделать вывод, если дано следующее распределение.

Интервалы	Частоты
1 – 6	10
6 – 11	20
11 – 16	35
16 – 21	25
21 – 26	10

Ответ. $a = 13{,}75$, $\sigma = 5{,}6$. Визуальный вывод: данное распределение близко к нормальному распределению.

4. Дискретная случайная величина X принимает только два возможных значения: $x_1 < x_2$. Кроме этого известно, что вероятность p_2 для x_2 равна 0,4, математическое ожидание равно 4,4 и дисперсия равна 0,24. Найти закон распределения.

Ответ.

X	4	5
P	0,6	0,4

5. Найти коэффициент корреляции, если известен закон распределения двумерной случайной величины.

Y/X	2	4
1	0,2	0,1
2	0,15	0,25
3	0,15	0,15

Ответ. $r_{XY} = 0{,}13$.

Расчетно-графическая работа

Расчетно-графическая работа по курсам «Математика», «Математические аспекты в экологии» состоит из 5 задач, для каждой из которых разработано 30 вариантов. Номер варианта устанавливается преподавателем для каждого студента.

Текст работы выполняется в отдельной тетради чернилами или пастой любого цвета, кроме красного, с полями шириной не менее 2 см. Каждая задача начинается с новой страницы. Задачи располагаются по порядку номеров. Решению задачи предшествует условие этой задачи, которое записано конкретно для данного варианта.

Все преобразования выполняются подробно с пояснениями, решение записывается аккуратно и заканчивается ответом.

При выполнении чертежей необходимо следовать чертёжным правилам.

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Пример 1. Партия деталей, среди которых 38% нестандартных (дефектных), поступила на проверку. Технология проверки такова, что с вероятностью $P_1 = 0{,}938$ обнаруживается дефект (если он есть), и существует ненулевая вероятность $P_0 = 0{,}038$ того, что стандартная деталь будет признана дефектной. Задание:

1. Требуется найти вероятность того, что случайно выбранная из партии деталь будет признана дефектной.

2. Случайно выбранная из партии деталь признана дефектной. Какова вероятность того, что на самом деле деталь стандартна?

Решение

1. Рассмотрим событие A = {случайно выбранная из партии деталь при проверке признана дефектной}. С этим событием A тесно связаны две гипотезы (события) B_1 и B_2:

B_1 = {поступившая на проверку деталь дефектна на самом деле},

B_2 = {поступившая на проверку деталь на самом деле стандартна}.

Безусловные априорные вероятности легко вычисляются по классической формуле: $P(B_1)$ = [отношение числа дефектных деталей к общему числу деталей] = 0,38, $P(B_2) = 1 - P(B_1) = 0{,}62$.

Условные вероятности заданы в условии задачи:

$P_{B_1}(A) = 0{,}938$, $P_{B_2}(A) = 0{,}038$.

Применяя формулу полной вероятности для двух гипотез, получим:

$$P(A) = P_{B_1}(A) \cdot P(B_1) + P_{B_2}(A) \cdot P(B_2) = 0{,}938 \cdot 0{,}38 + 0{,}038 \cdot 0{,}62 =$$

$$= 0{,}35644 + 0{,}02356 = 0{,}38.$$

2. В этом пункте событие A уже произошло и необходимо найти вероятность гипотезы B_2 (берется вторая гипотеза потому, что речь о стандартной детали идет именно во второй гипотезе) при условии, что событие A произошло. По формуле Байеса:

$$P_A(B_2)=\frac{P_{B_2}(A)\cdot P(B_2)}{P(A)}=\frac{0{,}038\cdot 0{,}62}{0{,}38}=0{,}062.$$

Ответ. $P(A)=0{,}38,\ P_A(B_2)=0{,}062.$

Пример 2. Задана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 0;\\ x^4/16 & при\ 0<x\le 2;\\ 1 & при\ x>2.\end{cases}$$

Найти: а) $f(x)$ – плотность распределения случайной величины X;

б) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$;

в) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$ случайной величины.

