Министерство общего и профессионального образования

Свердловской области

Государственное бюджетное

профессиональное образовательное учреждение

Свердловской области

«Екатеринбургский техникум отраслевых технологий и сервиса»

Степанова Татьяна Николаевна, преподаватель

**Методическое пособие для самостоятельного изучения дисциплины**

**«Математика: АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ»**

**для студентов 1 курса всех специальностей**

Форма обучения – очная

Срок обучения 2 года 10 мес

Уровень освоения: профильный

2017 г.

Разработчик: Степанова Татьяна Николаевна, преподаватель 1КК

Организация-разработчик:

ГБПОУ СО «Екатеринбургский техникум отраслевых технологий и сервиса»

Рассмотрена на заседании методического совета, протокол № \_\_\_\_\_\_

«\_\_\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2017 г.

Председатель:\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**СОДЕРЖАНИЕ**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Обыкновенные дроби | 5 |
|  | Одночлены. Многочлены | 7 |
|  | Понятие действительного числа | 10 |
|  | Алгебраические дроби и действия над ними | 11 |
|  | Степень числа. Действия со степенями | 13 |
|  | Арифметический корень n-степени | 16 |
|  | Линейные уравнения. Корни уравнения. Теоремы равносильности | 18 |
|  | Системы двух уравнений с двумя переменными и способы их решения | 20 |
|  | Решение линейных уравнений и систем линейных уравнений с двумя переменными | 24 |
|  | Линейные неравенства. Основные приемы их решения | 24 |
|  | Системы линейных неравенств с одним неизвестным | 26 |
|  | Квадратные уравнения. Теорема Виета | 27 |
|  | Биквадратные уравнения и их решение | 32 |
|  | Иррациональные уравнения и их решение | 33 |
|  | Решение квадратных, биквадратных и иррациональных уравнений | 34 |
|  | Квадратные неравенства | 35 |
|  | Метод интервалов | 36 |
|  | Решение квадратных и дробно-рациональных неравенств | 37 |
|  | Элементарные функции и их графики | 38 |
|  | Решение уравнений и систем графическим методом | 44 |
|  | Геометрические преобразования графиков функций | 45 |
|  | Степенная функция, ее свойства и графики | 60 |
|  | Показательная функция, ее свойства и график | 63 |
|  | Показательные уравнения | 67 |
|  | Понятие логарифма. Определение логарифма | 72 |
|  | Логарифмические уравнения | 76 |
|  | Тригонометрические функции, их свойства и графики | 78 |
|  | Графики обратных тригонометрических функций | 81 |
|  | Синус, косинус, тангенс, котангенс числа. | 84 |
|  | Знаки тригонометрических функций | 85 |
|  | Поворот точки вокруг начала координат | 88 |
|  | Основные тригонометрические тождества | 91 |
|  | Формулы приведения | 94 |
|  | Формулы сложения аргументов | 95 |
|  | Тригонометрические функции двойного угла | 97 |
|  | Тригонометрические функции половинного аргумента | 99 |
|  | Формулы суммы и разности синусов и косинусов | 100 |
|  | Простейшие тригонометрические уравнения | 102 |
|  | Решение тригонометрических уравнений | 105 |
|  | Комплексные числа | 108 |
|  | Определение комплексного числа | 109 |
|  | Действия над комплексными числами в алгебраической форме | 109 |
|  | Квадратные уравнения, дискриминант которых отрицателен | 110 |
|  | Геометрическая интерпретация комплексного числа | 111 |
|  | Тригонометрическая форма комплексного числа | 111 |
|  | Показательная форма комплексного числа | 113 |
|  | Приложение 1 | 116 |
|  | Список используемой литературы | 117 |

**ВВЕДЕНИЕ**

Методическое пособие предназначено для самостоятельного изучения дисциплины «Математика: алгебра и начала анализа, геометрия» студентами первого курса, обучающихся по программам подготовки квалифицированных рабочих и специалистов среднего звена.

Цель пособия - оказание помощи студентам в освоении учебной дисциплины, восприятии учебного материала, его осмысления и запоминания, а также оказание помощи в организации самостоятельной работы. Данное пособие поможет студентам применить полученные знания при выполнении практических заданий.

Методическое пособие содержит перечень разделов, в каждом из которых отмечен минимум формул, который необходимо знать, чтобы успешно выполнять задания. В каждой теме содержится небольшое количество примеров с подробными решениями, а также краткие теоретические сведения и необходимые формулы. Весь материал иллюстрируется необходимым количеством рисунков.

Методическое пособие ориентировано на достижение следующих целей:

* **развитие** логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования;
* **овладение математическими знаниями и умениями,** необходимыми в повседневной жизни, для изучения смежных естественно-научных дисциплин на базовом уровне и дисциплин профессионального цикла, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки;
* **воспитание** средствами математики культуры личности, понимания значимости математики для научно-технического прогресса, отношения к математике как к части общечеловеческой культуры через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей.

## Обыкновенные дроби

Число вида  где *т* и *п* натуральные числа, называется ***дробью*.**

Например , . Число ***т*** называется ***числителем дроби****,* ***п***– ***знаменателем.***

Всякое натуральное число можно представить в виде обыкновенной дроби со знаменателем 1, т. е. *п* = 1. В этом случае дробь имеет вид или просто ***т***.

Обыкновенные дроби бывают правильные и неправильные. Дробь  называется правильной, если ее числитель меньше знаменателя и неправильной, если ее числитель больше знаменателя или равен ему.

**Равенство дробей**

Две дроби  и  называются равными, если *ad = bc.*

**Например:** , т. к. 2 ⋅ 9 = 3 ⋅ 6;

, т. к. 4 ⋅ 15 = 5 ⋅ 12.

**Основное свойство дроби**

Из определения равенства дробей следует, что: если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится дробь, равная данной.



**Например:**. Числитель и знаменатель мы разделим на одно и то же число *3;* полученную дробь снова можно сократить, разделив числитель и знаменатель на 5, т. е. .

**Сложение и вычитание дробей**

1. Если знаменатели дробей одинаковы, то сложение или вычитание дробей выполняются так:

а) к числителю первой дроби прибавляют (вычитают) числитель второй дроби и оставляют тот же знаменатель, т.е.

 +=; или  -  = .

2. Если знаменатели различны, то дроби сначала приводят к наименьшему общему знаменателю.

Наименьшим общим знаменателем двух или нескольких дробей является наименьшее общее кратное знаменателей этих дробей.

При сложении дробей с различными знаменателями нужно привести их к наименьшему общему знаменателю, затем сложить (вычесть) полученные дроби, используя правило сложения и вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

**Пример: +===**1.

**Умножение дробей**

Умножение обыкновенных дробей выполняют следующим образом: ⋅=,

т.е. перемножают отдельно числители, отдельно знаменатели. Первое произведение – числитель, второе произведение – знаменатель.

**Пример: ⋅==.**

**Деление дробей**

При делении обыкновенных дробей делимое  умножают на дробь , обратную делителю .

**Пример: : =**⋅=== .

**Пример:** Сложить дроби:

 и 

**Решение:** Имеем

.

**Пример:**

Найти значение числового выражения: 

**Решение:**

1)  Сократив числитель и знаменатель на 3 (это полезно сделать до выполнения действий умножения в числителе и знаменателе), получим

 , т.е.  . Итак,  .

2) : .

3) При нахождении значения выражения  действия сложения и вычитания можно выполнять одновременно. Наименьшим общим кратным чисел 15, 20, 30 является число 60, использовав дополнительные множители: для первой дроби 4, для второй – 3, для третьей – 2.

Получим:

.

**Задания для самостоятельного решения**

Выполнить действия:

1) 0,125; 2) (2,8+0,2);

3)  4)

5) 

**Одночлены**

***Одночленом***называют такое выражение, которое содержит числа, натуральные степени переменных и их произведения и не содержит никаких других действий над числами и переменными.

**Например,** 3a ⋅ (2,5a3), (5ab2) ⋅ (0,4c3d), x2y ⋅ (-2z) ⋅ - одночлены, тогда как выражения a + b,  не являются одночленами.

Любой одночлен можно привести к ***стандартному виду****,* т.е. представить в виде произведения числового множителя, стоящего на первом месте, и степеней различных переменных. Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют ***коэффициентом одночлена****.* Сумму показателей степеней всех переменных называют ***степенью одночлена.***

Если между двумя одночленами поставить знак умножения, то получится одночлен, называемый ***произведением***исходных одночленов. При возведении одночлена в натуральную степень также получается одночлен. Результат обычно приводят к стандартному виду.

Приведение одночлена к стандартному виду, умножение одночленов – тождественные преобразования.

**Пример:**

Привести к стандартному виду одночлен 3а⋅(2,5а3).

**Решение:** 3а ⋅ (2,5а3) = (3⋅ 2,5) ⋅ (а ⋅ а3) = 7,5а4.

**Многочлены**

***Многочленом***называют сумму одночленов. Если все члены многочлена записать в стандартном виде и выполнить приведение подобных членов, то получиться ***многочлен стандартного*** вида.

Всякое целое выражение можно преобразовать в многочлен стандартного вида – в этом состоит цель преобразований (упрощений) целых выражений.

