|  |
| --- |
| Министерство образования Нижегородской области |
| Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение **Арзамасский коммерческо-технический техникум** |
|  |

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ**

**ЕН.02 Элементы математической логики**

Специальность: **09.02.04 Информационные системы (по отраслям)**

Разработчик:

зав. отделением СПО,

преподаватель

**Саблукова Наталья Геннадьевна**

2017 г

**Содержание**

|  |  |
| --- | --- |
| Введение | 3 |
| Практическая работа №1. Формализация высказываний. Построение таблиц истинности. Упрощение формул логики с помощью равносильных преобразований. | 4 |
| Практическая работа №2. Построение дизъюнктивной и конъюнктивной нормальных форм (ДНФ и КНФ). Решение логических задач. | 6 |
| Практическая работа №3. Представление булевой функции в виде совершенных ДНФ и КНФ. | 12 |
| Практическая работа №4. Минимизация нормальных форм логических функций. | 15 |
| Практическая работа №5. Решение задач логического характера на выполнение теоретико-множественных операций и на подсчет количества элементов. | 19 |
| Практическая работа №6. Формализация предложений с помощью алгебры предикатов; логические операции над предикатами. Построение отрицаний к предикатам. | 23 |
| Практическая работа №7. Решение логических задач в алгебре предикатов. | 26 |
| Практическая работа №8. Решение логических задач с помощью машины Тьюринга и нормальных алгоритмов Маркова | 28 |
| Практическая работа № 9. Шифрование текста с помощью шифра замены или перестановочного шифра; дешифровка шифротекста. | 33 |
| Практическая работа №10. Построение конечных автоматов. | 36 |

**Введение**

Методические указания к практическим работам по дисциплине «Элементы математической логики» предназначены для обучающихся по специальности 09.02.04 Информационные системы (по отраслям).

Учебная дисциплина «Элементы математической логики» входит в математический и общий естественнонаучный цикл и направлена на формирование базового уровня знаний, необходимых для освоения общепрофессиональных дисциплин и профессиональных модулей. Включенные в практические работы задачи стимулируют исследовательскую и творческую деятельность, развивает познавательные интересы, помогают не только глубже понять математику, но и научиться применять полученные знания на практике.

Целью выполнения практических работ по данной дисциплине является формирования у обучающихся навыков применения методов математической логики к решению логических задач. Методические указания к практическим работам содержат тему, цель, теоретические сведения, методические указания по решению задач и задания на выполнения.

Каждая практическая работа оформляется в тетрадях для практических работ. В оформление работы входить запись номера практической работы, темы, цели, задания с решением и выводы. На выполнение практической работы отводится 1 пара.

Практическая работа № 1

**ФОРМАЛИЗАЦИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ. ПОСТРОЕНИЕ ТАБЛИЦ ИСТИННОСТИ. УПРОЩЕНИЕ ФОРМУЛ ЛОГИКИ С ПОМОЩЬЮ РАВНОСИЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ.**

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** научиться формализовывать высказывания, строить таблицы истинности для формул логики, упрощать формулы логики с помощью равносильных преобразований

Для выполнения работы необходимо знать основные формулы алгебры высказываний, методы минимизации алгебраических преобразований; необходимо уметь формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

Выполнение данной практической работы способствует формированию профессиональных компетенций ПК 1.2.Взаимодействовать со специалистами смежного профиля при разработке методов, средств и технологий применения объектов профессиональной деятельности; ПК 1.4. Участвовать в экспериментальном тестировании информационной системы на этапе опытной эксплуатации, фиксировать выявленные ошибки кодирования в разрабатываемых модулях информационной системы.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

**КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

**Формулой алгебры логики** называется всякое составное высказывание, содержащее логические переменные и знаки логических операций. Для записи составного высказывания на формальном языке нужно выделить простые высказывания и логические связи между ними.

*Пример 1*. Записать с помощью формулы логики высказывание: неверно, что если нет дождя, то будет солнечная погода, и дождь пойдет тогда и только тогда, когда будет ветер.

*Решение.* Обозначим буквой А высказывание: «идет дождь», буквой В высказывание: «будет солнечная погода», буквой С высказывание: «будет ветер». Разделим составное высказывание на простые и каждое запишем с помощью формулы логики:

«нет дождя» - ; «если нет дождя, то будет солнечная погода» - ;

«дождь пойдет тогда и только тогда, когда будет ветер» - .

Между простыми высказываниями стоит союз «и», т.е. они соединяются с помощью конъюнкции и составное высказывание «если нет дождя, то будет солнечная погода, и дождь пойдет тогда и только тогда, когда будет ветер» запишется в виде: . Т.к. перед этим составным высказыванием стоит слово «неверно», то нужно поставить отрицание над всей формулой.

В итоге заданное высказывание формализуется следующим образом: **.**

*Ответ:* **.**

 Для каждого логического выражения можно построить таблицу истинности, позволяющую определить истинность или ложность логического выражения при всех возможных комбинациях исходных значений логических переменных.

*Пример 2.* Построить таблицы истинности для формулы )↔(X→Y&).

*Решение.* Определим количество строк и столбцов в таблице. Т.к. в логическое выражение входят три переменные, то по формуле 23 получим 8 строк. Количество столбцов равно количеству логических переменных (3) + количество операций (6), получим 9 столбцов. Учитывая приоритет операций, расставляем порядок действий )(XY). Заполняем таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | Y | Z |  |  |  | Y& | X→Y& | )↔(X→Y&) |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Формулы алгебры логики называются **равносильными**, если они принимают одинаковые логические выражения (0 или 1) при одинаковых наборах значений, входящих в них высказываний. Равносильность формул можно доказать с помощью таблиц истинности или методом равносильных (эквивалентных) преобразований, используя основные законы логики. Законы логики также применяются для упрощения формул логики.

*Пример 3.* С помощью равносильных преобразований упростить формулу логики: (x→y)∨().

*Решение.* 1. Используя формулу: x→y=∨y, избавимся от операции импликации: (x→y)∨() = (∨y)∨().

2. Используя закон де Моргана , преобразуем вторую скобку: (∨y)∨() = (∨y)∨()

3. Используя законы коммутативности и ассоциативности, сгруппируем слагаемые следующим образом: (∨y)∨() = (.

4. По закону исключенного третьего =1, т.е. ( = .

Таким образом, решение данного примера будет следующим:

**(x→y)∨() = (∨y)∨() = (∨y)∨() = ( =**

*Ответ:* **(x→y)∨() =**

**ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ**

***Задание 1.***

Записать высказывания с помощью формулы логики.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **I вариант**  | **II вариант**  | **III вариант**  |
| Если светит солнце и не дует ветер, то не будет дождя | Если дует ветер, то солнце светит тогда и только тогда, когда нет дождя | Погода будет солнечной тогда и только тогда, когда ни будет ни ветра, ни дождя |
| **IV вариант** | **V вариант** | **VI вариант** |
| Неверно, что если дует ветер и солнце светит, то нет дождя | Если ветра нет, то дождь будет тогда и только тогда, когда будет пасмурная погода | Неверно, что если погода пасмурная, то дождь идет тогда и только тогда когда нет ветра |

***Задание 2.***

Построить таблицы истинности для формул:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **I вариант**  | **II вариант**  | **III вариант**  |
| ∨x | &x | (x&y)→ |
|  |  |  |
| **IV вариант** | **V вариант** | **VI вариант** |
| (∨y)↔x  | x→() | x↔() |
|  |  |  |

***Задание 3.***

С помощью равносильных преобразований упростить формулы логики:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **I вариант**  | **II вариант**  | **III вариант**  |
|  | x→(()&(x&)) |  |
|  |  |  |
| **IV вариант** | **V вариант** | **VI вариант** |
| ((xy)→x) →(x∨) | (xy)→ | x→(∨ ) |
|  |  |  |

***Задание 4.***

Установить, равносильны ли следующие формулы двумя способами:

а) с помощью таблицы истинности

б) с помощью равносильных преобразований

|  |  |
| --- | --- |
| **I вариант**  | **II вариант**  |
|  и  |  и  |

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. В чем разница между простыми и составными высказываниями?
2. Как определяется количество строк в таблице истинности?
3. Какими способами можно определить равносильность формул логики?

**Литература**

1. В.И. Игошин Математическая логика и теория алгоритмов: учеб. пособие. – М.: Издательский центр «Академия», 2008.
2. В. И. Игошин Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. - М.: Издательский центр «Академия», 2007
3. М.С. Спирина Дискретная математика: Учеб. для студ. сред. проф. образования . - М.: Издательский центр «Академия», 2004.

Практическая работа № 2

**ПОСТРОЕНИЕ ДИЗЪЮНКТИВНОЙ И КОНЪЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ**

**(ДНФ И КНФ). РЕШЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ.**

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** научиться определять ДНФ и КНФ, решать логические задачи средствами алгебры логики.

Для выполнения работы необходимо знать основные формулы алгебры высказываний, методы минимизации алгебраических преобразований; необходимо уметь формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

Выполнение данной практической работы способствует формированию профессиональных компетенций ПК 1.2.Взаимодействовать со специалистами смежного профиля при разработке методов, средств и технологий применения объектов профессиональной деятельности; ПК 1.4. Участвовать в экспериментальном тестировании информационной системы на этапе опытной эксплуатации, фиксировать выявленные ошибки кодирования в разрабатываемых модулях информационной системы.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут

**КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

# С помощью равносильных преобразований формулу логики можно привести к дизъюнктивной или конъюнктивной нормальной форме (ДНФ и КНФ).

# Дизъюнктивной нормальной формой называется дизъюнкция простых конъюнкций.

# *Пример 1*. Привести к ДНФ формулу (X→Y)&(Y→Z).

# *Решение*

# избавляемся от импликации в скобках;

# раскрываем скобки, пользуясь законом дистрибутивности;

# упрощаем выражение, пользуясь законом непротиворечия (Y = 0) и законом константы для нуля (X∨0=X).

# (X→Y)&(Y→Z) = (∨Y)&(∨Z) = ∨Z ∨ Y ∨ Y Z = ∨Z ∨ Y Z

# *Ответ:* (X→Y)&(Y→Z) = ∨Z ∨ YZ.

# Конъюнктивной нормальной формой называется конъюнкция простых дизъюнкций.

#

*Пример 2*.Привести к КНФ формулу (Х→Y)((→Z)→)

*Решение*

# избавляемся от импликации в скобках;

# во второй скобке используем закон де Моргана & и далее закон дистрибутивности.

(Х→Y)((→Z)→) = (∨Y)(∨) = (∨Y)((&) ∨) = **(∨Y)&() &)**

*Ответ:* (Х→Y)((→Z)→) = (∨Y)&() &).