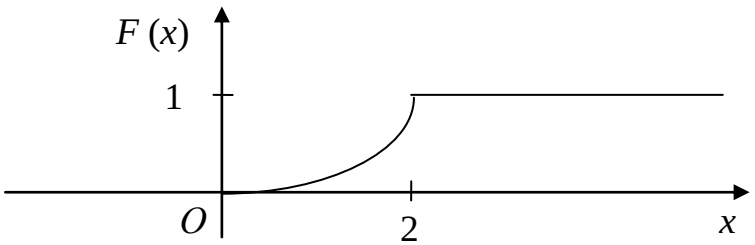
Решение

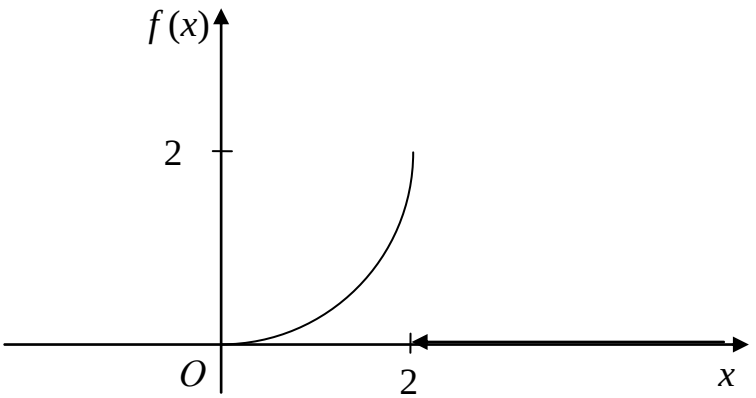
а) по определению плотности имеем: $f(x)=F'(x)=\begin{cases}0 & при\ x<0;\\ x^3/4 & при\ 0<x<2;\\ 0 & при\ x>2.\end{cases}$

б) строим графики:

x	0	1	2
$F(x)$	0	1/16	1

x	0	1	2-0
$f(x)$	0	1/4	2





в) по определению математического ожидания имеем:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)\,dx=\int_0^2 x\cdot x^3/4\,dx=\frac{1}{4}\int_0^2 x^4\,dx=\frac{1}{20}\cdot x^5\Big|_0^2=\frac{32}{20}=1{,}6;$$

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)\,dx=\int_0^2 x^2\cdot x^3/4\,dx=\frac{1}{4}\int_0^2 x^5\,dx=\frac{1}{24}\cdot x^6\,\Big|\,_0^2=\frac{64}{24}=\frac{8}{3};$$

поэтому дисперсия первым способом (по определению):

$$D(X)=M\left(\left(X-M(X)\right)^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2\cdot f(x)\,dx=\int_0^2(x-1{,}6)^2\cdot x^3/4\,dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^2\left(x^2-2x\cdot 1{,}6+2{,}56\right)\cdot x^3\,dx=\frac{1}{4}\int_0^2\left(x^5-3{,}2x^4+2{,}56x^3\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{x^6}{6}-\frac{32x^5}{10\cdot 5}+\frac{256x^4}{100\cdot 4}\right)\Big|_0^2=\frac{1}{4}\left(\frac{2^6}{6}-\frac{16\cdot 2^5}{25}+\frac{16\cdot 2^4}{25}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{32}{3}-\frac{16\cdot 32}{25}+\frac{256}{25}\right)=$$

$$=\frac{8}{3}-\frac{128}{25}+\frac{64}{25}=\frac{200}{75}-\frac{64}{25}=\frac{200}{75}-\frac{192}{75}=\frac{8}{75}.$$

Дисперсия вторым способом (по свойствам) находится так:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 8/3 - (1{,}6)^2 = 8/3 - 256/100 =$$
$$= 8/3 - 64/25 = 200/75 - 192/75 = 8/75.$$

Два способа нахождения дисперсии сошлись абсолютно точно.

Ответ. $M(X) = 1{,}6$; $D(X) = 8/75$.

Пример 3. Произведено 100 выборочных измерений уровня загрязнённости некоторого района вредными для здоровья выбросами некоторого комбината. Построить гистограмму частот уровня загрязнённости по данному распределению выборки.