**Пример:** 3а ⋅ 5b + 3ab + 2a ⋅ (- 4b) + b ⋅ b.

**Решение:** Сначала приведем к стандартному виду члены многочлена. Получим 15 ab + 3 ab – 8 ab + b2. После приведения подобных членов получим многочлен стандартного вида 10 ab + b2.

**Разложение многочлена на множители способами:**

1. Вынесение общего множителя за скобку.
2. Способом группировки.
3. С помощью формул сокращенного умножения.

Иногда можно преобразовать многочлен в произведение нескольких сомножителей – многочленов или одночленов. Такое тождественное преобразование называется ***разложением многочлена на множители****.* В этом случае говорят, что многочлен делится на каждый из этих сомножителей.

Рассмотрим некоторые способы разложения многочленов на множители.

1. ***Вынесение общего множителя за скобку***

При вынесении общего множителя за скобки каждую переменную, входящую во все члены многочлена, выносят с наименьшим показателем, который она имеет в данном многочлене.

2) ***Формулы сокращенного умножения***

1. (a + b)2 = a2 + 2ab + b2.
2. (a – b)2 = a2 – 2ab + b2.
3. (a + b)3 = a3 + 3a2b + 3ab2 + b3.
4. (a – b)3 = a3 – 3a2b + 3ab2 – b3.
5. (a + b)(a – d) = a2 – b2.
6. (a + b)(a2 – ab + b2) = a3 + b3.
7. (a – b)(a2 + ab + b2) = a3- b3.

3) ***Способ группировки***

Для этого надо объединить в группы те члены, которые имеют общие множители и вынести за скобки общий множитель каждой группы. Если после такого преобразования окажется общий множитель у всех получившихся групп, то и его тоже выносят за скобки.

**Пример:**  Выполнить действия:

a) (x + 3y)2 b) (2x + 3y)

c) (m3 + n5)2 d) (5x + 3y)2

**Решение:** (x + 3y)2 = x2 + 2(x \* 3y) + (3y)2 = x2 + 6xy + 9y2

1. (2x + 3y)2 = (2x)2 + 2(2x \* 3y) + (3y)2 = 4x2 + 12xy + 9y2
2. (m3 + n5)2 = (2m3)2 + 2(2m3 \* n5) + (n5)2 = m6 + 2m3n5 + n10
3. (5x – 3y)2 = (5x)2 – 2 \* (5x \* 3y) + (3y)2 = 25x2 – 30xy + 9y2

**Пример:** Представьте в виде квадрата двучлена следующие трехчлены:

1. x2+2x + 1 б) m2- 4mn + 4n2

**Решение:**

1. x2+ 2x + 1 = (x)2 + 2x ⋅ 1 + 12 = (x + 1)2
2. m2- 4mn + 4n2 = (m)2- 2(m\*2n) + (2n)2 = (m-2n)2

**Пример:** Выделить квадрат суммы или разности: a6 + 6a + 13

**Решение:** a2 + 6a + 13 = a2 + 6a + 9 + 4 = (a+3)2 + 4

**Пример:** Разложить на множители: 6а2х4 - 3ах3 + 12а3х2

**Решение:** 6а2х4- 3ах3 + 12а3х2 = 3ах2 (2ах2- x + 4а2)

**Пример:** Упростить выражение: 2х3+ 9- (x + 1)(х2- x + 1)

**Решение:**

2х3+ 9- (x + 1)(х2- x + 1) = 2х3+ 9- (х3+13) = 2х3+ 9- х3- 1 = х3+ 8

**Пример:** Упростить выражение: 

**Решение:**

В числителе и знаменателе каждой дроби вынесем за скобки общий множитель:

=

Используя формулы разности квадратов и разности кубов, получим:

=

**Задания для самостоятельного решения:**

Выполнить действия:

1) (х + 5)2- 16

2) (5а - b)3

3) 

Упростить выражения:

a) 3(m - 1)2+(m – 2)(m2 – 2m + 4)-(m + 1)

b) 3(x + 2)2+(2x – 1)2- 7(x + 3)(x – 3)

c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

h) 

i) 

j)  +  + 

**Понятие действительного числа**

Действительными числами называют бесконечные десятичные дроби вида +а0,а1а2а3…, - а0,а1а2а3…, где а0 – целое неотрицательное число, а буквы а1а2…-обозначают любую из десятичных цифр: 0, 1, 2, 3, 4,…,9.

Например: х = +127,1936… , где а0 = 127, а первые три из десятичных знака равны: а1 = 9, а2 = 9, а3 = 3 и т. д.

Действительное число может быть положительным или отрицательным, или равным 0. Положительное действительное число – это десятичная дробь, не равная 0. Каждая дробь может быть представлена, как частное двух целых чисел и поэтому является **рациональным числом**.

Существуют рациональные числа, которые нельзя записать в виде конечной десятичной дроби.

Например: , , . Если записать в виде десятичной дроби, то получится число, т.е. бесконечная десятичная дробь 0, 3333…

Бесконечную десятичную дробь называют **периодической**, т.е. 0,3333… с повторяющейся цифрой 3 – ее **периодом** и коротко записывают так: 0,(3); читается как «0 целых и 3 в периоде».

**Периодическая дробь** – это бесконечная десятичная дробь, у которой, начиная с некоторого десятичного знака, повторяется одна и та же цифра или группа цифр – **период дроби**.

Например: 23,1456565656…=23,14(56) (23 целых, 14 сотых и 56 в периоде).

**Пример:** Преобразовать периодическую десятичную дробь в обыкновенную:

**Решение:** Пусть х = 0,2(18) = 0,2181818… .

Т.к. в записи этого числа до периода содержится только один десятичный знак, то умножая на 10 обе части получаем:

10х = 2,181818… (1)

период этой дроби состоит из двух цифр, поэтому, умножая обе части данного равенства 102=100, получим: 1000х = 218,181818… (2)

Вычитая из равенства 2 равенство 1 получаем:

1000х = 218,181818…

10х = 2,181818…

990х = 216 Отсюда:

Х =

**Задания для самостоятельного решения:**

Представить периодическую десятичную дробь в обыкновенную

х = 0,5656569,,, х = 0,4151515… х = 0,43212121… х = 0,5521521521…

Ответы: х =

**Алгебраические дроби и действия над ними**

Частное от деления двух целых алгебраических выражений называется **алгебраической дробью.**

Рассмотрим несколько действий с алгебраическими дробями:

1. **Сокращение алгебраических дробей:**

Алгебраическую дробь можно упростить посредством сокращения ее на общие множители числителя и знаменателя. Для этого нужно разложить числитель и знаменатель на множители. Если окажется, что числитель и знаменатель имеют общие множители, то дробь можно на них сократить.

Пример:

1. **Упрощение алгебраической дроби, члены которой содержат дробные коэффициенты:**

Чтобы упростить дробь, которая содержит многочлены с дробными коэффициентами, нужно умножить и числитель и знаменатель на общий знаменатель всех коэффициентов по основному свойству дроби:

Пример:

1. **Сложение и вычитание алгебраических дробей:**

Для того чтобы сложить или вычесть дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить или вычесть их числители, оставив знаменатель без изменения.

Например:

Если же знаменатели различны, дроби нужно предварительно привести к одному и тому же знаменателю:

Например: Сложить дроби:

+

Выполнить сложение и вычитание:

1. Ответ:

2. Ответ:

3. Ответ:

Выполнить действие: -1 Ответ:

1. **Умножение и деление алгебраических дробей:**

Чтобы умножить две дроби, нужно умножить и числители и знаменатели этих дробей отдельно.

Пример:

При делении двух алгебраических дробей, нужно числитель первой дроби умножить на знаменатель второй дроби, а знаменатель первой дроби умножить на числитель второй дроби.

Пример:

**Задания для самостоятельного решения:**

**Упростите выражение:**

=

4.

5.

6.

7.

8.

9. =

**Степень числа.**

**Действия со степенями**

Пусть ***а*** – действительное число, ***п*** - натуральное число, большее единицы.

***Степень*** действительного числа ***а*** с натуральным показателем *п* есть произведение ***п*** – сомножителей, каждый из которых равен ***а***.

*а1 = а; а2 = а ⋅ а; а3  = а⋅ а ⋅ а*

Число ***а –*** *основание степени;* ***п –*** *показатель степени.*

***Справедливы следующие правила степени с натуральным показателем:***

1. При возведении в степень произведения, нужно возвести в эту степень каждый из сомножителей отдельно

(*а в с*)n = *ап ⋅ вп ⋅ сп*

1. При возведении в степень частного, нужно возвести в эту степень и делимое и делитель отдельно

**  .

***Имеют место следующие свойства степеней:***

1. При умножении степеней с одним и тем же основанием, основание степеней остается прежним, а показатели степеней складываются.

*;*

2. При делении степеней с одним и тем же основанием основание степеней остается прежним , а показатели степеней вычитаются.

*;*

3. При возведении степени в степень, основание остается прежним, а показатели степеней перемножаются

*;*

4. При извлечении корня из степени основание остается прежним, а показатель степени делится на показатель корня.

*;*

5. При делении степеней одного и того же числа в случае равенства показателей степеней делимого и делителя получается нулевой показатель.

Любое число в нулевой степени равно единице.

*;*

6. За степень с отрицательным показателем принимается дробь, числитель которой равен единице, а знаменатель тому же числу, но с положительным показателем, равным абсолютной величине отрицательного показателя.