Разнообразие логических задач очень велико. Способов их решения тоже немало. Но наибольшее распространение получили следующие три способа решения логических задач: ***средствами алгебры логики с помощью равносильных преобразований; табличный; с помощью рассуждений***.

*Пример 3.* ***Решить задачу с помощью преобразований***

Кто из учеников идет на олимпиаду по физике, если известно следующее:

1. Если Миша идет, то идет Аня, но не идет Маша.
2. Если Маша не идет на олимпиаду, то идет Аня, но не идет Миша.
3. Если Аня идет, то идет Миша, но не идет Маша.

*Решение.* Введем обозначение для простых логических высказываний:

А – Аня идет на олимпиаду

В – Маша идет на олимпиаду

С – Миша идет на олимпиаду

Запишем сложные высказывания, выражающие известные факты:

1. С → (A)
2. → (A)
3. A → (C)

Запишем произведение сложных высказываний и упростим его:

(С → (A) → (A))&( A → (C)) = ( ∨ (A) ∨ (A) )&( ∨(C)) =

= (B ∨ A ∨ ∨ A &( ∨(C)) = (B ∨ ∨ A) &( ∨(C)) =

= (B ∨(1 ∨ )) &( ∨(C)) = (B ∨) &( ∨(C)) = B ∨ ∨B C∨ = **B**

*Ответ*: на олимпиаду идет Маша

*Пример 4.* ***Решить задачу с помощью преобразований***

Трое друзей, болельщиков автогонок "Формула-1", спорили о результатах предстоящего этапа гонок.

1. Вот увидишь, Шумахер не придет первым, — сказал Джон. Первым будет Хилл.
2. Да нет же, победителем будет, как всегда, Шумахер, — воскликнул Ник. — А об Алези и говорить нечего, ему не быть первым.
3. Питер, к которому обратился Ник, возмутился: Хиллу не видать первого места

По завершении этапа гонок оказалось, что каждое из предположений двоих друзей подтвердилось, а предположения третьего из друзей оказались неверны. Кто выиграл этап гонки?

*Решение*. Введем обозначения для логических высказываний:

А — победит Шумахер; В — победит Хилл; С — победит Алези.

Запишем сложные высказывания, выражающие известные факты:

Возможные три случая:

Прав Джон и Ник, Питер не прав: = 0 (должно быть 1)

Прав Питер и Джон, Ник не прав: ( = 0 (должно быть 1)

Прав Питер и Ник, Джон не прав:

 ( = ( = = 1

*Ответ:* А – победит Шумахер; Хилл и Алези не победят

*Пример 5.* ***Решить задачу табличным способом***

Три дочери писательницы Дорис Кей — Джуди, Айрис и Линда, тоже очень талантливы. Они приобрели известность в разных видах искусств — пении, балете и кино. Все они живут в разных городах, поэтому Дорис часто звонит им в Париж, Рим и Чикаго.

Известно, что:

1. Джуди живет не в Париже, а Линда — не в Риме;

2.  парижанка не снимается в кино;

3.  та, кто живет в Риме, певица;

4. Линда равнодушна к балету.

Где живет Айрис, и какова ее профессия?

*Решение*. Составим таблицу и отразим в ней условия 1 и 4, заполнив клетки цифрами 0 и 1 в зависимости от того, ложно или истинно соответствующее высказывание:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Париж | Рим | Чикаго |  | Пение | Балет | Кино |
| 0 |   |  | Джуди |  |  |  |
|   |   |  | Айрис |  |  |  |
|   | 0 |  | Линда |  | 0 |  |

Так как Линда живет не в Риме, то, согласно условию 3, она не певица. В клетку, соответствующую строке "Линда" и столбцу "Пение", ставим 0. Из таблицы сразу видно, что Линда киноактриса, а Джуди и Айрис не снимаются в кино.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Париж | Рим | Чикаго |  | Пение | Балет | Кино |
| 0 |   |  | Джуди |  |  | 0 |
|   |   |  | Айрис |  |  | 0 |
|   | 0 |  | Линда | 0 | 0 | 1 |

Согласно условию 2, парижанка не снимается в кино, следовательно, Линда живет не в Париже. Но она живет и не в Риме. Следовательно, Линда живет в Чикаго. Так как Линда и Джуди живут не в Париже, там живет Айрис. Джуди живет в Риме и, согласно условию 3, является певицей. А так как Линда киноактриса, то Айрис балерина.

В результате постепенного заполнения получаем следующую таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Париж | Рим | Чикаго |  | Пение | Балет | Кино |
| 0 | 0 | 1 | Джуди | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | Айрис | 0 | 1 | 0 |
| 0  | 0 | 1 | Линда | 0 | 0 | 1 |

*Ответ.* Айрис балерина, живет в Париже.

**ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ**

**Задание 1.** Определить дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы

a) Найти ДНФ для формул:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **I вариант**  | **II вариант**  | **III вариант**  | **IV вариант** |
| (x∨y&z)&(x∨z) | х∨(x∨y) | x&∨x∨y | (x∨z)()∨x |

б) Найти КНФ для формулы:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **I вариант**  | **II вариант**  | **III вариант**  | **IV вариант** |
| ∨yx∨x | ∨x∨yz | ((z)→y)(→z) | (z→y)(y→z) |

**Задание 2**. Решить с помощью преобразований

# I вариант

# Задача 1. Кто играет в шахматы? Определите, кто из трёх мальчиков Александр, Борис и Сергей играет в шахматы, если известно:

1) играет Александр или Борис;
2) если играет Александр, то играет и Борис;
3) Александр и Сергей оба играют или оба не играют.

**Задача 2.** Три ученика, Саша, Коля и Вова, прогуляли информатику. Когда их спросили, кому пришла в голову эта идея, они ответили следующее:

1. Саша: «Я никогда не призывал к прогулу, это была идея Коли».
2. Коля: «Я никогда не предложил бы это первым, во всем виноват Вова».
3. Вова: «Эта идея пришла в голову Коле. Я просто пошел за компанию».

Внутренним чутьем учитель почувствовал, что два ученика говорят правду, а третий – лжет. Кто из учеников был инициатором прогула?

**II вариант**

**Задача 1**. Компьютер вышел из строя. Известно, что:

1. Если монитор неисправен, то исправна видеокарта, но несправна оперативная память.
2. Если видеокарта исправна, то исправна оперативная память, но неисправен монитор.
3. Если оперативная память исправна, то исправна видеокарта, но неисправен монитор.

Что неисправно в компьютере?

**Задача 2**. Три школьника, Миша, Коля и Сергей, остававшиеся в классе на перемене, были вызваны к директору по поводу разбитого в это время окна в кабинете. На вопрос директора о том, кто это сделал, мальчики ответили следующее:

1. Миша: «Я не бил окно, и Коля тоже…»
2. Коля: «Миша не разбивал окно, это Сергей разбил футбольным мячом!»
3. Сергей: «Я не делал этого, стекло разбил Миша».

Стало известно, что двое ребят сказали правду, а третий оба факта соврал. Зная это, директор смог докопаться до истины. Кто разбил стекло в классе?

**III вариант**

**Задача 1.** По телевизору синоптик объявляет прогноз погоды на завтра и утверждает следующее:

 1)Если не будет ветра, то будет пасмурная погода без дождя.

 2)Если будет дождь, то будет пасмурно и без ветра.

 3)Если будет пасмурная погода, то будет дождь и не будет ветра.

Какая же погода будет завтра?

**Задача 2.** Один из 3 братьев: Алеша, Витя и Семен поставил на скатерть кляксу. Кто запачкал скатерть? - спросила бабушка.

1. Витя не ставил кляксу, - сказал Алеша, - Это сделал Семен.

2) Это Витя поставил кляксу, - сказал Семен, - А Алеша не пачкал скатерть.

3) Я знаю, что Семен не мог этого сделать. - сказал Витя.

 Оказалось, что двое мальчиков сказали правду, а один сказал неправду. Кто поставил на скатерть кляксу?

**IV вариант**

**Задача 1.** Определите, кто из подозреваемых участвовал в преступлении, если известно:

1) если Иванов не участвовал или Петров участвовал, то Сидоров участвовал;

2) если Иванов не участвовал, то Сидоров не участвовал.

3) в преступлении участвовал только один из трех подозреваемых.

**Задача 2.**Аня, Вика и Сергей решили пойти в кино. Учитель, хорошо знавший ребят, высказал предположения:

1. Аня пойдет в кино, а Вика останется дома;
2. Сергей пойдет в кино, но Аня не пойдет;
3. Сергей не пойдет в кино и Вика не пойдет в кино.

Когда ребята пошли в кино, оказалось, что учитель немного ошибся: из трех его утверждений истинным оказались только два. Кто из ребят пошел в кино?

***Задание 3****.* ***Решить табличным способом***

**I вариант**

**Задача 1**. Воронов, Павлов, Левицкий и Сахаров — 4 талантливых молодых человека. Один из них — танцор, другой — художник, третий — певец, а четвертый — писатель. О них известно следующее:

1. Воронов и Левицкий сидели в зале консерватории в тот вечер, когда певец дебютировал в сольном концерте.
2. Павлов и писатель вместе позировали художнику.
3. Писатель написал биографическую повесть о Сахарове и собирается написать о Воронове.
4. Воронов никогда не слышал о Левицком.

**Задача 2**. Марина, Валерия, Анна и Дарья - подруги детства. Они умеют играть на разных инструментах (пианино, гитаре, арфе и скрипке), но каждая только на одном. Они же знают иностранные языки, но каждая только один. Известно еще вот что:

1. Анна не играет на скрипке, но знает французский язык.
2. Валерия не знает английского языка и не играет ни на арфе, ни на скрипке.
3. Девушка , которая говорит по-немецки, не играет на арфе.
4. Марина не знает ни английского, ни немецкого и не играет ни на скрипке, ни на арфе.
5. Девушка, которая играет на гитаре, говорит по-итальянски.

На каком языке говорит, и на каком инструменте играет каждая девочка?

**II вариант**

**Задача 1.** Атос, Портос, Арамис и Д’Артаньян – четыре талантливых молодых мушкетёра. Один из них лучше всех сражается на шпагах, другой не имеет равных в рукопашном бою, третий лучше всех танцует на балах, четвертый без промаха стреляет с пистолетов. О них известно следующее:

1. Атос и Арамис наблюдали на балу за их другом – прекрасным танцором.
2. Портос и лучший стрелок вчера с восхищением следили за боем рукопашника.
3. Стрелок хочет пригласить в гости Атоса.
4. Портос был очень большой комплекции, поэтому танцы были не его стихией.

Кто чем занимается?