Интервалы загрязнения	Сумма частот вариант интервала
1-5	20
5-9	10
9-13	50
13-17	8
17-21	12

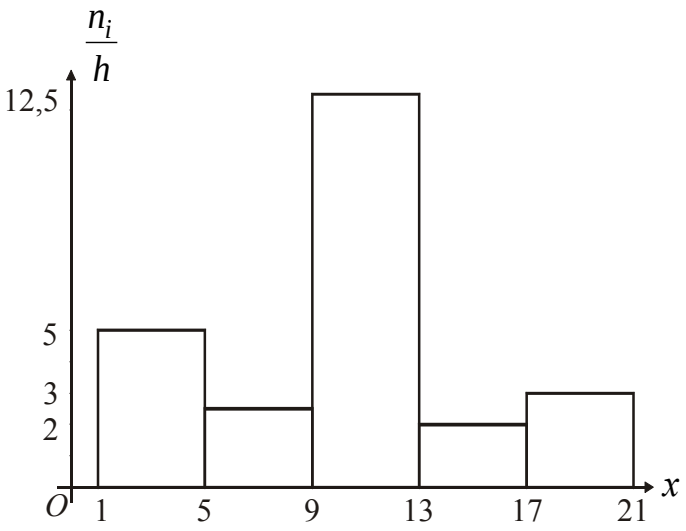
Решение

Найдем длину любого из интервалов: $h = 5 - 1 = 4$.

Находим плотности частот:

$$\frac{n_1}{h}=5,\ \frac{n_2}{h}=2{,}5;\ \frac{n_3}{h}=12{,}5;\ \frac{n_4}{h}=2,\ \frac{n_5}{h}=3.$$

На оси абсцисс откладываем все частичные интервалы, а на этих интервалах достраиваем прямоугольники высотой, равной соответствующей плотности частоты.



Замечание: сумма площадей всех прямоугольников равна 100.

Пример 4. В итоге десяти измерений прибором длины недоступного объекта получены следующие результаты (без систематических ошибок): 92 мм; 94 мм; 103 мм; 105 мм; 106 мм; 92 мм; 103 мм; 105 мм; 92 мм; 105 мм. Найти:

1) выборочную среднюю длину объекта;

2) выборочную и исправленную дисперсии ошибок прибора.

Решение

По данным измерений составим распределение выборки:

x_i	92	94	103	105	106
n_i	3	1	2	3	1

1. Имеем: объём выборки $n = 10$, поэтому выборочная средняя длина:

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n} \cdot \sum n_i \cdot x_i = \frac{1}{10} \cdot (3 \cdot 92 + 1 \cdot 94 + 2 \cdot 103 + 3 \cdot 105 + 1 \cdot 106) = 99{,}7;$$

2. По определению выборочная дисперсия (первый способ):

$$D_B = \sum_{i=1}^{5} \frac{n_i \cdot (x_i - \bar{x}_B)^2}{n} = \frac{1}{10}[3 \cdot (92 - 99{,}7)^2 + 1 \cdot (94 - 99{,}7)^2 + 2 \cdot (103 - 99{,}7)^2 +$$

$$+ 3 \cdot (105 - 99{,}7)^2 + 1 \cdot (106 - 99{,}7)^2] = \frac{1}{10}[3 \cdot 59{,}29 + 1 \cdot 32{,}49 + 2 \cdot 10{,}89 +$$

$$+ 3 \cdot 28{,}09 + 1 \cdot 39{,}69] = \frac{1}{10}[177{,}87 + 32{,}49 + 21{,}78 + 84{,}27 + 39{,}69] = \frac{1}{10} \cdot 356{,}1 = 35{,}61.$$

Выборочная дисперсия (второй способ, по свойствам):

$$D_B = \overline{(x^2)}_B - \left(\overline{x_B}\right)^2 = \frac{(x_1^2 \cdot n_1 + x_2^2 \cdot n_2 + x_3^2 \cdot n_3 + x_4^2 \cdot n_4 + x_5^2 \cdot n_5)}{n} - (99{,}7)^2 =$$

$$= \frac{(92^2 \cdot 3 + 94^2 \cdot 1 + 103^2 \cdot 2 + 105^2 \cdot 3 + 106^2 \cdot 1)}{10} - 9940{,}09 =$$

$$= \frac{8464 \cdot 3 + 8836 + 10609 \cdot 2 + 11025 \cdot 3 + 11236}{10} - 9940{,}09 =$$

$$= \frac{25392 + 8836 + 21218 + 33075 + 11236}{10} - 9940{,}09 = 9975{,}7 - 9940{,}09 = 35{,}61.$$

Два способа нахождения дисперсии сошлись абсолютно точно.