*,* где *а ≠ 1*

**Пример:**  Вычислить:  (0,36)-0,5

**Решение:**

**Пример:** Сократить дробь: 

**Решение:** разложив числитель и знаменатель дроби на множители и сократив ее, получим:



**Пример:** Записать без знаменателя выражение: 

**Решение:** 

**Задания для самостоятельного решения:**

Выполнить действия: 





Упростить выражения:



Р**ешение задач на свойства степени**

Вычислить:

1. ;
2. =9;
3. ;
4. =

Упростить выражение, представив его в виде степени с основанием *а*:

1. =

Упростить выражение:

1. ;

**Арифметический корень n-ой степени**

Действительным корнем n-ой степени из действительного числа **а** называется такое действительное число х, что хn = а.

Записывается х = .

Положительный корень n-ой степени из положительного числа называется **арифметическим корнем**.

**Действия над корнями:**

1. Корень из произведения сомножителей равен произведению корней из этих же сомножителей.
2. Корень из частного равен частному корней из делимого и делителя.

=

1. Подкоренное число можно возвести в любую степень.
2. Если a и b - положительные числа, то можно вынести множитель из под радикала.

a

1. Чтобы извлечь корень из корня, нужно показатели степеней корней перемножить, оставив прежним подкоренное выражение.

**Исключение иррациональности в дроби**

Чтобы исключить иррациональность в дроби, нужно числитель и знаменатель данной дроби умножить на число, сопряженное знаменателю.

**Пример:**

**Решение:** =

**Задания для самостоятельного решения:**

1. Извлечь корень:
2. б) в) г)
3. Выполнить действия:

а) . б) 4xy , в) , г)

3. Исключить иррациональность в дроби:

а) , б) , в) , г)

4. Сократить дробь:

5. Найдите значения выражения:

1. ответ:
3. Упростите выражения:
4. ответ: - 4

**Решения задач с арифметическими корнями n-степени**

Вычислить:

1. : 5.

Упростить выражение:

Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби:

1. ; 3. 4.

Вычислить:



5. 6.

7. ; 8. ;

9. 10.

Упростить:

**Линейные уравнения . Корни уравнения.**

**Теоремы равносильности.**

Дать понятия:

* Уравнения.
* Что является корнем уравнения.
* Равносильные уравнения. Теоремы равносильности.
* Уравнения первой степени с одним неизвестным.
* Привести примеры решения линейных уравнений.

Равенство с переменной f(x) = g(x) называется ***уравнением с одной переменной х.***

***Корнем (или решением)***уравнения называется то значение неизвестного, при котором это уравнение обращается в верное равенство.

Два уравнения называются равносильными, если всякий корень одного уравнения является корнем другого и наоборот.

**Теоремы равносильности**

1. Если в уравнении какое-нибудь слагаемое перенести из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному.

2. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.

Уравнением первой степени с одним неизвестным называется уравнение вида ax + b = 0, где *а* – коэффициент, *в –* свободный член, х – переменная (искомая величина)

**Пример:** Решить уравнение: **х – 11 – 9х = 5 х + 3 – 6 х**

**Решение:** х – 11 – 9х = 5 х + 3 – 6 х Перенесем значения с неизвестными в

х – 9х – 5х + 6х = 11 + 3 одну часть, а свободные члены в

-7х = 14 другую.

х = -2 Ответ: х = -2

**Пример:** Решить уравнение: **6 х + ( х – 2 ) 2 = ( х + 8 )( х – 3 )+ 2х + 13**

**Решение:** 6 х + (х – 2 )2  = ( х + 8 )( х – 3 )+ 2 х + 13

6 х + х2 – 4х + 4 = х2 + 8х – 3х – 24 + 2х +13

2 х + х2 – х2 – 7х = - 15

-5 х = - 15

х = 3 Ответ: х = 3

**Пример:** Решить уравнение: ****

**Решение:** Это уравнение сводится к линейному уравнению. Умножим обе части уравнения на 12 (наименьший общий знаменатель).



**Задания для самостоятельного решения**:

Решить уравнения:



Системы двух уравнений с двумя

**переменными и способы их решений**

* Общий вид систем линейных уравнений с двумя переменными.
* Что является решением.
* Способы решения системы уравнений.

1. Подстановки;
2. алгебраического сложения;
3. графический;
4. по формулам Крамера.

Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имеет вид:

 где *а1, в1, а2, в2,-* заданные числа, *х, у –* неизвестные.

Решением системы называются такие два числа *х* и *у* , которые при подстановке в систему обращают каждое ее уравнение в верное равенство.

Рассмотрим способы решения системы:

* 1. **Способ подстановки.**

Этот способ заключается в следующем:

1. Из одного уравнения системы нужно выразить одно неизвестное через другое.

2. Найденное выражение подставить в другое уравнение системы, получится одно уравнение с одним неизвестным.

3. Решив это уравнение, найти неизвестное.

4. Найти второе неизвестное, подставив в первое уравнение найденное неизвестное.

**Пример:** Решить систему способом подстановки:  

**Решение:**  выразим переменную х из первого уравнения. х = 

Подставим данное выражение во второе уравнение



Решим второе уравнение 6

-24 - 18у + 20у + 28 = 0

2у = - 4 у = - 2

Находим значение переменной ***х***

х =  ⇒ 

Ответ: 

* 1. **Способ алгебраического сложения**

Этот способ заключается в следующем:

1. Нужно уравнять модули коэффициентов при каком-нибудь неизвестном

2. Складывая или вычитая почленно полученные уравнения, найти одно неизвестное.

3. Подставляя найденное значение в одно из уравнений системы, найти второе неизвестное.

**Пример:** Решить систему уравнений способом алгебраического сложения.



**Решение:**

 домножим первое уравнение на 2, чтобы уравнять коэффициенты при неизвестном х.



Вычитаем почленно полученные уравнения 

7у = 35

у = 5

Находим первое неизвестное 2х + 55 = 15

2х = - 10 ⇒ 

х = - 5 Ответ: (- 5; 5)

* 1. **Графический способ**

Для решения системы уравнений с двумя переменными графическим способом, нужно в одной системе координат построить графики уравнений и найти координаты точек пересечения этих графиков.

**Пример:** Решить систему уравнений графическим способом



**Решение:** График уравнения 3х + 2у = 5 по двум точкам, например (1;1) и (3; -2).

Построим график уравнения 2х – у =8 по точкам (0; -8) и (4; 0).

2 х - у = 8

3 х + 2у=5

-2

3

М

у

х

Полученные прямые не параллельны, их пересечением служит точка М (3; -2). Значит, (3; -2) – решение заданной системы.

* 1. **Способ решения по формулам Крамера**

Система n- уравнений с n неизвестными, определитель которой отличен от нуля, всегда имеет решение и притом единственное. Оно находится следующим образом: значение каждого из неизвестных равно дроби, знаменателем которой является определитель системы, а числитель получается из определителя системы заменой столбца коэффициентов при искомом неизвестном на столбец свободных членов.

Пусть дана система линейных уравнений с n переменными:

Из коэффициентов при неизвестных составим матрицу А, а из свободных членов – матрицу- столбец В, т.е.

Вычислим определитель системы .

Пусть Если в определителе системы заменить поочередно столбцы коэффициентов при *х* и при *у* на столбец свободных членов, то получим n определителей для n неизвестных

*=; ; x =; y =*

**Пример:** Решить систему уравнений:

**Решение:**

x = =

**Задания для самостоятельного решения:**

Решить системы уравнений:







**Решение линейных уравнений и систем линейных уравнений с двумя неизвестными**

Решить уравнение:

1. 3х – 5 = 10 – х; 6. 4 + 8х + 8 = 2х – 10 – 7х + 9;
2. 4х + 4 = х + 5; 7. 5(х – 3) – 2(х – 7) +7(2х + 6) = 7;
3. 5х + 3(3х + 7) = 35; 8. 11(у – 4) + 10(5 – 3у) – 3(4 – 3у) = - 6
4. 8х – (7х + 8) = 9; 9. 5(8х – 1) – 7(4х + 1) + 8(7 – 4х) = 9;
5. 8у – 9 – 4у + 5 = 12у – 4 – 5у; 10. 10(3х – 2) – 3(5х + 2) + 5(11 – 4х) = 25.

Решить уравнения:

1. 2. 3.

5. 3у + 5 = 4(9 - ; 6. 8(11 -

Решить систему уравнений с двумя неизвестными:

**Линейные неравенства. Основные приемы их решения**

Неравенство первой степени с одним неизвестным *х* имеет вид:

kx + b > 0 или kx + b < 0, где k и b – данные числа, причем k 0. Число k называется ***коэффициентом*** при неизвестном, а число b – ***свободным членом*** неравенства.

Решением неравенства с одним неизвестным х называется такое число х0, при подстановке которого в неравенство вместо х получается верное числовое неравенство.

Решить неравенство – значит найти все его решения.

**Пример**: Решить неравенство 2х + 5 0

Пусть некоторое число х0 есть решение неравенства. Подставим его вместо х в неравенство 2х + 5 0. Получим верное числовое неравенство 2х0 + 5 0. Решим его:

2х0 - 5

х0 итак, множество всех решений неравенства есть множество чисел, удовлетворяющих неравенству х . Все решения неравенства образуют интервал или что множеством всех решений неравенства является интервал .

**Пример**: Решить неравенство: -4х + 13 . – 4х - 13 х

х

Рисунок 1.