**Задача 2**. Жили-были на свете три поросёнка, три брата: Ниф-Ниф, Наф-Наф, Нуф-Нуф. Построили они три домика: соломенный, деревянный и кирпичный. Все три брата выращивали возле своих домиков цветы: розы, ромашки и тюльпаны. Известно, что:

1. Ниф-Ниф живет не в соломенном домике, а Наф-Наф – не в деревянном;
2. возле соломенного домика растут не розы, а тот, у кого деревянный домик, выращивает ромашки.
3. У Наф-Наф аллергия на тюльпаны, поэтому он не выращивает их.

Узнайте, кто в каком домике живет, и какие цветы выращивает.

**III вариант**

**Задача 1.** «Город мастеров». В нашем городе живут 5 друзей: Иванов, Петров, Сидорчук, Веселов и Гришин. У них разные профессии: маляр, мельник, парикмахер, почтальон, плотник. Но я точно знаю, что:

1. Петров и Гришин никогда не держали в руках малярной кисти
2. Иванов и Гришин давно собираются посетить мельницу, где работает их товарищ.
3. Петров и Веселов живут в одном доме с почтальоном.
4. Сидорчук недавно был в загсе одним из свидетелей, когда Петров и дочка парикмахера сочетались законным браком
5. Иванов и Петров каждое воскресенье играют в городки с плотником и маляром
6. Гришин и Веселов по субботам встречаются в парикмахерской, где работает их друг.
7. Почтальон же предпочитает бриться дома.

Помогите мне установить профессию каждого из друзей.

**Задача 2**. Три товарища, Иван, Дмитрий и Степан преподают различные предметы в школах Москвы, Санкт-Петербурга и Киева. Известно, что:

1. Иван работает не в Москве, а Дмитрий не в Ленинграде;
2. Москвич преподает не физику;
3. Тот, кто работает в Ленинграде, преподает химию;
4. Дмитрий преподает не биологию.

Какой предмет, и в каком городе преподает каждый товарищ?

**IV вариант**

**Задача 1.** В авиационном подразделении служат Потапов, Щедрин, Семенов, Коновалов и Самойлов. Их специальности: пилот, штурман, бортмеханик, радист и синоптик. Об этих людях известно следующее:

1. Щедрин и Коновалов не умеют управлять самолетом.
2. Потапов и Коновалов пока не штурманы.
3. Щедрин и Самойлов живут в одном доме с радистом.
4. Семенов был в доме отдыха вместе со Щедриным и сыном синоптика.
5. Потапов и Щедрин в свободное время любят играть в шахматы с бортмехаником.
6. Коновалов, Семенов и синоптик увлекаются боксом.
7. Радист боксом не увлекается.

Кто какой профессии?

**Задача 2.** Маша, Женя, Лида и Катя умеют играть на различных инструментах (виолончели, рояле, гитаре и скрипке). Они же владеют различными иностранными языками (английским, французским, немецким, испанским), но каждая только одним. Известно, что:

1. девушка, которая играет на гитаре, говорит по-испански.
2. Лида не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает английского языка, так же как и Маша.
3. Девушка, которая говорит по-немецки, не умеет играть на виолончели,
4. Женя знает французский язык, но не умеет играть на скрипке.

Кто же из девушек, какой язык знает, и на каком инструменте играет?

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Какие законы логики Вы использовали при представлении булевой функции в виде ДНФ и КНФ?
2. Методом рассуждений решите задачу. Сегодня не воскресенье, а завтра не среда. Вчера была не пятница, а позавчера был не понедельник. Завтра не воскресенье, и вчера было не воскресенье. Послезавтра не суббота и не воскресенье. Вчера был не понедельник, и не среда. Позавчера была не среда, а завтра не вторник. Да, и сегодня не среда. Какой же сегодня день недели, если учесть, что одно утверждение в списке - ложно?

**Литература**

1. В.И. Игошин Математическая логика и теория алгоритмов: учеб. пособие. – М.: Издательский центр «Академия», 2008.
2. В. И. Игошин Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. - М.: Издательский центр «Академия», 2007

Практическая работа № 3

**ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ В ВИДЕ СОВЕРШЕННЫХ ДИЗЪЮНКТИВНОЙ И КОНЪЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ**

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** научиться представлять булевы функции в виде СДНФ и СКНФ; научиться строить логические схемы, реализующие булевы функции.

 Для выполнения работы необходимо знать основные формулы алгебры высказываний; необходимо уметь формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

Выполнение данной практической работы способствует формированию профессиональных компетенций ПК 1.2.Взаимодействовать со специалистами смежного профиля при разработке методов, средств и технологий применения объектов профессиональной деятельности; ПК 1.4. Участвовать в экспериментальном тестировании информационной системы на этапе опытной эксплуатации, фиксировать выявленные ошибки кодирования в разрабатываемых модулях информационной системы; ПК 2.3. Применять методики тестирования разрабатываемых приложений.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

**КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

Нормальная форма называется **совершенной**, если в каждой ее элементарной дизъюнкции (конъюнкции) представлены все переменные, входящие в данную функцию (либо сами, либо с отрицанием).

*Пример 1*. Найти СДНФ для булевой функции: F(x,y,z) = (x↔y)∨(y↔z) аналитическим способом и с помощью таблицы истинности.

*Решение.*

а) С помощью законов логики заменим эквиваленцию дизъюнкцией и отрицанием, приведем булеву функцию к ДНФ.

F(x,y,z) = (x↔y)∨(y↔z) = (xy∨) ∨(yz∨) = xy∨∨yz∨.

Т.к. в каждом слагаемом не хватает по одной переменной, умножим каждое слагаемое на 1, и затем представим 1 в виде: 1 = а∨ (вместо *а* необходимо записать недостающую переменную)

F(x,y,z) = xy1∨1∨yz1∨1=xy(z∨)∨(z∨)∨yz(x∨)∨(x∨)=xyz∨xy∨z∨∨yzx∨yz∨

∨x∨ = **xyz∨xy∨z∨yz∨x∨**

 б) Построим таблицу истинности для функции F(x,y,z) = (x↔y)∨(y↔z).

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | y | z | x↔y | y↔z | (x↔y)∨(y↔z) |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | **1** |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | **1** |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | **1** |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | **1** |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | **1** |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **1** |

В последнем столбце выделим наборы, для которых значение функции истинно и для каждого набора построим элементарные конъюнкции, причем каждой переменной xk=1 будет соответствовать xk, а каждой xk=0 будет соответствовать k. Далее составляем дизъюнкции построенных элементарных конъюнкций.

**F(x,y,z) =xyz∨z ∨yz∨x∨xy∨**

*Ответ:* СДНФF(x,y,z) = xyz∨xy∨z∨yz∨x∨

*Пример 2*. Найти СКНФ для булевой функции: F(x,y,z) = (x∨y)(z→x) аналитическим способом и с помощью таблицы истинности.

*Решение.*

а) С помощью законов логики заменим импликацию дизъюнкцией и отрицанием и приведем булеву функцию к КНФ.

F(x,y,z) = (x∨y)(z→x) = (x∨y)(∨x).

Т.к. в каждом слагаемом не хватает по одной переменной, прибавим к каждому слагаемое 0, и затем представим 0 в виде: 0 = а (вместо *а* необходимо записать недостающую переменную)

F(x,y,z) = (x∨y∨0)(∨x∨0)=(x∨y∨z)(∨x∨y)=(x∨y∨z)(x∨y∨) (∨x∨y)(∨x∨) = (x∨y∨z) (∨x∨y) (∨x∨).

б) Построим таблицу истинности для функции F(x,y,z) = (x∨y)(z→x).

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | y | z | x∨y | z→x | (x∨y)(z→x) |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | **0** |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | **0** |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | **0** |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

В последнем столбце выделим наборы, для которых значение функции ложно и для каждого набора построим элементарные дизъюнкции, причем каждой переменной xk=1 будет соответствовать k, а каждой xk=0 будет соответствовать xk. Далее составляем конъюкнции построенных элементарных дизъюнкций.

**F(x,y,z) = (x∨y∨z) (∨x∨y) (∨x∨)**

 *Ответ:* СКНФ:F(x,y,z) = (x∨y∨z) (∨x∨y) (∨x∨)

Устройства, реализующие элементарные булевые функции, называются **логическими элементами**. Логические элементы изображаются в виде прямоугольников, внутри которых помещаются условные названия или символы соответствующих функций:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Функция | Графическое изображение | Функция | Графическое изображение |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Из данных логических элементов путем соединения входа одного из них с выходом другого можно строить сложные логические схемы.

**ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ**

***Задание 1.***

Найти СДНФ для булевой функции а) аналитическим способом; б) с помощью таблицы истинности.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **I вариант**  | **II вариант**  | **III вариант**  | **IV вариант** |
| F(x,y,z) = (→yz)∨(y↔z) | F(x,y,z) = (→z)∨z | F(x,y,z) = (↔y)∨(x→yz) | F(x,y,z) = (→)∨xz |

***Задание 2.***

Найти СКНФ для булевой функции а) аналитическим способом; б) с помощью таблицы истинности.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **I вариант**  | **II вариант**  | **III вариант**  | **IV вариант** |
| F(x,y,z) = (→z)(∨x)  | F(x,y,z) = (∨z)(y→z) | F(x,y,z) = (→)(x∨z) | F(x,y,z) = (x∨y)(x→z) |

***Задание 3.*** Для данной булевой функции построить логическую схему

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **I вариант**  | **II вариант**  | **III вариант**  | **IV вариант** |
| F(x,y,z) = (x∨y)(⊕z) | F(x,y,z) = (&y)∨⎢z) | F(x,y,z) =( (⊕z) | F(x,y,z) = (x&)∨⎢z) |

***Задание 4.***

По заданной логической схеме построить булеву функцию и составить ее таблицу истинности:

**I вариант**

и

x

y

zz

не

не-или

**II вариант**

и

x

y

zz

не

 +

**III вариант**

и

x

y

zz

+

не

**IV вариант**

не

и

x

y

zz

не

не-или

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Какие законы логики применяются для ввода недостающих переменных при представлении булевой функции в виде СДНФ и СКНФ?
2. Приведите примеры логических схем, используемых в ЭВМ.

**Литература**

1. В.И. Игошин Математическая логика и теория алгоритмов: учеб. пособие. – М.: Издательский центр «Академия», 2008.
2. В. И. Игошин Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. - М.: Издательский центр «Академия», 2007
3. Спирина М.С. Дискретная математика: Учеб. для студ. сред. проф. образования . - М.: "Академия", 2004

Практическая работа № 4

**МИНИМИЗАЦИЯ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ.**

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** научиться минимизировать булевы функции с помощью равносильных преобразований и графическим методом карт Карно.