Найдем исправленную дисперсию: $S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_B = \frac{10}{9} \cdot 35{,}61 \approx 39{,}57.$

Ответ. $\bar{x}_B = 99{,}7;\ D_B = 35{,}61;\ S^2 = 39{,}57.$

Пример 5. Найти коэффициент корреляции, если закон распределения двумерной случайной величины задан.

Y / X	1	4
–1	0,20	0,10
2	0,45	0,05
3	0,05	0,15

Решение

Находим законы распределения составляющих X и Y (отдельно):

X	1	4
P	0,7	0,3

Y	-1	2	3
P	0,3	0,5	0,2

Находим математические ожидания составляющих X и Y:

$$M(X)=1\cdot 0{,}7+4\cdot 0{,}3=1{,}9,\ M(Y)=-1\cdot 0{,}3+2\cdot 0{,}5+3\cdot 0{,}2=1{,}3.$$

Находим дисперсии составляющих X и Y (первым способом):

$$D(X)=M\left((X-M(X))^2\right)=(1-1{,}9)^2\cdot 0{,}7+(4-1{,}9)^2\cdot 0{,}3=$$
$$=0{,}81\cdot 0{,}7+4{,}41\cdot 0{,}3=0{,}567+1{,}323=1{,}89.$$
$$D(Y)=M\left((Y-M(Y))^2\right)=(-1-1{,}3)^2\cdot 0{,}3+(2-1{,}3)^2\cdot 0{,}5+(3-1{,}3)^2\cdot 0{,}2=$$
$$=5{,}29\cdot 0{,}3+0{,}49\cdot 0{,}5+2{,}89\cdot 0{,}2=1{,}587+0{,}245+0{,}578=2{,}41.$$

Находим дисперсии составляющих X и Y (вторым способом):

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2=(1^2\cdot 0{,}7+4^2\cdot 0{,}3)-(1{,}9)^2=5{,}5-3{,}61=1{,}89,$$
$$D(Y)=M\left(Y^2\right)-\left(M(Y)\right)^2=((-1)^2\cdot 0{,}3+2^2\cdot 0{,}5+3^2\cdot 0{,}2)-(1{,}3)^2=4{,}1-1{,}69=2{,}41.$$

Два способа нахождения дисперсий сошлись абсолютно точно. Поэтому среднеквадратические отклонения:

$\sigma(X)=\sqrt{1{,}89}\approx 1{,}3748,\ \sigma(Y)=\sqrt{2{,}41}=1{,}5524.$

Далее с помощью таблицы из условия (закон распределения двумерной случайной величины) найдём математическое ожидание произведения случайных величин X и Y:

$$M(X\cdot Y)=1\cdot(-1)\cdot 0{,}20+1\cdot 2\cdot 0{,}45+1\cdot 3\cdot 0{,}05+4\cdot(-1)\cdot 0{,}10+$$
$$+4\cdot 2\cdot 0{,}05+4\cdot 3\cdot 0{,}15=2{,}65\ .$$

Теперь находим ковариацию и коэффициент корреляции:

$$\mu_{XY}=M(X\cdot Y)-M(X)\cdot M(Y)=2{,}65-1{,}9\cdot 1{,}3=0{,}18\neq 0,$$

$$r_{XY}=\frac{\mu_{XY}}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}\approx\frac{0{,}18}{1{,}3748\cdot 1{,}5524}\approx 0{,}084>0.$$

Ответ. Коэффициент корреляции положителен $r_{XY}\approx 0{,}084$, то есть случайные величины X и Y связаны положительной корреляцией, близкой к нулю, что говорит о слабой зависимости этих случайных величин.