Неравенство, левая и правая части которого есть многочлены первой степени относительно *х* или числа, называется ***линейным неравенством с одним неизвестным х.***

Любое неравенство первой степени есть частный случай линейного неравенства.

Два неравенства называются равносильными, если любое решение первого неравенства является решением второго и, наоборот, любое решение второго является решением первого.

При решении неравенств пользуются следующими утверждениями:

1. Члены неравенства можно переносить с противоположными знаками из одной части неравенства в другую.
2. В неравенстве можно приводить подобные члены.
3. При умножении (или делении) неравенства на положительное число знак неравенства сохраняется.
4. При умножении (или делении) неравенства на отрицательное число знак неравенства меняется на противоположный.

**Пример:** Решить неравенство:

4х – 7 - 2х + 5

6х 12 х

х 2 2

Рисунок 2.

**Задания для самостоятельного решения:**

Решите неравенства:

1. 7х + 5 7х – 1;
2. 5х - 2х – 8х + х – 12х > 7 – 2х;
3. 8 – 9х > х – 3 – 3х + 4х + 15;
4. 4 – 8х - 8х + 4;
5. Х – 3 + 2х 4 + 3х – 1;

**Системы линейных неравенств с одним неизвестным**

Для того, чтобы решить систему линейных неравенств с одним неизвестным, надо решить каждое неравенство этой системы, а затем найти общую часть полученных решений, она и будет решением данной системы.

Рассмотрим примеры решения систем линейных неравенств.

Решить систему неравенств:

х

Рисунок 3.

**Задания для самостоятельного решения:**

1. ; 6. ;
2. ; 7.
3. ; 8. ;
4. 9. ;
5. ; 10. .

**Решение линейных неравенств и их систем**

Решить неравенства:

1. 3; 11.
2. ; 12. ;
3. ; 13.
4. ; 14.
5. ; 15.
6. ; 16.
7. ; 17.
8. ; 18.
9. ; 19.
10. 20.

Решить системы неравенств:

1. 4. ;
2. ; 5. ;
3. ; 6. ;

; 11. ;

1. ; 12. ;
2. ; 13. ;

10. ; 14.

Решить системы уравнений всеми способами:

* 1.  Ответ: 
  2.  Ответ: 
  3.  Ответ: 
  4.  Ответ: 
  5.  Ответ: 

**Квадратные уравнения.**

**Теорема Виета**

Уравнения вида *ax2 + bx + c = 0* , где *а, в, с* – действительные числа, причем *а* ≠ 0, называют ***квадратным уравнением****.* Если *а* = 1, то уравнение называют ***приведенным****;* если *а*  ≠ 1, то ***неприведенным****.* *а, в –* коэффициенты при неизвестном, *с* – свободный член.

Корни уравнениянаходят по формуле:

Х = .

Выражение D = *в2- 4ас* ***называют дискриминантом***квадратного уравнения. При:

* 1. D > 0 – уравнение имеет два корня;
  2. D = 0 – уравнение имеет один корень;
  3. D < 0 – уравнение не имеет корней

**Теорема Виета**

Если приведенное квадратное уравнение *х2 + рх + q = 0*  имеет действительные корни, то их сумма равна – *р*, а произведение равно *q,* т. е.

*x1 + x2 = -p,*

*x1 x2 = q*

***(сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену).***

**Неполные квадратные уравнения**

Если в квадратном уравнении *в* и *с* равны нулю, то квадратное уравнение называют ***неполным.***

**Решение неполных квадратных уравнений**

1. *ах2 = 0,* ( *а* ≠ 0) - имеет один корень;

2. *ах2 + с = 0* (*а* ≠ 0, *с* ≠ 0) х2 = 

Возможны два случая:

а) Если , то  и поэтому уравнение х2 =  не имеет действительных корней

**б)** Если  то >0 и уравнение х2 =  имеет два корня

 ( )

3. *ах2+ вх = 0*

*х(ах + в) = 0*

*х = 0 ах + в = 0*

*х =* 

**Пример:** Решить уравнение: **5x2+ 8x + 3 = 0**

**Решение**: 5x2+ 8x + 3 = 0

Найдем дискриминант по формуле **D = b2 - 4ac**

D=64-453=64-60=4

Находим корни, пользуясь формулами **x1 =** 

**x2** = 

x1 =  x2 = 

Ответ: х 1= -0,6 х 2 = -1

**Пример**: Решить уравнение: **6 x2 – 11 x + 6 = 0**

**Решение**: 6 x2 – 11 x + 6 = 0

D=144-466=121-144 = - 23

Дискриминант отрицательный ⇒ квадратное уравнение не имеет действительных корней.

**Пример:** Решить уравнение: **4 x2 + 12 x + 9 = 0**

**Решение:** 4 x2 + 12x + 9 = 0

D=144-449=144-144=0

Квадратное уравнение имеет один корень.

x = 

**Пример:** Решить уравнение по теореме Виета:

**Решение:** а) **x2 - 2 x - 8 = 0**

x1+x2 = 2

x1  x2 = - 8 ⇒ х1=4; x2=-2

б) **x2 – 6 x + 8 = 0**

x1 + x 2 = 6

x1x 2 = 8 ⇒ x1 = 4 x2 = 2

в) **х2 - 7 х + 10 = 0**

х1 + х 2 = 7

х1  х2 = 10 ⇒ х1 = 2 х2 = 5

**Пример:** Составить квадратное уравнение по данным его корням.

**х1 = 4 х 2 = -3**

**Решение** Воспользуемся теоремой Виета х1 + х2 = 4 – 3 = 1 ⇒ второй коэффициент равен –1

х1 х2 = 4 ( - 3 ) = -12 ⇒ свободный член равен –12

Получим квадратное уравнение вида х2 – х – 12 = 0

**Пример:** Решить уравнение: **2 х2 – 5 х = 0**

**Решение:** Неполное квадратное уравнение. Разложим левую часть на множители.

х ( 2 х – 5 ) = 0

х = 0 2 х – 5 = 0

х = 2,5 Ответ: х1 = 0; х2 = 2,5

**Пример:** Решить уравнение: **6 x2 + 4 x = 5 x2 -12x**

**Решение:** 6 x2 + 4 x = 5 x2 -12x

6 x2 – 5 x2 + 4x +12x = 0

x2 + 16 x = 0

x ( x + 16) = 0

x 1= 0 x + 16 = 0

x 2 = - 16

Ответ: x1 = 0 ; x2 = - 16

**Пример:** Решить уравнение**: x ( 12 – x ) = 3 ( 4 x – 3 )**

**Решение:** x ( 12 – x ) = 3 ( 4 x – 3 )

12 x - x2 = 12 x - 9

- x2 + 9 = 0

x2 = 9

x1 = 3 x2 = -3

Ответ: x1= 3 ; x2 = -3

**Пример:** Решить уравнение: **5x2+ 8x + 3 = 0**

**Решение:** 5x2+ 8x + 3 = 0

Найдем дискриминант по формуле **D = b2 - 4ac**

D=64-453=64-60=4

Находим корни пользуясь формулами **x1 =** 

**x2** = 

x1 =  x2 = 

Ответ: х 1= -0,6 х 2 = -1

**Пример:** Решить уравнение: **6 x2 – 11 x + 6 = 0**

**Решение:** 6 x2 – 11 x + 6 = 0

D=144-466=121-144 = - 23

Дискриминант отрицательный ⇒ квадратное уравнение не имеет действительных корней.

**Пример:** Решить уравнение: **4 x2 + 12 x + 9 = 0**

**Решение:**  4 x2 + 12x + 9 = 0

D=144-449=144-144=0

Квадратное уравнение имеет один корень.

x = 

**Пример:** Решить уравнение по теореме Виета:

а) **x2 - 2 x - 8 = 0**

x1+x2 = 2

x1  x2 = - 8 ⇒ х1=4; x2=-2

б) **x2 – 6 x + 8 = 0**

x1 + x 2 = 6

x1  x 2 = 8 ⇒ x1 = 4 x2 = 2

в) **х2 - 7 х + 10 = 0**

х1 + х 2 = 7

х1  х2 = 10 ⇒ х1 = 2 х2 = 5

**Пример:** Составить квадратное уравнение по данным его корням:

**х1 = 4 х 2 = -3**

**Решение:** Воспользуемся теоремой Виета х1 + х2 = 4 – 3 = 1 ⇒ второй коэффициент равен –1

х1 х2 = 4( - 3 ) = -12 ⇒ свободный член равен –12

Получим квадратное уравнение вида х2 – х – 12 = 0

**Задания для самостоятельного решения:**

Найти корни квадратных уравнений:

3 х2 -10 = 0

2 х 2 + 5 = 0

3 х2 + 5 х – 2 = 0

3 х2 + 2 х - 1 = 0

9 х2 + 9 х + 2 = 0

2 x2 – 5 x + 2 =0

х2 + 4 х + 9 = 0

х2 – 6 х + 9 = 0

2 х2 – 3 х + 5 = 0

Решить квадратные уравнения по теореме Виета:

х2 + 5 х + 6 = 0

х2 – 17 х – 18 = 0

х2 – 9 х + 14 = 0

х2 + 3 х – 28 = 0

Составить квадратные уравнения, если их корни равны:

а) х1=2 х2=5

б) х1=2+ х2=2-

в) х1=3+ х2=3-

**Биквадратные уравнения и их решение**

***Биквадратным*** называется уравнение вида *ах4 + вх2 + с = 0,* где *а* ≠ 0.

Биквадратное уравнение решается методом введения новой переменной: положив *х2 = у,* придем к квадратному уравнению *ау2 + ву + с = 0*

**Пример:** Решить уравнение:

**Решение:** Положив х2 = у, получим квадратное уравнение у2 + 4у –21 = 0, откуда находим у1 = -7, у2 = 3. Теперь задача сводится к решению уравнений х2 = -7, х2 = 3. Первое уравнение не имеет действительных корней, из второго находим: х1 = ; х2 = -., которые являются корнями заданного биквадратного уравнения.