Для выполнения работы необходимо знать основные формулы алгебры высказываний, методы минимизации алгебраических преобразований; необходимо уметь формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

Выполнение данной практической работы способствует формированию профессиональных компетенций ПК 1.2.Взаимодействовать со специалистами смежного профиля при разработке методов, средств и технологий применения объектов профессиональной деятельности; ПК 1.4. Участвовать в экспериментальном тестировании информационной системы на этапе опытной эксплуатации, фиксировать выявленные ошибки кодирования в разрабатываемых модулях информационной системы; ПК 2.3. Применять методики тестирования разрабатываемых приложений.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

**КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

Нормальная форма называется ***минимальной***, если она включает минимальное число символов по сравнению со всеми другими эквивалентными ей нормальными формами.

***Минимальная нормальная*** форма получается из СДНФ (СКНФ) удалением некоторых элементарных конъюнкций (дизъюнкций). ***Тупиковой нормальной формой*** называется ДНФ (КНФ), из которой нельзя удалить ни одной элементарной конъюнкции (дизъюнкции) так, чтобы сохранить булеву функцию неизменной

*Пример 1.* Пусть булева функция задана таблицей истинности.

а)составить СДНФ для данной функции; б) минимизировать СДНФ; в) построить логическую схему, реализующую данную функцию.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x | y | z | F(x,y,z) |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | **1** |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | **1** |
| 1 | 1 | 1 | **1** |

*Решение.*

а) Найдем элементарные конъюнкции и составим СДНФ:

 F(x,y,z) = yz∨xy∨xyz

б) Минимизируем СДНФ с помощью равносильных преобразований:

F(x,y,z) = yz∨xy∨xyz =(yz∨xyz)∨ xy= yz(∨x)∨ xy = yz∨xy = y(z∨x) = y(z∨x)(z∨) = y(z∨x)

в) Данную функцию реализует следующая логическая схема:

или

и

x

y

zz

z∨x

F = y(z∨x)

Одним из наиболее удобных способов минимизации булевых функций является графический метод карт Карно. **Карты Карно** – это таблицы, состоящие из 2n клеток (n – количество переменных). В каждой клетке находится двоичное значение (0 или 1) булевой функции из таблицы истинности или из СДНФ.

При n = 3 карты Карно имеют вид таблицы с 23 = 8 клетками:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  00 |  10  |  11 |  01 |
| z 1 |  |  |  |  |
|  0 |  |  |  |  |

При n = 4 карты Карно имеют вид таблицы с 24 = 16 клетками.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | d | zd | z |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
| хy |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

*Пример 2.* Дана функция F(x,y,z) = y∨yz∨xy∨xyz. Построить минимальную нормальную форму данной функции.

*Решение*

*1 способ: с помощью равносильных преобразований*

F(x,y,z) = y∨yz∨xy∨xyz = (y∨yz)∨(xy∨xyz) = y(∨z) ∨ xy(∨z) = y ∨ xy = y( ∨ x) = y

*2 способ: с помощью карт Карно*

1. Функция задана в виде СДНФ. Нанесем единицы на карту Карно (единицы соответствуют слагаемым в СДНФ):

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  00 |  10  |  11 |  01 |
| z 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
|  0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

1. Обведем единицы попарно двумя контурами.
2. В первом контуре не меняются переменные , во втором – переменные .
3. Объединим получившиеся конъюнкции дизъюнкцией: **F(x,y,z) = ∨xy = y**.

В этой задаче можно рассмотреть весь квадрат из четырех единиц:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  00 |  10  |  11 |  01 |
| z 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
|  0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

В этом квадрате для всех единиц неизменной остается только переменная y, следовательно, **F(x,y,z) = y**.

*Ответ*: минимальная нормальная форма: **F(x,y,z) = y**.

*Пример 3.* Построить минимальную форму для булевой функции, заданнойтаблично.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **x** | **y** | **z** | **F** |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

*Решение*

1. Нанесем на карту Карно единицы в соответствии со значениями последнего столбца таблицы:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  00 |  10  |  11 |  01 |
| z 1 |  |  | 1 |  |
|  0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

1. Обведем единицы в два контура.
2. В первом контуре, состоящем из четырех единиц не меняется переменная z, во втором – переменные .
3. Объединим получившиеся результаты дизъюнкцией: **F(x,y,z) = ∨xy**.

*Ответ:* F(x,y,z) = ∨xy.

Кроме рассмотренных методов минимизации существуют также метод Куайна, метод диаграмм Вейча. Минимальную нормальную форму удобно использовать при построении логических схем.

**ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ**

***Задание 1*.** Привести СДНФк минимальной двумя способами: а) с помощью равносильных преобразований; б) с помощью карт Карно.

|  |  |
| --- | --- |
| **I вариант**  | **II вариант** |
| F(x,y,z) = ∨∨xz∨xyz | F(x,y,z) = ∨∨xz∨xy |
| **III вариант**  | **IV вариант** |
| F(x,y,z) = ∨∨xz∨xy | F(x,y,z) = ∨∨z∨x |

***Задание 2.***

Для данной булевой функции а)составить СДНФ; б) минимизировать СДНФ с помощью равносильных преобразований и карт Карно; в) построить логическую схему, реализующую функцию.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **I вариант**  | **II вариант**  | **III вариант**  | **IV вариант** |
| F(x,y,z) = (11001000) | F(x,y,z) = (01010100) | F(x,y,z) = (11000100) | F(x,y,z) = (00110010) |

***Задание 3.*** Постройте минимальную форму для функции, выраженной картой Карно.

**I вариант**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | d | zd | z |
|  | 1 |  |  | 1 |
|  |  | 1 | 1 | 1 |
| 1хy |  |  |  |  |
|  | 1 |  | 1 | 1 |

**II вариант**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | d | zd | z |
|  |  | 1 | 1 |  |
|  |  | 1 | 1 | 1 |
| 1хy |  |  |  | 1 |
|  |  | 1 | 1 |  |

**III вариант**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | d | zd | z |
|  | 1 | 1 |  | 1 |
|  | 1 | 1 |  |  |
| 1хy |  |  |  |  |
|  |  | 1 | 1 | 1 |

**IV вариант**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | d | zd | z |
|  | 1 | 1 |  | 1 |
|  |  |  | 1 | 1 |
| 1хy | 1 |  |  |  |
|  | 1 | 1 |  |  |

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Какие еще существуют методы минимизации булевых функций?
2. Почему при построении логических схем удобнее использовать минимальную форму булевой функции?

**Практическая работа № 5**

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ВЫПОЛНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫХ ОПЕРАЦИЙ И НА ПОДСЧЕТ КОЛИЧЕСТВА ЭЛЕМЕНТОВ.**

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** научиться выполнять операции над множествами, представлять множества кругами Эйлера и решать задачи на подсчет количества элементов.

Для выполнения работы необходимо знать основные принципы теории множеств; необходимо уметь формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

Выполнение данной практической работы способствует формированию профессиональных компетенций ПК 1.2.Взаимодействовать со специалистами смежного профиля при разработке методов, средств и технологий применения объектов профессиональной деятельности; ПК 1.4. Участвовать в экспериментальном тестировании информационной системы на этапе опытной эксплуатации, фиксировать выявленные ошибки кодирования в разрабатываемых модулях информационной системы; ПК 2.3. Применять методики тестирования разрабатываемых приложений.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

**КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

Совокупность элементов, объединенных некоторым признаком, образует **множество**. Над множествами можно совершать следующие операции:

1. Объединение (А∪В) – включает элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств А и В.
2. Пересечение (A∩B) – включает элементы, которые одновременно принадлежат А и В.
3. Разность (А\В) – включает элементы, которые принадлежат А и не принадлежат В.
4. Дополнение (А’) – включает элементы, которые не принадлежат множеству А (т.е. дополняют его до универсального U).
5. Декартово произведение (АхВ) – включает упорядоченные пары (а, b), в которых первый элемент а принадлежит множеству А, второй элемент b принадлежит множеству В.

*Пример 1.*На множестве U букв русского алфавита заданы множества:

А = {л, о, г, и, к, а}

В = {у, р, о, к}

С = {г, р, у, п, п, а}

Найти следующие множества: А) (A∩B)∪C; Б) (А∪В)∩С; В) U\( А∪В∪C)

*Решение*

А) (A∩B)∪C

Сначала определим пересечение множеств А и В (A∩B), которое включает буквы, принадлежащие одновременно множествам А и В.

A∩B = {o, к}

Объединим получившиеся пересечение с множеством С. Объединение будет содержать элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств: (A∩B)∪C = {о, к, г, р, у, п, п, а}

Б) (А∪В)∩С

Объединение множеств А∪В = {л, о, г, и, к, а, у, р}

(А∪В)∩С = {г, а, у, р}

В) U\(А∪В∪C)

Объединение множеств А∪В∪C = {л, о, г, и, к, а, у, р, п}

Универсальным множеством является множество букв русского алфавита, поэтому в разности U\(А∪В∪C) будут содержаться буквы алфавиты, не входящие в объединение (А∪В∪C)

U\(А∪В∪C) = {б, в, д, е, ё, ж, з, и, й, м, н, с, т, ф, х, ц, ч, ш, щ, ъ, ь, ы, э, ю, я}

*Пример 2*. Даны отрезки А = [-5, 1], В = [0, 2], С = [2, 7].

Найти следующие множества: А) (A∪B); Б) (А∩В)∪С; В) (С∪В)\(А∩В)

*Решение*

Нарисуем числовую ось и отметим на ней точки отрезков:

С

А

-5

0

2

7

1

В

А) (A∪B) = [-5, 2]

Б) (А∩В)∪С = [0, 1] ∪С = [0, 1] ∪ [2, 7].

В) (С∪В)\(А∩В) = [0, 7] \ [0, 1] = [1, 7]

Операции над множествами применяются для решения задач о нахождении числа элементов множеств, заданных несколькими условиями.

**n(А∪В) = n(А) + n(В ) - n(А∩В) -** формула количества элементов в объединении двух конечных множеств (формула включений-исключений для двух множеств);

**n(А∪В∪С) = n(А) + n(В) + n(С) - n(А∩В) - n(А∩С) - n(С∩В) + n(А∩В∩С) -** формула включений-исключений для трех множеств.

*Пример 3*. Каждый студент группы программистов занимается в свободное время либо в НСО, либо спортом. Сколько студентов в группе, если 23 увлекаются спортом, 12 занимаются НСО, а 7 совмещают занятия в НСО и увлечение спортом?

*Дано:*

А – множество студентов, увлекающихся спортом.

В – множество студентов, занимающизся в НСО.

n(A) = 23

n(B) = 12

n(А∩В) = 7

*Найти:* n(А∪В) - ?

*Решение.* n(А∪В) = 23 + 12 – 7 = 28

Используя определения операций и свойства операций можно доказывать различные теоретико-множественные соотношения.