Варианты расчетно-графической работы по курсам «Математика» и «Математические аспекты в экологии»

Задача 1

Партия приборов, среди которых N% дефектных (нестандартных), поступила на проверку в ОТК. Схема проверки такова, что с вероятностью $P_1 = 0{,}9N$ обнаруживается дефект (если он есть) и существует ненулевая вероятность $P_0 = 0{,}0N$ того, что стандартный прибор будет признан дефектным.

а) Какова вероятность того, что случайно выбранный из партии прибор будет признан дефектным?

б) Случайно выбранный из партии прибор признан дефектным. Какова вероятность того, что на самом деле прибор стандартен?

ЗАМЕЧАНИЕ: в условии число N является номером варианта задания студента. Причем, варианты студентов нумеруются следующим образом: 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, и так далее.

Поэтому, например, для $N = 02$ вероятности P_1 и P_0 имеют вид: $P_1 = 0{,}902$; $P_0 = 0{,}002$. А для $N = 10$ вероятности P_1 и P_0 имеют вид: $P_1 = 0{,}910$; $P_0 = 0{,}010$. При $N = 11$ вероятности P_1 и P_0 имеют вид: $P_1 = 0{,}911$; $P_0 = 0{,}011$ и так далее.

Задача 2

Задана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при\ x\le 0; \\ g(x) & при\ 0 < x \le b; \\ 1 & при\ x > b. \end{cases}$$

Требуется:

а) найти $f(x)$ плотность распределения случайной величины X;

б) найти математическое ожидание и дисперсию (двумя способами) этой случайной величины;

в) построить графики функций $F(x)$, $f(x)$.

Функция $g(x)$ и значение числа b заданы по вариантам в следующей таблице на странице 55.

N	*g*(*x*)	*b*	*N*	*g*(*x*)	*b*	*N*	*g*(*x*)	*b*
01	x^2	1	11	$4x^2$	1/2	21	$x^3/8$	2
02	$x^2/4$	2	12	$9x^2$	1/3	22	$x^3/27$	3
03	$x^2/9$	3	13	$16x^2$	1/4	23	$x^3/64$	4
04	$x^2/16$	4	14	$25x^2$	1/5	24	x^4	1
05	$x^2/25$	5	15	$36x^2$	1/6	25	x^5	1
06	$x^2/36$	6	16	$49x^2$	1/7	26	x^6	1
07	$x^2/49$	7	17	$64x^2$	1/8	27	x^7	1
08	$x^2/64$	8	18	$81x^2$	1/9	28	x^8	1
09	$x^2/81$	9	19	$100x^2$	1/10	29	x^9	1
10	x^3	1	20	$121x^2$	1/11	30	x^{10}	1

Задача 3

Произведено 100 выборочных измерений уровня загрязнённости района вредными для здоровья выбросами комбината. Построить гистограмму частот уровня загрязнённости по данному распределению выборки (по вариантам). В нижеследующей таблице применены следующие обозначения: И – интервалы, Ч – сумма частот вариант интервала загрязнения.

И	**Ч**	**И**	**Ч**	**И**	**Ч**	**И**	**Ч**	**И**	**Ч**	**И**	**Ч**
0-5	15	1-5	25	0-5	20	1-6	50	1-5	20	5-7	20
5-10	15	5-9	10	5-10	10	6-11	10	5-9	10	7-9	30
10-15	50	9-13	40	10-15	30	11-16	20	9-13	20	9-11	30
15-20	8	13-17	13	15-20	28	16-21	8	13-17	38	11-13	8
20-25	12	17-21	12	20-25	12	21-26	12	17-21	12	13-15	12
***N* = 01**		***N* = 02**		***N* = 03**		***N* = 04**		***N* = 05**		***N* = 06**	

И	**Ч**	**И**	**Ч**	**И**	**Ч**	**И**	**Ч**	**И**	**Ч**	**И**	**Ч**
1-5	10	0-5	20	0-4	10	1-6	25	2-5	12	3-7	10
5-9	10	5-10	10	4-8	10	6-11	13	5-8	10	7-11	30
9-13	30	10-15	30	8-12	25	11-16	30	8-11	20	11-15	40
13-17	28	15-20	13	12-16	38	16-21	17	11-14	38	15-19	12
17-21	22	20-25	27	16-20	17	21-26	15	14-17	20	19-23	8
***N* = 07**		***N* = 08**		***N* = 09**		***N* = 10**		***N* = 11**		***N* = 12**	