**Задания для самостоятельного решения:**

х4 - 10х2 + 9 = 0 х4 - 13х2 + 36 = 0

36х4 - 25х2 + 4 = 0 2х4 - 19х2 + 9 = 0

х4 - 37х2 + 36 = 0 2х4 - 100х2 + 98 = 0

**Иррациональные уравнения и их решения**

Уравнения, в которых неизвестное х находится под знаком корня, называются иррациональными уравнениями.

Примеры иррациональных уравнений:

.

Чтобы решить иррациональное уравнение, нужно возвести обе части этого уравнения в квадрат, т.е. избавиться от корней и в результате обязательно сделать проверку, т.к. в уравнении могут быть посторонние корни.

Иррациональные уравнения часто получаются при решении различных задач.

**Пример:** Найти точки пересечения графиков функций

**Решение:** Если (х; у) – точка пересечения данных графиков, то

Следовательно, для нахождения абсцисс точек пересечения нужно решить уравнение . Возводя обе части уравнения в квадрат, получаем откуда . Корни этого квадратного уравнения Проверка показывает, что оба эти корня являются также и корнями уравнения.

Теперь находим ординаты точек пересечения данных графиков:

. Итак, данные графики пересекаются в двух точках (1; 3) и (4; 6). (См. рис. 4)

у

6 у =

3

у = х + 2

-2 0 1 4 х

Рисунок 4.

При возведении обеих частей уравнения в квадрат получается уравнение, являющееся следствием данного.

**Пример: Решение:** Возводя обе части в квадрат, получаем:

Откуда

, возведем обе части в квадрат: 7х + 6 = 36, или

, .

Проверка показывает, что – посторонний корень.

Ответ: х .

**Пример:**

**Решение:** Возведем обе части уравнения в четвертую степень: , откуда

Решим это биквадратное уравнение:

Уравнение имеет два корня: ,

Уравнение не имеет действительных корней.

**Задания для самостоятельного решения:**

Решить уравнения:

1. ; 7. ;
2. ; 8. ;
3. ; 9. ;
4. ; 10. ;
5. ; 11. ;
6. ; 12. .

**Решение квадратных, биквадратных и иррациональных уравнений**

Решить квадратные уравнения:

Решить квадратные уравнения:

1. 11. ;
2. ; 12. ;
3. ; 13. ;
4. ; 14. ;
5. −2; 15. ;
6. ; 16. ;
7. ; 17. ;
8. ; 18. ;
9. ; 19. ;
10. ; 20. .

Решить уравнения:

1. ; 2. ; 3. .

Решить биквадратное уравнение:

а)

б)

в)

г)

д)

Решить иррациональные уравнения:

1. ; 11. ;
2. ; 12. ;
3. ; 13. ;
4. ; 14. ;
5. ; 15. ;
6. 16. ;
7. ; 17. ;
8. ; 18. ;
9. ; 19. ;
10. ; 20. .

**Квадратные неравенства**

Неравенства вида .

Рассмотрим несколько случаев при решении квадратных неравенств:

1. *.* В этом случае парабола, изображающая график трехчлена целиком лежит над осью абсцисс, если a > 0, или целиком лежит под осью абсцисс, если a < 0. При a > 0 неравенство > 0 ( 0) имеет своим решением любое действительное значение х, а неравенство 0 (0) решений не имеет.

При a < 0 неравенство > 0 ( 0) не имеет решений, а неравенство 0 (0) имеет решениями всю действительную ось.

1. . В этом случае парабола расположена тоже по одну сторону от оси абсцисс, но касается ее в одной точке с абсциссой . Поэтому при a > 0 неравенство > 0 (строгое) будут все числа за исключением . Неравенство

0 имеет своим решением любое действительное значение х. Неравенство 0 имеет единственное решение х = Строгое же неравенство

0 решений не имеет. Аналогичные изменения по сравнению с первым случаем нужно сделать и при a < 0.

1. . В этом случае трехчлен имеет два действительных корня и его график два раза переходит с одной стороны на х = х1 и

х = х2.

Пусть х1 < х2 . Если a > 0, то трехчлен будет принимать положительные значения на интервалах и отрицательные на интервале .

При a < 0 трехчлен на интервале положителен и отрицателен на интервалах .

**Пример:** Решить неравенство .

**Решение.** После раскрытия скобок и перенесения всех членов в левую часть получим равносильное неравенство . Корнями являются числа . Коэффициент при х2 положителен. Поэтому решениями неравенства являются числа, принадлежащие объединению двух интервалов .

**Метод интервалов**

Метод интервалов заключается в следующем: на оси ОХ отмечают точки х1, х2, х3, если , которые делят ось на четыре интервала: . Над интервалом ставят знак «плюс», над интервалом знак «минус», над интервалом - знак «плюс», над интервалом знак «минус». (См. рис. 5)

- + - +

х1 х2  х3  х

Рисунок 5.

**Пример**: Решить неравенство .

**Решение:** Отметим на оси ОХ точки 1, 2, 3. Над интервалами справа налево поочередно расставим знаки «плюс» и «минус». (См. рис. 6), начиная с «плюса».

- + - +

1 2 3 х

Рисунок 6.

**Пример:** Решить неравенство: .

**Решение:**  Решим уравнение

Оно имеет единственный корень. Теперь решим неравенство

Нет ни одного действительного числа х, удовлетворяющего этому неравенству (квадрат любого действительного числа не может быть отрицательным). Поэтому данное неравенство не имеет решений.

**Задания для самостоятельного решения:**

Решите неравенство:

1. ; 6. ;
2. ; 7. ;
3. ; 8. ;
4. ; 9. ;
5. ; 10. .

**Решение квадратных и дробно – рациональных неравенств методом интервалов.**

Решить неравенства:

1. ; 5. ;
2. ; 6. ;
3. ; 7. ;
4. ; 8. .

Решите неравенства:

1. ; 11. ;
2. ; 12. ;
3. ; 13. ;
4. ; 14. ;
5. ; 15. ;
6. ; 16. ;
7. ; 17. ;
8. ; 18. ;
9. ; 19. ;
10. ; 20. .

**Элементарные функции и их графики**

1. **Функция y = kx, ее свойства и график**

Функция, заданная формулой называется прямой пропорциональностью, где 0 – коэффициент пропорциональности.

**Свойства функции y = kx.**

1. Область определения функции D – множество всех действительных чисел;

1. **y = kx –** нечетная функция f(-x) = - f(x);
2. при k > 0 – функция возрастает;

при k < 0 – функция убывает.

1. Графиком прямой пропорциональности является прямая, проходящая через начало координат. (См. рис. 7)

y y

y = kx (k > 0) y = kx (k < 0)

0 x 0 x

Рисунок 7

**Пример:** Построить график у = 2х:

**Решение:** Найдем координаты двух точек: при х = 1, у = 2; при х = 0 у = 0

|  |  |
| --- | --- |
| х | у |
| 1 | 2 |
| 0 | 0 |

2

0 1

у = 2х

Рисунок 8.

При каком значении х, у будет равен -3?

Решение: -3 = 2х, х = -3/2 = - 1,5.

**2. Функция у = kx + b, ее свойство и график**

Функция у = kx + b называется **линейной** функцией, где k и b - действительные числа.

**Свойства линейной функции при k 0 и b 0**

1. ООФ D – множество всех действительных чисел;
2. y = kx + b - не является ни четна, ни нечетна;
3. при k > 0 – функция возрастает;

при k < 0 – функция убывает.

1. Графиком линейной функции является прямая (См. рис. 9).

у

y = kx + b

0 х

K - угловой коэффициент

Рисунок 9. k =

**Пример:** Построить график функции у = х/2 + 4

Построим таблицу

|  |  |
| --- | --- |
| х | у |
| 0 | 4 |
| 4 | 6 |

У = х/2 + 4

6

4

0 4

Рисунок 10.

**Пример**: Построить графики функций Y1 = 2x + 1 Y2 = - 1/2x – 1

Обе функции являются линейными.

1. Область определения функций- множество всех действительных чисел.

2. Область допустимых значений- множество всех действительных чисел.

3. Функции ни четные, ни нечетные.

4. Графиком функций является прямая линия, которая может быть построена по двум точкам с координатами (o ; b) и ( - b/k ; o). (См. рис. 11)

k – угловой коэффициент.

Y

α

X k = tg α

Рисунок 11.

Если k > 0, то α - острый угол, k < 0, то α - тупой угол.

точки пересечения с осями координат

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x | 0 | -1/2 |
| y | 1 | 0 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x | 0 | -2 |
| y | -1 | 0 |

**3. Функция у = k/x, ее свойства и график**

Функция у = k/x называется **обратной пропорциональностью**, где k 0. Число k называется коэффициентом обратной пропорциональности.