*Пример 4*. Доказать равенство А\В = А∩В’.

*Решение.* Для доказательства равенства двух множеств нужно показать, что каждое из множеств является подмножеством другого. Это можно осуществить, выбирая произвольный элемент одного множества и доказывая, что он принадлежит другому множеству.

а ∈ А\В ↔ (а∈А) и (а∉В) – по определению разности А\В

 ↔ (а∈А) и (а∈B’) – по определению дополнения

 ↔ а∈А∩В’ – по определению пересечения.

Равенство А\В = А∩В’ доказано.

**ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ**

***Задание 1.*** На множестве U букв русского алфавита заданы множества А, В, С. Найти следующие множества и изобразить их кругами Эйлера.

А) (A∩B)∪C; Б) (А∪В)∩С; В) U\( А∪В∪C)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **I вариант**  | **II вариант**  | **III вариант**  |
| А = {д, о, с, к, а} В = {л, о, д, к, а}С = {к, н, и, г, а} | А = {г, р, у, ш, а} В = {б, у, г, о, р}С = {к, н, и, г, а} | А = {м, о, р, я, к} В = {я, к, о, р, ь}С = {к, р, о, н, а} |
| **IV вариант** | **V вариант** | **VI вариант** |
| А = {б, и, л, е, т} В = {б, и, р, к, а}С = {т, а, л, о, н} | А = {з, а, в, о, д} В = {н, а, р, о, д}С = {д, о, с, к, а} | А = {п, а, л, е, ц} В = {ц, а, п, л, я}С = {п, е, т, л, я} |

***Задание 2.*** Даны отрезки А, В, С. Найти следующие множества:

А) (A∪B); Б) (А∩В)∪С; В) (С∪В)\(А∩В)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **I вариант**  | **II вариант**  | **III вариант**  |
| А = [-2, 7]; В = [3, 10]; C = [5, 15] | А = [-4, 2]; В = [0, 6]; C = [3, 9] | А = [0, 8]; В = [4, 12]; C = [9, 20] |
| **IV вариант** | **V вариант** | **VI вариант** |
| А = [-6, 0]; В = [-3, 5]; C = [2, 8] | А = [0, 4]; В = [2, 9]; C = [5, 11] | А = [-1, 8]; В = [4, 13]; C = [6, 17] |

***Задание 3.***

Даны множества А, В. Определить декартово произведение множеств А) AхB; Б) АхА

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **I вариант**  | **II вариант**  | **III вариант**  |
| А = {8, 9, 10} В = {а, б} | А = {а, б, с} В = {3, 4} | А = {5, 6, 8} В = {л, к} |
| **IV вариант** | **V вариант** | **VI вариант** |
| А = {о, п, р} В = {0, 1} | А = {1, 5, 10} В = {к, н} | А = {д, г, в} В = {20, 21} |

***Задание 4.***

Используя формулу включения и исключения решить задачи.

**I вариант**

1. Все девочки в классе увлекаются вязанием или шитьем. Сколько девочек в классе, если вязанием занимаются 15 человек, шитьем – 20, а вязанием и шитьем – 10?
2. Из 100 студентов университета английский язык знают 28 студентов, немецкий — 30, французский — 42, английский и немецкий — 8, английский и французский — 10, немецкий и французский — 5, все три языка знают 3 студента. Сколько студентов не знают ни одного из трех языков?

**II вариант**

1. Художник Худобеднов за месяц работы написал 42 картины. На 17 из них есть лес, на 26 – река, а на 13 – и то, и другое, на остальных картинах – не пойми что. Сколько картин изображают не пойми что?
2. В первом классе читать умеют 12 учеников, считать – 8, писать – 9; читать и писать – 4, читать и считать – 5, писать и считать – 3; читать, писать и считать – 2; 6 учеников до сих пор ничему не научились. Сколько учеников в классе?

**III вариант**

1. В группе – 29 студентов. Каждый из них изучает или английский, или немецкий язык. 5 студентов изучает и английский, и немецкий одновременно. Сколько студентов занимаются в английской группе, если в немецкой – 12 студентов.
2. В летнем лагере 70 ребят. Из них 27 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов; 3 спортсмена посещают и драмкружок, и хор. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке?

**IV вариант**

1. В классе 28 учащихся, 15 из них занимаются музыкой, 13 увлекаются теннисом, а 8 занимаются и музыкой, и теннисом. Есть ли в классе ученики, равнодушные и к музыке, и к теннису, и если есть, то сколько их?
2. На экзамене по математике не решили ни одной задачи 5 человек, решили первую задачу – 3 человека , вторую задачу – 7 человек, третью задачу – 8 человек, 1-ую и 2-ую задачи – 2 человека, 1-ую и 3-ую – 2 человека, 2-ую и 3-ую – 4 человека, все задачи – 1 человек. Сколько было всего студентов?

**V вариант**

1. Из 35 учащихся класса 20 посещают математический кружок, 11 – физический, 10 – не посещают кружки. Сколько учеников посещают математический и физический кружки одновременно?
2. На вступительном экзамене по математике были предложены три задачи: по алгебре, планиметрии и стереометрии. Из 1000 абитуриентов задачу по алгебре решили 800, по планиметрии — 700, а по стереометрии — 600 абитуриентов. При этом задачи по алгебре и планиметрии решили 600 абитуриентов, по алгебре и стереометрии — 500, по планиметрии и стереометрии — 400. Все три задачи решили 300 абитуриентов. Существуют ли абитуриенты, не решившие ни одной задачи, и если да, то сколько их?

**VI вариант**

1. В группе – 25 студентов. Каждый из них изучает или английский, или французский язык. 6 студентов изучает и английский, и французский одновременно. Сколько студентов занимаются во французской группе, если в английский – 18 студентов.
2. В классе 30 человек. Из них 15 занимаются в драмкружке, 18 поют в хоре, 16 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов; 5 спортсменов посещают и драмкружок, и хор. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке?

***Задание 5.***

Доказать равенство аналитическим способом.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  **I вариант**  | **II вариант**  | **III вариант**  |
| (А∪В) ∩C=(A∩C) ∪(B∩C) | (А∩В)∪C=(A∪C)∩(B∪C) | (А∩В)’ = A’∪B’  |
| **IV вариант** | **V вариант** | **VI вариант** |
| (А∪В)’ = A’∩B’ | (A\B)∩C = (A∩C)\B | A\(B∪C ) = ( A\B)∩( A\C) |

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Поставьте в соответствие операциям над множествами логические операции?
2. Как можно доказать теоретико-множественные соотношения?

**Литература**

1. В.И. Игошин Математическая логика и теория алгоритмов: учеб. пособие. – М.: Издательский центр «Академия», 2008.
2. Спирина М.С. Дискретная математика: Учеб. для студ. сред. проф. образования . - М.: "Академия", 2004

**Практическая работа № 6**

**ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПРЕДЛОЖЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ,**

**ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ПРЕДИКАТАМИ**

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** научиться выполнять логические операции над предикатами; формализовывать предложения, используя предикаты и кванторы.

Для выполнения работы необходимо знать основы алгебры предикатов; необходимо уметь формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

Выполнение данной практической работы способствует формированию профессиональных компетенций ПК 1.2.Взаимодействовать со специалистами смежного профиля при разработке методов, средств и технологий применения объектов профессиональной деятельности; ПК 1.4. Участвовать в экспериментальном тестировании информационной системы на этапе опытной эксплуатации, фиксировать выявленные ошибки кодирования в разрабатываемых модулях информационной системы; ПК 2.3. Применять методики тестирования разрабатываемых приложений.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

**КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

**Предикатом** называется предложение, содержащее одну или несколько переменных, при подстановке в которые конкретных значений, предложение обращается в высказывание.

Множество М, на котором определен предикат P(х), называется областью **определения предиката**.

Множество всех элементов х ∈ М , при которых предикат принимает значение «истина», называется **множеством истинности предиката (Т).**

***Пример 1.*** Найти множество истинности предиката Р(х): 6х2 – 24 = 0, если его область определения множество всех действительных чисел.

*Решение*

Для нахождения множества истинности предиката определим корни уравнения:

6х2 – 24 = 0

x2 = 4

x1= -2, x2 = 2.

*Ответ:* Множество истинности Т(Р) = {-2, 2}.

Для предикатов определены логические операции: отрицание, дизъюнкция, конъюнкция, импликация, эквиваленция и следование.

***Пример 2***. На множестве М = {1, 2, 3, … ,20} заданы предикаты: A (x): «x не делится на 4»; B (x): «x – нечетное число»; C (x): «x – число простое»; D (x): «x кратно 5». Определить предикаты A(x) & D(x); С (x); (x); D (x) и найти их множества истинности.

*Решение*

1. Найдем множества истинности для исходных предикатов:

Т(А) = {1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19}

Т(В) = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19}

Т(С) = {1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}

Т(D) = {5, 10, 15, 20}

1. A(x) & D(x): «число х не делится на 4 и кратно 5»

Т(А&D) = {5, 15}

1. С (x): «число х не делится на 4 или простое»

Т(А∨С) = {1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 15, 19}

1. (x): «х делится на 4»

Т() = {4, 8, 12, 16, 20}

1. D (x): «если х нечетное число, то оно кратно 5»

Т(В→D) = T (∨D)

T () = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}

T (∨D) = {2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20}

Кроме логических операций над предикатами также определены две кванторные опреации: квантор общности и квантор существования.

**Квантор общности (универсальный квантор) -** ∀х.

**∀хР(х)** – для всех (любого) х истинно Р(х). Это высказывание истинно тогда и только тогда, когда предикат Р(х) выполняется для каждого значения переменного х.

**Квантор существования** - ∃х.

**∃хР(х) –** существует х, такой что истинно Р(х). Это высказывание истинно тогда и только тогда, когда для некоторых значениях х выполняется предикат Р(х).

***Пример 3.*** Запишите высказывание для символичной записи (∃х)(∃y): (x2+ y2 > 25).

Определите истинность высказывания, считая, что все переменные принадлежат множеству действительных чисел.

*Решение*

Данную запись можно представить высказыванием: существует х и существует y, такие что x2+ y2 > 25. Высказывание является истинным, т.к. можно найти пару чисел х и y, для которых будет выполняться выражение x2+ y2 > 25 (например, х = 3 и y = 5).