И	**Ч**	**И**	**Ч**	**И**	**Ч**	**И**	**Ч**	**И**	**Ч**	**И**	**Ч**
2-6	10	0-5	10	0-4	10	1-6	20	2-6	20	2-7	15
6-10	10	5-10	20	4-8	15	6-11	18	6-10	10	7-12	30
10-14	30	10-15	30	8-12	20	11-16	30	10-14	20	12-17	35
14-18	28	15-20	27	12-16	38	16-21	17	14-18	38	17-22	8
18-22	22	20-25	13	16-20	17	21-26	15	18-22	12	22-27	12
***N* = 13**		***N* = 14**		***N* = 15**		***N* = 16**		***N* = 17**		***N* = 18**	

И	**Ч**	**И**	**Ч**	**И**	**Ч**	**И**	**Ч**	**И**	**Ч**	**И**	**Ч**
2-4	10	1-5	10	0-5	15	1-6	50	1-5	5	1-6	30
4-6	20	5-9	25	5-10	15	6-11	20	5-9	12	6-11	20
6-18	50	9-13	40	10-15	30	11-16	12	9-13	20	11-16	30
8-10	12	13-17	13	15-20	28	16-21	10	13-17	25	16-21	12
10-12	8	17-21	12	20-25	12	21-26	8	17-21	38	21-26	8
***N* = 19**		***N* = 20**		***N* = 21**		***N* = 22**		***N* = 23**		***N* = 24**	

И	**Ч**	**И**	**Ч**	**И**	**Ч**	**И**	**Ч**	**И**	**Ч**	**И**	**Ч**
1-5	5	0-5	25	0-4	10	1-6	23	2-6	10	2-7	10
5-9	15	5-10	5	4-8	15	6-11	15	6-10	12	7-12	40
9-13	30	10-15	30	8-12	20	11-16	30	10-14	23	12-17	30
13-17	22	15-20	15	12-16	35	16-21	15	14-18	35	17-22	12
17-21	28	20-25	25	16-20	20	21-26	17	18-22	20	22-27	8
***N* = 25**		***N* = 26**		***N* = 27**		***N* = 28**		***N* = 29**		***N* = 30**	

Задача 4

Найти выборочную и исправленную дисперсии по данному распределению выборки (данные по вариантам):

x_i	0,1	0,5	0,7	0,9	x_i	1	5	7	9	x_i	2	4	6	8
n_i	6	12	1	1	n_i	2	10	3	5	n_i	3	9	2	6
***N* = 01**					***N* = 02**					***N* = 03**				

x_i	3	5	8	9	x_i	0,2	0,5	0,6	0,9	x_i	1,6	2,5	3,6	4,9
n_i	5	8	3	4	n_i	8	12	10	20	n_i	16	12	10	12
***N* = 04**					***N* = 05**					***N* = 06**				

x_i	8	15	27	49	x_i	11	25	37	59	x_i	4	5	7	9
n_i	10	10	15	15	n_i	10	12	16	12	n_i	2	5	5	8
***N* = 07**					***N* = 08**					***N* = 09**				

x_i	9	15	37	39	x_i	0,2	0,6	0,8	0,9	x_i	4	5	7	9
n_i	6	10	1	3	n_i	12	6	1	1	n_i	6	7	2	5
***N* = 10**					***N* = 11**					***N* = 12**				

x_i	2	5	6	9	x_i	4	5	8	9	x_i	0,3	0,6	0,7	0,9
n_i	3	9	6	2	n_i	8	4	3	5	n_i	12	8	10	20
***N* = 13**					***N* = 14**					***N* = 15**				

x_i	16	25	36	49	x_i	8	15	27	29	x_i	11	25	37	39
n_i	12	16	10	12	n_i	10	15	10	15	n_i	12	10	12	16
***N* = 16**					***N* = 17**					***N* = 18**				