**Свойства функции у = k/x**

1. ООФ D – множество всех действительных чисел, кроме нуля;
2. у = k/x нечетная, поскольку f (- x) = - k/x = - f (x);
3. Если k > 0, то функция убывает от (0; + ) и (-; 0); если k < 0, то функция возрастает на промежутке (-; 0) и (0; + );
4. Графиком обратной пропорциональности является **гипербола**. (См. рис. 12)

Построим график функции у = 1/х. Сначала построим ветвь от (0; + );

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х | 1/4 | 1/2 | 1 | 2 | 4 |
| у | 4 | 2 | 1 | 1/2 | 1/4 |

у

1

1

0 х

Рисунок 12.

Построить график функции у = 2/х.

**4. Функция у = *ах2 + bx + c,* ее свойства и график**

Функция у = *ах2 + bx + c* называется **квадратичной** функцией, где a.b.c – любые действительные числа, а 0. Графиком функции является **парабола**.

***Способы построения графика функции:***

1. Нахождение координат вершины по формулам:

.

**Пример:** Построить график функции у = 2х2 – 4х + 1:

a = 2, b = -4, c = 1

Итак, (1; -1) – вершина параболы

Для построения графика надо знать координаты еще нескольких точек:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| х | 0 | 2 | 3 |
| у | 1 | 1 | 7 |

у 7

1

0 1 2 х

Рисунок 13.

1. **Построение параболы по точкам с ординатой, равной свободному члену квадратного трехчлена ax2+ bx + c**

**Пример:** Построить график функции у = х2- 4х + 5:

**Построение:**

Найдем точки графика, имеющие ординату, равную свободному члену, т.е. 5.

Для этого нужно решить уравнение:

х2 – 4х + 5 = 5

х2 – 4х = 0

х (х – 4) = 0

х1 = 0 х2 = 4

Итак, мы нашли две точки (0; 5), (4; 5)

Отметим их на координатной плоскости.

Мы знаем, что графиком является парабола. Значит точки А и В чимметричны относительно оси симметрии параболы (ось симметрии АВ). Т.к. х = 0, то уравнение оси параболы х = 2.

Подставим х = 2 в формулу у = х2 – 4х + 5.

Получим у = 1,

следовательно С = (2; 1) - вершина параболы. (См. рис. 14)

у

5

1

Рисунок 14. 0 2 4 х

1. **Построение параболы по корням квадратного трехчлена**

Пусть х1 и х2 – корни квадратного трехчлена *ах2 + bx + c.* Тогда парабола, служащая графиком функции у = *ах2 + bx + c* пересекает ось абсцисс в точке А (х1; 0) и В (х2; 0).

х0= - вершина параболы. Найдем у0. Строим параболу.

**Пример:** Построить график функции у = -х2 +6х – 5:

Из уравнения найдем: -х2 +6х – 5 = 0 х1 = 1; х2= 5.

Х0 = ; у0= -32 + 63 – 5 = 4, т.е. А (1; 0), В (5; 0), С (3; 4) – вершина параболы (См.рис. 15).

По найденным точкам строим график:

у

4

0

1 3 5 х

Рисунок 15.

**Задания для самостоятельного решения:**

Построить график у = -х2 + 4. Проходит ли график через точку В(-9; 85).

Построить график у = -х2 + 4х + 5. При каких значениях х, функция положительна.

Построить график функции у = х2 – 4. При каких значениях х функция принимает положительные значения?

Построить графики функций: у = х2 – 4 и у = -х2 + 2. Указать координаты точек пересечения.

Построить график функции у = х2 – 2х – 3 и укажите промежуток, на котором функция возрастает.

Построить график функции: у = -2/х.

Построить график функции у = 3х2 + 8х – 3.

Построить график функции у = - 2х + 6. Проходит ли график через точку А (- 35; 76)?

**Построение и описание графиков элементарных функций**

Постройте графики функций:

1. у = -2х + 6; Проходит ли график через точу А(- 35; 76)?
2. у = 2х - 4; Проходит ли график через точу В(- 45; - 86)?
3. у = 2х - 5; Проходит ли график через точу А(- 35; - 65)?
4. у = -2х + 6; Проходит ли график через точу А(- 35; 76)?
5. у = 2х + 5; Проходит ли график через точу В(23; 51)?
6. у = 1,5х; Является ли эта функция возрастающей или убывающей?
7. у = -2,5х; Является ли эта функция возрастающей или убывающей?
8. у = х + 3; Является ли эта функция возрастающей или убывающей?
9. у = х - 4; Является ли эта функция возрастающей или убывающей?
10. у = 2х - 3; При каком значении х значение у равно – 5?
11. у = - 2х + 3; При каком значении х значение у равно – 3?
12. у = 2х - 1; Проходит ли график через точу В(- 25; - 51)?
13. у = 2х +3; Проходит ли график через точу В(20; - 37)?
14. у = + 4; При каких значениях х функция принимает отрицательные значения?
15. у = - 4; При каких значениях х функция принимает положительные значения?
16. у = + 1; При каких значениях х функция принимает положительные значения?
17. у = - 1; При каких значениях х функция принимает отрицательные значения?

**Решение уравнений и систем графическим методом**

Пусть дана система уравнений:

Рассмотрим первое уравнение. Геометрической иллюстрацией этого уравнения служит его график на координатной плоскости. Для построения графика выразим из этого уравнения у через х: у = х + 1. х = 0, у = 1; х = 2, у = 3.

у

2 х

0 1 2

Рисунок 16.

Из второго уравнения: 2х + у = 4, у = 4 – 2х, х = 0, у = 4; х = 2, у = 0.

Точка пересечения двух построенных прямых – это и есть решение системы (См. рис. 16).

Ответ: х = 1, у = 2.

**Задания для самостоятельного решения:**

Решить графически системы:

1. ; 8. ;

1. ; 9. ;
2. ; 10. ;
3. ; 11. ;
4. ; 12. .
5. ; 13. ;
6. ; 14. .

**Геометрические преобразования графиков функций**

Рассмотрим какую-нибудь элементарную функцию, например, http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image002.gif.  Подавляющему большинству читателей не составит труда построить кубическую параболу, но что делать, если требуется начертить график функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image004.gif или http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image006.gif?  Интуиция подсказывает, что совершенно не нужно тратить уйму времени и проводить [полное исследование функции](http://mathprofi.ru/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika.html), достаточно выполнить некоторые **геометрические преобразования** кубической параболы http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image002_0000.gif. График функции можно сжимать/растягивать, сдвигать вдоль осей, симметрично отображать. То есть, несколько действий, и кривые http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image008.gif готовы!

**Зачем это нужно?** Вы скажете, что можно применить метод поточечного построения, о котором я так много говорил в методичке[о графиках функций](http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html). Вот взять ту же функцию http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image006_0000.gif и построить её по точкам! Да, способ рабочий. Однако знания геометрических преобразований позволят вам быстро понять, как расположен график, а в несложных случаях вроде http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image004_0000.gif практически мгновенно его нарисовать! Навыки грамотно разбираться с чертежами потребуются в различных задачах высшей математики, например, при [исследовании функции на непрерывность](http://mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html), [нахождении площади фигуры](http://mathprofi.ru/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala.html), [объема тела вращения](http://mathprofi.ru/obyem_tela_vrashenija.html), в ходе вычисления [двойных интегралов](http://mathprofi.ru/dvoinye_integraly_dlya_chainikov.html) и т.д.

Кроме того, поточечное построение бывает не всегда удобным, так, значения периодической функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image012.gif можно находить до бесконечности.

Иногда на практике задание встречается отдельно, примерная формулировка такова: «построить график функции, используя преобразования графиков элементарных функций». Дана, скажем, функция http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image014.gif. Задача состоит в том, чтобы с помощью геометрических преобразований ветки логарифма http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image016.gif получить график функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image014_0000.gif.

Перед тем как перейти непосредственно к примерам напомню некоторые теоретические моменты. В начале статьи [о дифференцировании неявной функции](http://mathprofi.ru/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii.html) я сформулировал определение функции одной переменной http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image019.gif. Актуализирую два особо нужных сейчас термина: «икс» – независимая переменная или АРГУМЕНТ, «игрек» – зависимая переменная или ФУНКЦИЯ. При этом функцию можно обозначать как через «игрек», так равноценно и через «эф от икс», например:  
http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image021.gif

## ****Сжатие (растяжение) графика к (от) оси ординат.**** ****Симметричное отображение графика относительно оси**** http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025.gif

Первая группа действий связана с умножением АРГУМЕНТА функции на число. Для удобства я разобью правило на несколько пунктов:

### ****Сжатие графика функции к оси ординат****

Это случай когда АРГУМЕНТ функции умножен на число, большее единицы.

**Правило**: чтобы построить график функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image027.gif, где http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image029.gif, нужно график функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0000.gif **сжать к оси** http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0000.gif в http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image031.gif раз.

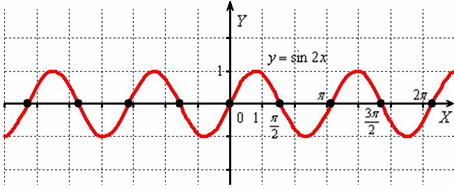
**Пример**:

Построить график функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image012_0000.gif.