***Пример 4.*** Запишите высказывание «На каждой улице будет праздник» в символичной форме, введя предикаты.

*Решение*

1. Найдем область определения

М: х – множество всех улиц

 y – множество всех праздников

1. Введем предикат P(x, y): x имеет свой Y.
2. Данное высказывание в симвоичной форме запишется в виде: (∀x)( ∃y)P(x, y)

**ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ**

***Задание 1.*** Найти множества истинности данных предикатов, если их область определения множество всех действительных чисел.

|  |  |
| --- | --- |
| **I вариант**  | **II вариант**  |
| А) **P (x):** x2 – 4 = 0; Б) **Q(x):** 3x – 2 < 17 | А) **P (x):** 2x2 – 18 = 0; Б) **Q(x):** 2x + 3 < 15 |
| **III вариант**  | **IV вариант** |
| А) **P (x):** 3x2 – 12 = 0; Б) **Q(x):** 5x – 4 > 29 | А) **P (x):** x2 – 9 = 0; Б) **Q(x):** 4x + 6 > 12 |

***Задание 2.*** На множестве М = {1,2,3, … ,20} заданы предикаты: A (x): «x не делится на 5»; B (x): «x – четное число»; C (x): «x – число простое»; D (x): «x кратно 3». Определить следующие предикаты и найти их множества истинности:

|  |  |
| --- | --- |
| **I вариант**  | **II вариант**  |
| A (x) & B(x); D (x); (x); C (x); | C (x) & B (x); D (x); (x); A (x); |
| **III вариант**  | **IV вариант** |
| C (x) & D (x); C (x); (x);(x); | B (x) & D (x); B (x); (x); B (x); |

***Задание 3.*** Записать высказывание и определит его истинность, считая, что все переменные принадлежат множеству действительных чисел.

|  |  |
| --- | --- |
| **I вариант**  | **II вариант**  |
| (∃x) (∀y): (x + y = 10)(∀x) (∃y) (∃z): x\*y = z | (∀x) (∃y): (x + y = 8)(∀х) (∀y): (х>y) |
| **III вариант**  | **IV вариант** |
| (∀x) (∃y) (x – y = 7)(∀х) (∀y): (х+y>0) | (∃x) (∀y) (x – y = 5)(∀z) (∃y) (∃x): x + y = z |

***Задание 4.*** Записать предложенное высказывание в символичной форме, введя предикаты.

|  |  |
| --- | --- |
| **I вариант**  | **II вариант**  |
| У каждого человека есть мать. Некоторые студенты – второкурсники.  | Существуют города, которые больше Москвы.На каждом доме есть номер. |
| **III вариант**  | **IV вариант** |
| Каждое материальное тело имеет массу. Существуют кустарники, которые больше чем деревья. | Некоторые космические тела являются астероидами.У любой группы есть классный руководитель |

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. При каких условиях высказывания ∀хР(х) и ∃хР(х) истинны?
2. Где используются предикаты и кванторы?

**Литература**

1. В.И. Игошин Математическая логика и теория алгоритмов: учеб. пособие. – М.: Издательский центр «Академия», 2008.
2. Спирина М.С. Дискретная математика: Учеб. для студ. сред. проф. образования . - М.: "Академия", 2004

**Практическая работа № 7**

**РЕШЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В АЛГЕБРЕ ПРЕДИКАТОВ**

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** научиться решать логические задачи в алгебре предикатов, строить высказывания к высказываниям, содержащим кванторы.

 Для выполнения работы необходимо знать основы алгебры предикатов; необходимо уметь формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

 Выполнение данной практической работы способствует формированию профессиональных компетенций ПК 1.2.Взаимодействовать со специалистами смежного профиля при разработке методов, средств и технологий применения объектов профессиональной деятельности; ПК 1.4. Участвовать в экспериментальном тестировании информационной системы на этапе опытной эксплуатации, фиксировать выявленные ошибки кодирования в разрабатываемых модулях информационной системы; ПК 2.3. Применять методики тестирования разрабатываемых приложений.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

**КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

Для построения отрицания высказываний, содержащих квантор , достаточно заменить его на другой квантор и взять отрицание выражения, на которое этот квантор был «навешан».

*Пример 1*. Для данных высказываний построить их отрицание.

1) A: «Все целые числа являются простыми».

Данное высказывание содержит квантор общности (слово «все»), заменим его на квантор существования (слово «некоторые») и добавим отрицание с помощью частицы «не».

: «Некоторые целые числа не являются простыми»

2) А: «Некоторые люди любят есть репу»

 Данное высказывание содержит квантор существования (слово «некоторые»), заменим его на квантор общности («все») и добавим отрицание с помощью частицы «не».

: «Все люди не любят есть репу».

Для неформальной проверки правильности умозаключений, включающих утверждения типа «для всех» и «для некоторого», используются диаграммы Эйлера, которые состоят из кругов, изображающих множества.

Утверждению "Все р есть q" соответствует диаграмма, приведенная на рис. 1. На ней круг, изображающий множество р, содержится в круге, изображающем множество q.

Утверждение "Некоторые р есть q" представляется диаграммой на рис. 2. На этой диаграмме пересечение кругов, изображающих множества р и q, непусто.

P

Q

P

Q

рис. 1 рис. 2

*Пример 2.* Дано умозаключение. Проверить его правильность.

Все студенты колледжа выдающиеся

Все выдающиеся люди — ученые

Все студенты колледжа — ученые



В соответствии с посылками круг, изображающий студентов колледжа (СК), должен быть внутри круга, изображающего выдающихся людей (ВЛ), который, в свою очередь, должен быть внутри круга (У), изображающего ученых. Следовательно, круг студентов колледжа должен находиться внутри круга ученых, и умозаключение является правильным.

*Пример 3*. Дано умозаключение. Проверить его правильность.

Все поэты счастливы

Некоторые поэты ленивы

Некоторые ленивые люди счастливы



В соответствии с посылками круг, изображающий поэтов (П), должен быть внутри круга, изображающего счастливых людей (СЛ), а пересечение поэтов и ленивых людей (ЛЛ) должно быть непусто. Но это пересечение содержится в круге, изображающем поэтов, так что пересечение ленивых и счастливых людей непусто. Умозаключение правильно.

*Пример 4*. Дано умозаключение. Проверить его правильность.

Некоторые поэты неудачники

Некоторые атлеты неудачники

Некоторые поэты являются атлетами

Мы видим, что возможно построить такую диаграмму Эйлера, в которой пересечение кругов поэтов (П) и неудачников (Н) непусто и пересечение кругов атлетов (А) и неудачников непусто, так что посылки истинны, но при этом круги поэтов и атлетов не пересекаются, так что следствие не является верным. Следовательно, умозаключение не является правильным.

В основе проверки правильности подобных умозаключений лежит теория силлогистических выводов Аристотеля.

**ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ**

***Задание 1.*** Постройте отрицание к высказываниям, содержащим кванторы***.***

|  |  |
| --- | --- |
|  **I вариант**  | **II вариант**  |
| Все планеты имеют атмосферу.Некоторые люди ходят в театр. | Некоторые студенты учатся на «отлично».Все птицы улетают зимой в теплые края. |
| **III вариант**  | **IV вариант** |
| Некоторые машины красного цвета.Все компьютеры подключены к Интернету. | Все кошки любят молоко.Некоторые приборы исправны. |

***Задание 2.*** Проверьте правильность умозаключений.

|  |  |
| --- | --- |
| **I вариант** | **II вариант**  |
| 1. Все адвокаты богаты. Все богатые едят омаров. Все адвокаты едят омаров.
2. Некоторые адвокаты богаты. Некоторые врачи богаты. Некоторые врачи – адвокаты.
 | 1. Некоторые марсиане зеленые. Все елки зеленые. Некоторые марсиане – елки.
2. Все мужчины любят мясо. Некоторые учителя – мужчины. Некоторые учителя любят мясо.
 |
| **III вариант**  | **IV вариант** |
| 1. Все врачи любят музыку. Все поэты любят музыку. Все врачи – поэты.
2. Некоторые врачи умные. Все умные люди поэты. Некоторые врачи – поэты.
 | 1. Все машины дорогие. Велосипед не дорогой. Велосипед – не машина.
2. Все мужчины смотрят телевизор. Некоторые слесари – мужчины. Некоторые слесари смотрят телевизор.
 |

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. По какому правилу строится отрицание к высказываниям, содержащим кванторы.
2. Какой ученый заложил основы теории силлогистических выводов?
3. Как с помощью диаграмм Эйлера строятся высказывания содержащие кванторы общности и существования?

**ЛИТЕРАТУРА**

1. В.И. Игошин Математическая логика и теория алгоритмов: учеб.пособие. – М.: Издательский центр «Академия», 2008.
2. Спирина М.С. Дискретная математика: Учеб. для студ. сред. проф. образования . - М.: "Академия", 2004

**Практическая работа № 8**

**РЕШЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ МАШИНЫ ТЬЮРИНГА И НОРМАЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ МАРКОВА**

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** научиться строить машины Тьюринга и применять нормальные алгоритмы Маркова.

 Для выполнения работы необходимо знать основы теории алгоритмов; необходимо уметь формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

 Выполнение данной практической работы способствует формированию профессиональных компетенций ПК 1.2.Взаимодействовать со специалистами смежного профиля при разработке методов, средств и технологий применения объектов профессиональной деятельности; ПК 1.4. Участвовать в экспериментальном тестировании информационной системы на этапе опытной эксплуатации, фиксировать выявленные ошибки кодирования в разрабатываемых модулях информационной системы; ПК 2.3. Применять методики тестирования разрабатываемых приложений.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

**КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

Для уточнения понятия алгоритмего заменили строго формализованными математическими моделями: рекурсивные функции, машины Тьюринга и нормальные алгоритмы Маркова.

**Машина Тьюринга состоит из ленты бесконечной длины, разделенной на ячейки, и управляющей головки, которая перемещается вдоль ленты**.

Создать (запрограммировать) МТ означает создать ее **устройство управления** – нарисованную или напечатанную на листе бумаги прямоугольная таблица.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  Входные символы Состояния | s0 | s1 | s2 | sn |
| q1 |  | Команды ТМ |  |  |
| q2 |  |  |  |  |
| qn |  |  |  |  |

Команды ТМ записываются в виде: символ, направление передвижения, состояние.

*Пример 1*. На ленте есть слово, состоящее из символов #, $, 1 и 0. Составить программу, заменяющую все символы # и $ на нули. В момент запуска головка находится над первой буквой слова справа. Завершается программа тогда, когда головка оказывается над пустым символом после самой левой буквы слова.

*Решение*

Рассмотрим пример ленты для описанной машины Тьюринга:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | S0Нq0 | 1Лq1 | 0Лq1 | 0Лq1 | 0Лq1 |  |  |
|  | S0 | 1 | # | $ | 0 | S0 |  |

q1 – состояние изменения символа и движения влево; q1 – состояние остановки.