x_i	1	5	7	9	x_i	4	7	9	11	x_i	0,2	0,5	0,7	0,9
n_i	5	2	8	5	n_i	8	3	4	5	n_i	6	11	2	1
***N* = 19**					***N* = 20**					***N* = 21**				

x_i	3	5	8	9	x_i	3	5	6	9	x_i	4	6	7	9
n_i	7	6	2	5	n_i	9	3	2	6	n_i	3	8	4	5
***N* = 22**					***N* = 23**					***N* = 24**				

x_i	1	6	7	9	x_i	0,1	0,2	0,8	0,9	x_i	1	6	7	9
n_i	20	4	10	6	n_i	4	12	3	1	n_i	10	2	5	3
***N* = 25**					***N* = 26**					***N* = 27**				

x_i	3	4	6	9	x_i	3	7	8	9	x_i	0,3	0,5	0,8	0,9
n_i	9	3	2	6	n_i	8	5	3	4	n_i	12	8	10	20
***N* = 28**					***N* = 29**					***N* = 30**				

Задача 5. Найти коэффициент корреляции, если задан закон распределения двумерной случайной величины (по вариантам).

Y /X	1	2	Y /X	0	1	Y /X	-1	1	Y /X	2	4
0	0,15	0,15	-1	0,20	0,10	-1	0,05	0,15	1	0,2	0,1
1	0,25	0,15	0	0,45	0,05	0	0,2	0,2	2	0,15	0,25
2	0,1	0,2	1	0,05	0,15	2	0,3	0,1	3	0,15	0,15
***N* = 01**			***N* = 02**			***N* = 03**			***N* = 04**		

Y /X	0	2	Y /X	1	3	Y /X	-1	2	Y /X	1	2
-2	0,1	0,2	-2	0,2	0,1	2	0,25	0,05	-2	0,05	0,25
0	0,2	0,25	0	0,25	0,2	3	0,25	0,15	1	0,15	0,25
2	0,1	0,15	1	0,15	0,1	4	0,1	0,2	2	0,2	0,1
***N* = 05**			***N* = 06**			***N* = 07**			***N* = 08**		

Y /X	1	2	Y /X	1	3	Y /X	-1	2	Y /X	3	5
-1	0,15	0,25	-3	0,2	0,1	-2	0,15	0,05	1	0,1	0,15
2	0,05	0,25	0	0,1	0,2	0	0,2	0,2	2	0,15	0,25
3	0,1	0,2	3	0,1	0,3	2	0,3	0,1	5	0,3	0,05
***N* = 09**			***N* = 10**			***N* = 11**			***N* = 12**		

Y /X	0	2	Y /X	2	4	Y /X	1	5	Y /X	4	5
-1	0,2	0,1	-2	0,2	0,1	2	0,25	0,05	-2	0,25	0,05
1	0,2	0,25	0	0,2	0,25	3	0,25	0,15	1	0,15	0,25
3	0,1	0,15	1	0,15	0,1	4	0,2	0,1	2	0,2	0,1
***N* = 13**			***N* = 14**			***N* = 15**			***N* = 16**		

Y /X	1	5	Y /X	1	2	Y /X	-1	3	Y /X	2	5
-1	0,15	0,25	-2	0,2	0,1	-2	0,15	0,05	1	0,15	0,1
2	0,05	0,25	1	0,1	0,2	1	0,2	0,2	3	0,15	0,25
4	0,1	0,2	4	0,3	0,1	2	0,1	0,3	5	0,3	0,05
***N* = 17**			***N* = 18**			***N* = 19**			***N* = 20**		

Y /X	2	4	Y /X	-2	4	Y /X	3	5	Y /X	2	5
-1	0,2	0,1	-2	0,2	0,1	1	0,25	0,05	-2	0,25	0,05
2	0,25	0,2	1	0,2	0,25	3	0,25	0,15	2	0,15	0,25
3	0,1	0,15	3	0,1	0,15	4	0,1	0,2	4	0,1	0,2
***N* = 21**			***N* = 22**			***N* = 23**			***N* = 24**		