Сначала изобразим график синуса, его период равен http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image034.gif:  

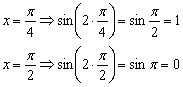

Рисунок 17.

К слову, чертить графики тригонометрических функций вручную – занятие кропотливое, поскольку http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image038.gif и т.д., то есть на стандартной клетчатой бумаге аккуратным нужно быть вплоть до миллиметра, даже до полумиллиметра.

Теперь возьмём синусоиду и сожмём её **к оси** http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0001.gif в 2 раза:  
  
 Рисунок 18.

То есть, график функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image012_0001.gif получается путём сжатия графика http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image042.gif к оси ординат в два раза. Логично, что период итоговой функции тоже уполовинился: http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image044.gif

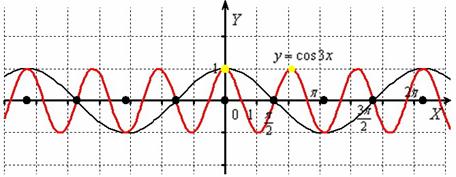
В целях самоконтроля можно взять 2-3 значения «икс» и устно либо на черновике выполнить подстановку:

  
Смотрим на чертёж, и видим, что это действительно так.

**Аналогичную блиц-проверку полезно осуществлять в любом другом примере!** Более того, она лучше поможет усвоить суть того или иного преобразования.

**Пример:**

Построить график функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image048.gif

«Чёрная гармошка» http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image050.gif сжимается **к оси** http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0002.gif в 3 раза:  
  
 Рисунок 19.

Итоговый график http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image048_0000.gif проведён красным цветом.  
Исходный период http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image034_0000.gif косинуса закономерно уменьшается в три раза: http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image056.gif

### ****Растяжение графика функции от оси ординат****

Это противоположное действие, теперь график функции не сжимается, а растягивается.  
Случай имеет место, когда АРГУМЕНТ функции умножается на число http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image058.gif.

**Правило**: чтобы построить график функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image027_0000.gif, где http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image058_0000.gif, нужно график функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0001.gif **растянуть от оси** http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0003.gif в http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image062.gif раз.

**Пример:**

Построить график функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image064.gif

Для начала построим график функции ^

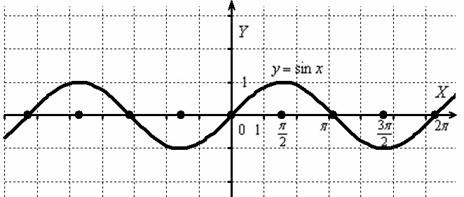


Рисунок 20.

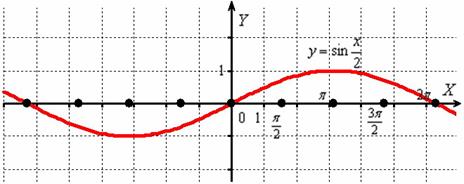
И растягиваем его **от оси** http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0004.gif в 2 раза:  


Рисунок 21

То есть, график функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image064_0000.gif получается путём **растяжения** графика http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image042_0000.gif **от оси ординат** в два раза. Период итоговой функции увеличивается в 2 раза: http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image069.gif, он толком даже не вместился на данный чертёж.

Операции сжатия/растяжения графиков, разумеется, выполнимы не только для тригонометрических функций:

**Пример:**

Построить графики функций http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image071.gif

График функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image073.gif получается путём сжатия графика экспоненты http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image075.gif **к оси** http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0005.gif в два раза. А график http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image078.gif – путём растяжения графика экспоненты http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image075_0000.gif **от оси** http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0006.gif в два раза:

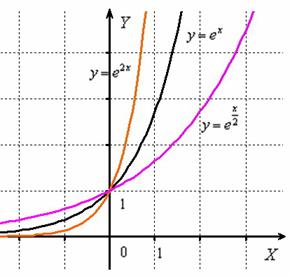


Рисунок 22

Продолжаем систематизировать  умножение аргумента функции на число: http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image027_0001.gif  
Мы рассмотрели два случая – сжатие (http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image029_0000.gif) и растяжение (http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image058_0001.gif).

Очевидно, что нет практического смысла рассматривать значения http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image085.gif. Есть более интересный вопрос: что происходит, когда аргумент умножается на отрицательное число? Ответ будет получен чуть позже, а пока рассмотрим распространённый частный случай, когда http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image087.gif:

### ****Симметричное отображение графика функции относительно оси ординат****

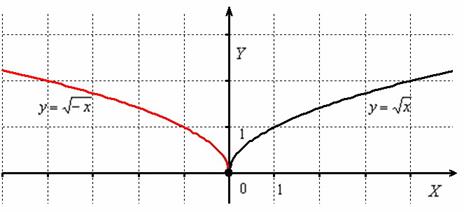
АРГУМЕНТ функции меняет знак.

**Правило**: чтобы построить график функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image089.gif, нужно график http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0002.gif отобразить симметрично относительно оси http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0007.gif.

**Пример:**

Построить график функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image094.gif

График функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image094_0000.gif получается путём симметричного отображения графика http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image097.gif относительно оси ординат:

  
 Рисунок 23.

Если при умножении аргумента на число http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image027_0002.gif значение параметра http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image031_0000.gif отрицательно и не равно минус единице, то построение выполняется в два шага. Например: http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image102.gif. На первом шаге выполняем сжатие графика http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0003.gif к оси ординат в 2 раза: http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image105.gif. На втором шаге график http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image105_0000.gif отображаем симметрично относительно оси ординат: http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image102_0000.gif. Конкретный пример обязательно рассмотрим ниже.

А следующий параграф посвящается одному интересному человеку из дворовой компании моего далёкого детства. Он вытягивал руки в стороны, открывал рот и прыгал влево/вправо по проезжей части. Водители крутили виском у пальца, сигналили, но догнать его так никто и не смог.

## ****Сдвиг графика влево/вправо вдоль оси абсцисс****

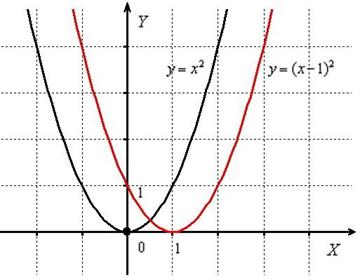
Если к АРГУМЕНТУ функции  добавляется константа, то происходит сдвиг (параллельный перенос) графика вдоль оси http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image109.gif. Рассмотрим функцию http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0004.gif и положительное число http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image112.gif:

**Правила**:   
1) чтобы построить график функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image114.gif, нужно график http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0005.gif сдвинуть **ВДОЛЬ** оси http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image109_0000.gif на http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image112_0000.gif единиц **влево**;

2) чтобы построить график функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image117.gif, нужно график http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0006.gif сдвинуть **ВДОЛЬ** оси http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image109_0001.gif на http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image112_0001.gif единиц **вправо**.

**Пример:**

Построить график функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image120.gif

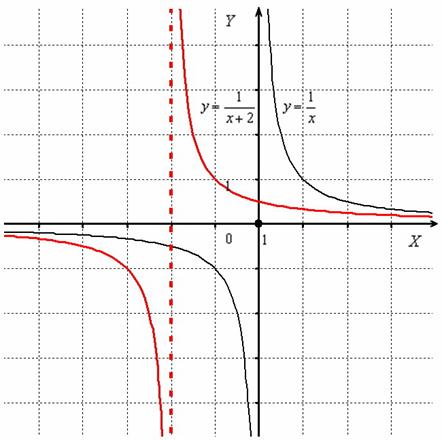
Берём параболу http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image122.gif и сдвигаем её вдоль оси абсцисс на 1 единицу **вправо**:  
  
 Рисунок 24.

«Опознавательным маячком» служит значение http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image126.gif, именно здесь находится вершина параболы http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image120_0000.gif.

Теперь ни у кого не возникнет трудностей с построением графика http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image004_0001.gif (демонстрационный пример начала урока) – кубическую параболу http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image002_0001.gif нужно сдвинуть на 2 единицы влево.

Вот ещё один характерный случай:

**Пример:** Построить график функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image128.gif

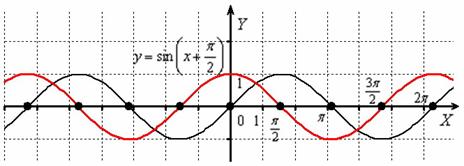
Гиперболу http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image130.gif (чёрный цвет) сдвинем вдоль оси http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image109_0002.gif на 2 единицы **влево**:  
  
 Рисунок 25.

Перемещение гиперболы «выдаёт» значение, которое не входит в [область определения функции](http://mathprofi.ru/oblast_opredeleniya.html). В данном примере http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image135.gif, и[уравнение прямой](http://mathprofi.ru/uravnenie_pryamoi_na_ploskosti.html) http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image137.gif  задаёт [вертикальную асимптоту](http://mathprofi.ru/asimptoty_grafika_funkcii.html)(красный пунктир) графика функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image128_0000.gif (красная сплошная линия). Таким образом, при параллельном переносе асимптота графика тоже сдвигается (что очевидно).

Вернёмся к тригонометрическим функциям:

**Пример:**

Построить график функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image139.gif

График синуса http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image042_0001.gif (чёрный цвет) сдвинем вдоль оси http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image109_0003.gif на http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image142.gif **влево**:  
  
 Рисунок 26.