Получим следующую программу:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | S0 | 1 | 0 | # | $ |
| q1 | S0Hq0 | 1Лq1 | 0Лq1 | 0Лq1 | 0Лq1 |

*Пример 2****.*** Построить машину Тьюринга, которая прибавляет единицу к числу на ленте. Машина должна прибавить единицу к последней цифре числа. Если последняя цифра равна 9, то ее заменить на 0 и прибавить единицу к предыдущей цифре. В начальный момент машина находится против самой правой цифры числа.

*Решение.* Входное слово состоит из цифр целого десятичного числа, записанных в последовательные ячейки на ленте.

Программа для данной машины Тьюринга может выглядеть так:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | S0 |
| q1 | 1Нq0 | 2Нq0 | 3Нq0 | 4Нq0 | 5Нq0 | 6Нq0 | 7Нq0 | 8Нq0 | 9Нq0 | 0Лq0 | 1Нq0 |

q1 — состояние изменения цифры, q0 — состояние останова.

*Пример 3.* Алфавит машины Тьюринга состоит из символом а,b,c. Составить программу, которая переносит первый символ непустого слова Р в его конец.

Например: 

*Решение*

Для решения этой задачи предлагается выполнить следующие действия:

1. Запомнить первый символ слова, используя различные состояния машины.
2. Стереть этот символ.
3. Перегнать автомат вправо под первую пустую клетку за словом, и записать в неё запомненный символ.

Программа будет следующей:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | a | b | c | S0 |  |
| q1 | S0Пq2 | S0Пq3 | S0Пq4 | S0Нq0 | q1 – анализ 1 символа, его удаление и разветвление программы |
| q2 | aПq2 | bПq2 | cПq2 | a Нq0 | q2 – запись справа а |
| q3 | aПq3 | bПq3 | cПq3 | b Нq0 | q3 – запись справа b  |
| q4 | aПq4 | bПq4 | cПq4 | c Нq0 | q4 – запись справа с  |

**Нормальным алгоритмом Маркова** называется непустой конечный упорядоченный набор формул подстановок. **Формулой подстановки** называется запись вида α→β, где α и β – любые слова (возможно, и пустые).

**Работа алгоритма Маркова состоит из нескольких шагов**:

1. Формулы просматриваются сверху вниз, начиная с верхней, выбирается первая применимая формула, далее выполняется подстановка и получается новое слово Р1.
2. Далее полученное слово Р1 берется за исходное и снова формулы просматриваются сверху вниз, начиная с верхней и т.д.
3. Работа алгоритма повторяется до тех пор, пока либо не возникнет ситуация, когда ни одна подстановка не подходит - правило остановки; либо не будет установлено, что процесс подстановок не может остановиться.

*Пример 4*. Дано слово 1 + 2 + 2 + 1 + 4. Какое слово получится в результате применения к нему марковских подстановок:

1. 2 + 2 →4
2. 5 + 1 →6
3. 1 + 4 →5

*Решение*

1 + + 1 + 4 + 1 + 4 + 4 6 + 4

Т.к. больше не одна подстановка не подходит, то работа алгоритма заканчивается.

**ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ**

**I вариант**

***Задание 1***. ***Постройте машину Тьюринга***

1. На ленте есть слово, состоящее из символов %, #, 0 и 1. Разработайте программу, заменяющую все символы % на # и наоборот. В момент запуска головка находится над первой буквой слова справа. Завершается программа тогда, когда головка оказывается над пустым символом после самой левой буквы слова.
2. Постройте машину Тьюринга, которая прибавляет единицу к числу, записанному в пятеричной системе счисления. В начальный момент машина находится против самой правой цифры числа (машина должна прибавить единицу к последней цифре числа, если последняя цифра равна 4, то ее заменить на 0 и прибавить единицу к предыдущей цифре).
3. Входной алфавит машины Тьюринга: А={a,b}. Составить программу, удаляющую из слова Р его второй символ.

Т.е. надо запомнить и стереть первый символ, передвинуть головку вправо и на месте второго символа записать первый символ.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | S0 | a | b | b | a | S0 | → | S0 | b | b | a | S0 | → | S0 | a | b | a | S0 |  |
|  |  | ↑ |  |  |  |  |  |  | ↑ |  |  |  |  |  | ↑ |  |  |  |  |

***Задание 2. Примените подстановки нормального алгоритма Маркова***

1. Нормальный алгоритм задан алфавитом А={a,b} и схемой:
2. ba→ab
3. ab→λ

Примените этот алгоритм к слову bbaabab.

1. Примените к слову МУХА следующую схему НАМ:
	1. Х→К
	2. М→Р
	3. КА→ЛОН
	4. РУ→С

3. Дано слово 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 2. Какое слово получится в результате применения к нему марковских подстановок:

1. 2 + 2 →4
2. 1 + 1 →2
3. 4 + 2 →6

**II вариант**

***Задание 1***. ***Постройте машину Тьюринга***

1. На ленте есть слово, состоящее из символов №, %, 0 и 1. Разработайте программу, заменяющую все символы № на % и наоборот. В момент запуска головка находится над первой буквой слова справа. Завершается программа тогда, когда головка оказывается над пустым символом после самой левой буквы слова.
2. Постройте машину Тьюринга, которая прибавляет единицу к числу, записанному в шестеричной системе счисления. В начальный момент машина находится против самой правой цифры числа (машина должна прибавить единицу к последней цифре числа, если последняя цифра равна 5, то ее заменить на 0 и прибавить единицу к предыдущей цифре).
3. Входной алфавит машины Тьюринга: А={с,d}. Составить программу, удаляющую из слова Р его второй символ.

Т.е. надо запомнить и стереть первый символ, передвинуть головку вправо и на месте второго символа записать первый символ.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | S0 | c | d | c | d | S0 | → | S0 | D | C | d | S0 | → | S0 | c | c | d | S0 |  |
|  |  | ↑ |  |  |  |  |  |  | ↑ |  |  |  |  |  | ↑ |  |  |  |  |

***Задание 2. Примените подстановки нормального алгоритма Маркова***

1. Нормальный алгоритм задан алфавитом А={a,b} и схемой:
2. ba→ab
3. ab→λ

Примените этот алгоритм к слову aabbaab.

1. Примените к слову КОСА следующую схему НАМ:
	1. К→Р
	2. ЗА→ЛИК
	3. С→З
	4. РО→Б
2. Дано слово 3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1. Какое слово получится в результате применения к нему марковских подстановок:
3. 2 + 2 →4
4. 1 + 1 →2
5. 4 + 4 →8

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Сформулируйте тезис Черча.
2. Постройте с помощью оператора суперпозиции функцию: S(x)=x+4.
3. Нормальный алгоритм задан алфавитом А={a,b} и схемой:
4. ba→ab
5. ab→ ba. Примените этот алгоритм к слову baab.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. В.И. Игошин Математическая логика и теория алгоритмов: учеб.пособие. – М.: Издательский центр «Академия», 2008.

**Практическая работа №9**

**ШИФРОВАНИЕ ТЕКСТА С ПОМОЩЬЮ ШИФРА ЗАМЕНЫ ИЛИ ПЕРЕСТАНОВОЧНОГО ШИФРА; ДЕШИФРОВКА ШИФРОТЕКСТА**

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** научитьсяиспользовать простейшие методы криптографической защиты информации.

 Выполнение данной практической работы способствует формированию профессиональных компетенций ПК 1.2.Взаимодействовать со специалистами смежного профиля при разработке методов, средств и технологий применения объектов профессиональной деятельности; ПК 1.4. Участвовать в экспериментальном тестировании информационной системы на этапе опытной эксплуатации, фиксировать выявленные ошибки кодирования в разрабатываемых модулях информационной системы; ПК 2.3. Применять методики тестирования разрабатываемых приложений.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

**КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

1. **Шифры замены** – алгоритм шифрования, который производит замену каждой буквы открытого текста на какой-то символ шифрованного текста.

**А) Система шифрования Цезаря** – частный случай шифра простой замены. Метод основан на замене каждой буквы сообщения на другую букву того же алфавита, путем смещения от исходной буквы на K букв (у Цезаря смещение проводилось на 3 буквы).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **А** | **Б** | **В** | **Г** | **Д** | **Е** | **Ё** | **Ж** | **З** | **И** | **Й** | **К** | **Л** | **М** | **Н** | **О** | **П** |
| **Р** | **С** | **Т** | **У** | **Ф** | **Х** | **Ц** | **Ч** | **Ш** | **Щ** | **Ъ** | **Ы** | **Ь** | **Э** | **Ю** | **Я** |  |

Так, например, слово ЗАМЕНА после шифрования методом Цезаря превратится в КГПЗРГ.

Б) **Шифр Полибия**

Каждая буква может быть представлена парой букв, указывающих строку и столбец, в которых расположена данная буква.

Так представления буквы В будет АВ,

 а сообщение ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА зашифруется как ВГВДБВБДБЕАААДВБААЕБЕЕВАААГААЕВАААГАБВБДААЕЕ

**В) Схема шифрования Вижинера**. Таблица Вижинера представляет собой квадратную матрицу, в которой каждая строка получена циклическим сдвигом алфавита на символ. Для шифрования выбирается буквенный ключ, в соответствии с которым формируется рабочая матрица шифрования.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| а | б | в | г | д | е | ё | ж | з | и | й | к | л | м | н | о | п | р | с | т | у | ф | х | ц | ч | ш | щ | ъ | ы | ь | э | ю | я |
| б | в | г | д | е | ё | ж | з | и | й | к | л | м | н | о | п | р | с | т | у | ф | х | ц | ч | ш | щ | ъ | ы | ь | э | ю | я | а |
| в | г | д | е | ё | ж | з | и | й | к | л | м | н | о | п | р | с | т | у | ф | х | ц | ч | ш | щ | ъ | ы | ь | э | ю | я | а | б |
| г | д | е | ё | ж | з | и | й | к | л | м | н | о | п | р | с | т | у | ф | х | ц | ч | ш | щ | ъ | ы | ь | э | ю | я | а | б | в |
| д | е | ё | ж | з | и | й | к | л | м | н | о | п | р | с | т | у | ф | х | ц | ч | ш | щ | ъ | ы | ь | э | ю | я | а | б | в | г |
| е | ё | ж | з | и | й | к | л | м | н | о | п | р | с | т | у | ф | х | ц | ч | ш | щ | ъ | ы | ь | э | ю | я | а | б | в | г | д |
| И т.д. до 33-ей строки..  |

**Таблица Вижинера** формируется следующим образом. Из полной таблицы выбирается первая строка и те строки, первые буквы которых соответствуют буквам ключа. Первой размещается первая строка, а под нею — строки, соответствующие буквам ключа в порядке следования этих букв в ключе шифрования.