Y /X	2	5	Y /X	1	3	Y /X	-1	4	Y /X	3	5
-1	0,25	0,15	-2	0,2	0,1	-2	0,15	0,05	1	0,15	0,1
3	0,05	0,25	2	0,2	0,1	1	0,2	0,2	2	0,25	0,15
4	0,1	0,2	4	0,3	0,1	3	0,3	0,1	4	0,3	0,05
***N* = 25**			***N* = 26**			***N* = 27**			***N* = 28**		

Y /X	1	2	Y /X	-1	3
-2	0,1	0,2	-2	0,2	0,1
0	0,25	0,2	0	0,2	0,25
4	0,1	0,15	1	0,15	0,1
***N* = 29**			***N* = 30**		

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вербная, В.П. Математика для дистанционного изучения [Электронный ресурс]: учебное пособие для вузов. Рекомендовано СибРУМЦ / В.П. Вербная, Г.П. Мартынов, Е.С. Плюснина. – М.: ИНФОРМРЕГИСТР, 2013. – 230 с. Режим доступа: http://lib.ssga.ru/fulltext/UMK/%D0%90%D0%AD%D0%A3%D0%9C%D0%9F/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0%20%D0%B4%D0%BB%D1%8F%20%D0%B4%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B0%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%20%D0%B8%D0%B7%D1%83%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F.pdf – Загл. с экрана.
2. Вербная, В.П. Математика для дистанционного обучения [Текст]: учебное пособие для вузов, 2-ое изд., стереотипное. Рекомендовано СибРУМЦ / В.П. Вербная, Г.П. Мартынов, Е.С. Плюснина. – Новосибирск: СГУГиТ, 2016. – 278 с.
3. Пузаченко Ю.Г. Математические методы в экологических и географических исследованиях [Текст]: учебное пособие для студ. вузов. – М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 416 с.
4. Трубина Л.К., Беленко О.А. Экологическая информатика [Электронный ресурс]: лабораторный практикум. – Новосибирск: СГГА. – 2009, 87 с. Режим доступа: http://lib.ssga.ru/fulltext/2009/%D0%A2%D1%80%D1%83%D0%B1%D0%B8%D0%BD%D0%B0%20%D0%9B.%D0%9A.,%20%D0%91%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%BA%D0%BE%20%D0%9E.%D0%90.%20%D0%AD%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F%20%D0%B8%D0%BD%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0%20%5B%D0%BB%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D1%8B%D0%B9%20%D0%BF%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B8%D0%BA%D1%83%D0%BC%5D.%202009.pdf – Загл. с экрана.

Таблица № 1. Значения функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-x^2/2}$ с точностью до 10^{-4}.

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3721	3605	3588	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3411	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2030	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1827	1804	1781	1759	1736
1,3	1714	1692	1669	1647	1626	1004	1582	1561	1540	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1181	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0941	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
При $x \geq 2$ функция Лапласа $\varphi(x)$ принимает значения										
x	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
$\varphi(x)$	0,0540	0,0440	0,0355	0,0283	0,0224	0,0175	0,0136	0,0104	0,0079	0,0060
x	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
$\varphi(x)$	0,0044	0,0033	0,0024	0,0017	0,0012	0,0009	0,0006	0,0004	0,0003	0,0002

При $x > 4$ можно считать, что $\varphi(x) = 0$.

Функция Лапласа $\varphi(x)$ обладает свойством чётности, то есть $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Таблица № 2. Значения функции $\Phi(x)=\int_0^x \varphi(z)\,dz$ **с точностью до** 10^{-4}**.**

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0040	0080	0112	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0754
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2258	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
0,7	2580	2612	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2996	3023	3051	3079	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3553	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4430	4441
1,6	4452	4463	4474	4485	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4700	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4762	4767
При $x \geq 2$ функция Лапласа Ф (x) принимает значения										
x	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2.6	2,7	2,8	2,9
Ф (x)	0,4773	0,4821	0,4861	0,4893	0,4918	0,4938	0,4953	0,4965	0,4974	0,4981
x	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3.6	3,7	3,8	x >3,8
Ф (x)	0,4987	0,4990	0,4993	0,4995	0,4997	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,5000

Функция Лапласа Ф (x) обладает свойством нечётности, т. е. Ф ($-x$) = – Ф (x).