Процесс шифрования осуществляется следующим образом:

1. под каждой буквой шифруемого текста записываются буквы ключа. Ключ при этом повторяется необходимое число раз.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **а**  | **л**  | **г**  | **о**  | **р**  | **и**  | **т**  | **м**  |  | **п**  | **р**  | **о**  | **г**  | **р**  | **а**  | **м**  | **м**  | **ы**  |
| к  | н  | и  | г  | а  | к  | н  | и  |  | г  | а  | к  | н  | и  | г  | а  | к  | н  |

2. каждая буква шифруемого текста заменяется по подматрице буквами находящимися на пересечении линий, соединяющих буквы шифруемого текста в первой строке подматрицы и находящимися под ними букв ключа.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **а**  | **л**  | **г**  | **о**  | **р**  | **и**  | **т**  | **м**  |  | **п**  | **р**  | **о**  | **г**  | **р**  | **а**  | **м**  | **м**  | **ы**  |
| к  | н  | и  | г  | а  | к  | н  | и  |  | г  | а  | к  | н  | и  | г  | а  | к  | н  |
| **к**  | **щ**  | **л**  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Берем первую букву шифруемого текста (А) и соответствующую ей букву ключа (К); по букве шифруемого текста (А) входим в рабочую матрицу шифрования и выбираем под ней букву, расположенную в строке, соответствующей букве ключа (К),— в нашем примере такой буквой является К; выбранную таким образом букву помещаем в зашифрованный текст. Эта процедура циклически повторяется до зашифрования всего текста.

3. полученный текст может разбиваться на группы по несколько знаков.

1. **Шифры перестановки –** метод шифрования, заключающийся в том, что символы шифруемого текста переставляются по определенным правилам внутри шифруемого блока символов.

**А) Простая перестановка –** написать исходный текст задом наперед и одновременно разбить на слова из заданного количества букв (например, пяти).

Например, из фразы

 ПУСТЬ БУДЕТ ТАК, КАК МЫ ХОТЕЛИ.

получится такой шифротекст:

 ИЛЕТО ХЫМКА ККАТТ ЕДУБЪ ТСУП

В последней группе (пятерке) не хватает одной буквы. Значит, прежде чем шифровать исходное выражение, следует его дополнить незначащей буквой (например, О) до числа, кратного пяти:

 ПУСТЬ-БУДЕТ-ТАККА-КМЫХО-ТЕЛИО.

Тогда шифрограмма, несмотря на столь незначительные изменения, будет выглядеть по-другому:

 ОИЛЕТ ОХЫМК АККАТ ТЕДУБ ЬТСУП

**Б) Простой столбцевой перестановочный шифр** – текст пишется на горизонтально разграфленном листе бумаги фиксированной ширины, а шифротекст считывается по вертикали. Дешифрирование заключается в записи шифротекста вертикально на листе разграфленной бумаги фиксированной ширины и затем считывании открытого текста горизонтально. Открытый текст: ***КОММЕРЧЕСКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ТЕХНИКУМ***

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **К** | **О**  | **М**  | **М**  | **Е**  | **Р**  |
| **Ч**  | **Е**  | **С**  | **К**  | **О**  | **-**  |
| **Т**  | **Е**  | **Х**  | **Н**  | **И**  | **Ч**  |
| **Е**  | **С**  | **К**  | **И**  | **Й**  |  |
| **Т**  | **Е**  | **Х**  | **Н**  | **И**  | **К**  |
| **У**  | **М**  |  |  |  |  |

Зашифрованный текст: ***КЧТЕТУОЕЕСЕММСХКХ МКНИН ЕОИЙИ Р-Ч К***

**ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ И ФОРМЫ ОТЧЕТНОСТИ**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **I вариант** | **II вариант** |
| 1 | Зашифруйте фразу: Привычка – вторая натура.с помощью А) шифра ЦезаряБ) шифра ПолибияВ) шифра ВижинераГ) простой перестановкиД) простой столбцевой перестановки | Зашифруйте фразу: Причина страха - неизвестность.с помощью А) шифра ЦезаряБ) шифра ПолибияВ) шифра ВижинераГ) простой перестановкиД) простой столбцевой перестановки |
| 2 | Расшифруйте фразу: ТСЕХСУЗРЛЗ\_ПГХЯ\_ЦЪЗРЛВ | Расшифруйте фразу:ФПЗОЮП ФЦЖЯДГ ТСПСЁГЗХ |
| 3 | Расшифруйте фразу: ЗЫВОЕДЙ\_ВЛО\_ЗОЕРДДМ\_ОУО\_ \_ВХРТ | Расшифруйте фразу: ВВООСИТВЕС\_Е\_ИЧКЗТЕАА\_Л\_ |
| 4 | Расшифруйте слово: ГААЕГГВББВБДГБВА | Расшифруйте слово: ВГВДВВАГВДААВАВААА |
| 5 | Придумайте свою систему шифрования и определите ее вид (шифр замены или перестановки) |

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Чем отличаются шифры замены от шифров перестановки?
2. Для каких целей используется криптография?

**ЛИТЕРАТУРА**

1. М.С. Спирина Дискретная математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2013.

**Практическая работа №10**

**ПОСТРОЕНИЕ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ**

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** научиться задавать автоматы аналитическим, табличным и графическим способами.

 Выполнение данной практической работы способствует формированию профессиональных компетенций ПК 1.2.Взаимодействовать со специалистами смежного профиля при разработке методов, средств и технологий применения объектов профессиональной деятельности; ПК 1.4. Участвовать в экспериментальном тестировании информационной системы на этапе опытной эксплуатации, фиксировать выявленные ошибки кодирования в разрабатываемых модулях информационной системы; ПК 2.3. Применять методики тестирования разрабатываемых приложений.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

**КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

***Автомат*** – это устройство, которое без непосредственного участия человека выполняет функции приема, преобразования и передачи энергии, информации в соответствии с заложенной в него программой. ***Автомат*** можно также рассматривать как математическую модель реальных технических устройств.

Математическая модель цифрового автомата с одним входом задается пятью объектами:

X- конечное множество входных символов, входной алфавит: **Х= {x1(t), x2(t), …, xn(t)}**;

Y- конечное множество выходных символов, выходной алфавит: **Y={y1(t), y2(t), …, yn(t)}**;

Q - конечное множество состояний автомата: **Q= {q0(t ),q1(t), q2(t), …, qn(t)}**

δ(q, х) - функция перехода автомата из одного состояния в другое: **δ(q, х) = (QхX)®Q**

λ(q, х) - функция выхода автомата: **λ(q, х) = (QxХ) ® Y.**

На практике широкое применение получили ***конечные автоматы*** – автоматы, представляющие собой дискретные преобразователи информации, в которых содержится конечное множество входных и выходных сигналов, а также внутренних состояний.

Существуют три способа задания конечных автоматов:

* ***Табличный (матрицы переходов и выходов);***
* ***Графический (с помощью графов);***
* ***Аналитический (с помощью формул).***

*Пример 1.* Конечный автомат Мили имеет алфавиты: X={0,1} – множество входных символов, Y={а,b,c} – множество выходных символов, Q={10,20,30} – множество состояний. Задать автомат матрицами, аналитически и с помощью графа.

*Решение*

1. Задание автомата табличным способом.

Построим объединенную матрицу переходов и выходов. Так как не указаны конкретные функции, расставим значения произвольно, причем: для матрицы переходов значения возьмем из множества Q={10,20,30}; для матрицы выходов значения берутся из множества Y={ а,b,c }.

|  |  |
| --- | --- |
| **δ(qi, х)****λ(q, х)** | **q** |
| **10** | **20** | **30** |
| **0** | 10,a | 20,a | 30,a |
| **1** | 30,a | 10,b | 20,c |

1. Задание автомата аналитически.

Выпишем команды преобразования, осуществляемые рассматриваемым автоматом:

**1) 10,0 ® 10,a 2) 10,1®30,a 3) 20,0 ®20,a 4) 20,1®10,b 5) 30,0®30,a 6) 30,1®20,c**

1. Задание автомата с помощью графа
* Отмечаем вершины графа – множество состояний Q={10,20,30}.
* Берем первое преобразование: 10,0 ® 10,а. Оно переводит состояние 10 в состояние 10 с помощью входного сигнала 0, в результате которой образуется выходной сигнал а. Строим первая стрелка (ребро) от 10 к 10 (петля), делая на ней надпись (0,а).
* Берем второе преобразование 10,1®30,а и строим ребро от 10 к 30 с надписью (1,a).
* Аналогично рассматриваются остальные преобразования.

0/а

0/а

0/а

1/а

1/b

1/c

*Пример 2.* Конечный автомат Мура имеет алфавиты: X={1,2} – множество входных символов, Y={a,b,c} – множество выходных символов, Q={s1,s2,s3} – множество состояний. Задать автомат с помощью обобщенной матрицы и графа:

*Решение*

Так как не указаны конкретные функции, расставим значения в обобщенной матрице произвольно

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | а | b | c |
| s1 | s2 | s3 |
| 1 | s2 | s1 | s2 |
| 2 | s3 | s3 | s3 |

Отмечаем вершины графа – множество состояний Q={s1,s2,s3} и соответствующие ему множество выходных сигналов Y={a,b,c}.

Согласно первой ячейке таблицы состояние s1 переводится в состояние s2 с помощью входного сигнала 1. Для этого преобразования строим первое ребро от s1 до s2, делая на нем надпись: 1. Аналогично строим остальные ребра.

1

2

1

1

2

2

**ПОРЯДОК ВЫПОЛЕНИЯ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ**

**I вариант**

1. Конечный автомат Мили имеет алфавиты: X={1,2} – множество входных символов, Y={+,-,\*,/} – множество выходных символов, Q={00,01,02} – множество состояний.

Задать автомат матрицами, аналитически и с помощью графа.

1. Автомат Мили задан с помощью графа. Построить обобщенную матрицу.



1. Конечный автомат Мура имеет алфавиты: X={x,y,z} – множество входных символов, Y={0,1,2} – множество выходных символов, Q={s1,s2,s3} – множество состояний. Задать автомат матрицей и с помощью графа.

**Самостоятельная работа по теме: «Автоматы»**

**II вариант**

1. Конечный автомат Мили имеет алфавиты: X={10,20} – множество входных символов, Y={$,#,&,\*} – множество выходных символов, Q={a,b,c} – множество состояний.

Задать автомат матрицами, аналитически и с помощью графа.

1. Автомат Мили задан с помощью графа. Построить обобщенную матрицу.



1. Конечный автомат Мура имеет алфавиты: X={о,п,р} – множество входных символов, Y={а,в,с} – множество выходных символов, Q={s1,s2,s3} – множество состояний. Задать автомат матрицей и с помощью графа.

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Чем отличается автомат Мура от автомата Мили?
2. Где используются конечные автоматы?

**ЛИТЕРАТУРА**

1. М.С. Спирина Дискретная математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2013.