Внимательно присмотримся к полученному красному графику http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image146.gif…. Это в точности график косинуса http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image050_0000.gif! По сути, мы получили геометрическую иллюстрацию [формулы приведения](http://mathprofi.ru/trigonometricheskie_tablicy.pdf) http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image149.gif, и перед вами, пожалуй, самая «знаменитая» формула, связывающая данные тригонометрические функции.  График  функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image050_0001.gif получается путём сдвига синусоиды http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image042_0002.gif вдоль оси http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image109_0004.gif на http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image142_0000.gif единиц влево. Аналогично можно убедиться в справедливости любой другой [формулы приведения](http://mathprofi.ru/trigonometricheskie_tablicy.pdf).

Рассмотрим композиционное правило, когда аргумент представляет собой линейную функцию: http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image151.gif, при этом параметр «ка» **не равен** нулю или единице, параметр «бэ» – **не равен** нулю. Как построить график такой функции? Из школьного курса мы знаем, что умножение имеет приоритет перед сложением, поэтому, казалось бы, сначала график сжимаем/растягиваем/отображаем в зависимости от значения http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image031_0001.gif, а потом сдвигаем на http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image112_0002.gif единиц. Но здесь есть подводный камень, и корректный алгоритм таков:

Аргумент функции необходимо представить в виде http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image155.gif и последовательно выполнить следующие преобразования:

1) График функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0007.gif сжимаем (или растягиваем) к оси (от оси) ординат:http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image027_0003.gif (если http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image159.gif, то график дополнительно следует отобразить симметрично относительно оси http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0008.gif).

2) График полученной функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image027_0004.gif сдвигаем влево (или вправо) вдоль оси  абсцисс **на** http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image163.gif**(!!!) единиц**, в результате чего будет построен искомый график http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image165.gif.

**Пример:** Построить график функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image167.gif

Представим функцию в виде http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image169.gif и выполним следующие преобразования: синусоиду http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image171.gif (чёрный цвет):

1) сожмём **к оси** http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0009.gif в два раза:http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image012_0002.gif (синий цвет);  
 2) сдвинем вдоль оси http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image109_0005.gif **на http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image175.gif (!!!) влево**: http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image167_0000.gif (красный цвет):

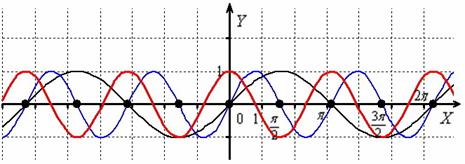


Рисунок 27.

Нужно обратить внимание на то, что график функции сдвигается на http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image175_0000.gif, а вовсе не на http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image142_0001.gif.

Построить график функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image182.gif

Представим функцию в виде http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image184.gif. В данном случае: http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image186.gif Построение проведём в три шага. График натурального логарифма http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image188.gif:

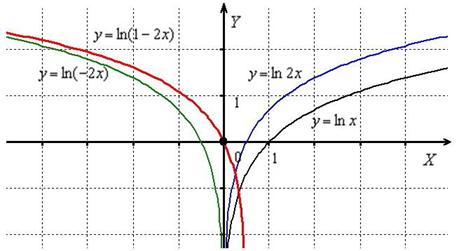
1) сожмём **к оси** http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0010.gif в 2 раза: http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image190.gif;  
2) **отобразим симметрично** относительно оси http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0011.gif: http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image192.gif;  
3) сдвинем вдоль оси http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image109_0006.gif **на http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image194.gif (!!!) вправо**: http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image196.gif:  


Рисунок 28.

Для самоконтроля в итоговую функцию http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image182_0000.gif можно подставить пару значений «икс», например, http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image200.gif и свериться с полученным графиком.

В рассмотренных параграфах события происходили «горизонтально» – гармонь играет, ноги пляшут влево/вправо. Но похожие преобразования происходят и в «вертикальном» направлении – вдоль оси http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0012.gif. Принципиальное отличие состоит в том, что связаны они не с АРГУМЕНТОМ, а с САМОЙ ФУНКЦИЕЙ.

## ****Растяжение (сжатие) графика ВДОЛЬ оси ординат.**** ****Симметричное отображение графика относительно оси абсцисс****

Структура второй части статьи будет очень похожа.

1) Если ФУНКЦИЯ http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0008.gif умножается на число http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image204.gif, то происходит **растяжение её графика вдоль оси ординат**.

**Правило**: чтобы построить график функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image206.gif, где http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image204_0000.gif, нужно график функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0009.gif **растянуть вдоль оси** http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0013.gif в http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image209.gif раз.

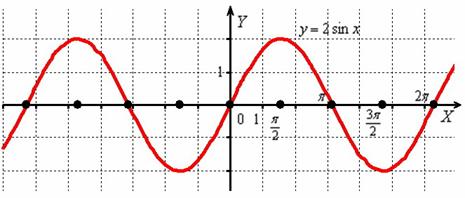
2) Если ФУНКЦИЯ умножается на число http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image211.gif, то происходит **сжатие её графика вдоль оси ординат**.

**Правило**: чтобы построить график функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image206_0000.gif, где http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image211_0000.gif, нужно график функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0010.gif **сжать вдоль оси** http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0014.gif в http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image215.gif  раз.

Построить графики функций http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image217.gif.

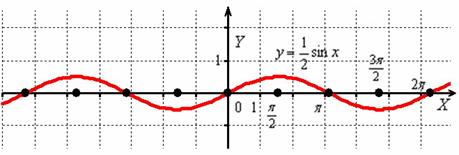
Берём синусоиду и **вытягиваем** её **вдоль оси** http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0015.gif  в 2 раза:

  
 Рисунок 29.

  
 Рисунок 30.

Период функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image221.gif не изменился и составляет http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image034_0001.gif, а вот значения (все, кроме нулевых) увеличились по модулю в два раза, что логично – ведь функция умножается на 2, и область её значений удваивается: http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image224.gif.

Теперь **сожмём** синусоиду **вдоль оси** http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0016.gif  в 2 раза:

  
 Рисунок 31.

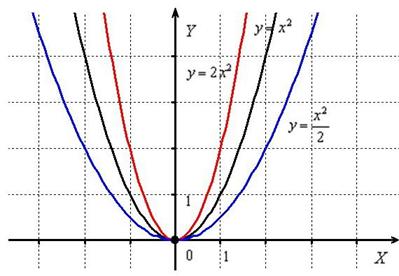
Аналогично, период http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image034_0002.gif не изменился, но область значений функции «сплющилась» в два раза: http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image228.gif.

Нет, у меня нет какого-то пристрастного отношения к синусоиде, просто я хотел продемонстрировать, чем отличаются графики функций http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image230.gif (Примеры №№1,3) от только что построенных собратьев http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image217_0000.gif. Постарайтесь ещё раз проанализировать и качественнее понять эти элементарные случаи.  Даже минимальные знания о преобразованиях графиков окажут вам неоценимую помощь в ходе решения других задач высшей математики!

И, конечно же, классический пример растяжения/сжатия параболы:

**Пример:**

Построить графики функций http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image232.gif.

Возьмём рога молодого оленя http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image234.gif и **вытянем** их вверх **вдоль оси** http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0017.gif в два раза: http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image236.gif. Затем **сожмём** http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image234_0000.gif **вдоль оси ординат** в 2 раза: http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image238.gif  
  
Рисунок 32.

И снова заметьте, что значения функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image236_0000.gif увеличиваются в 2 раза, а значения

http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image243.gif уменьшаются во столько же раз (исключение составляет точка http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image245.gif).

Отпустим в тундру удивлённое животное и продолжим изучать умножение функции на число: http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image206_0001.gif. Случаи http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image247.gif не представляют интереса, поэтому рассмотрим отрицательные коэффициенты. Сначала распространённый частный случай http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image249.gif:

Если ФУНКЦИЯ меняет знакна противоположный, то её **график отображается симметрично относительно оси абсцисс**.

**Правило**: чтобы построить график функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image251.gif, нужно график http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0011.gif отобразить симметрично относительно оси http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image109_0007.gif.

**Пример:**

Построить график функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image254.gif

Отобразим синусоиду симметрично относительно оси http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image109_0008.gif:

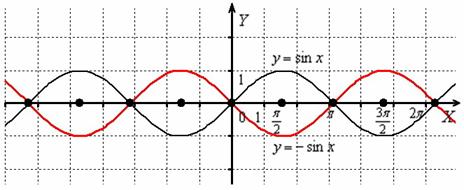


Рисунок 33.

Ещё более наглядно симметрия просматривается у следующей типовой функции:

**Пример:**

Построить график функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image259.gif

График функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image259_0000.gif получается путём **симметричного отображения** графика http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image097_0000.gif **относительно оси абсцисс**:

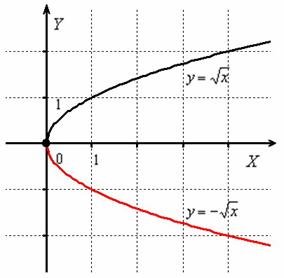


Рисунок 34.

Функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image265.gif задают две ветви [параболы, которая «лежит на боку»](http://mathprofi.ru/giperbola_i_parabola.html). Обратная функция http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image267.gif задаёт параболу целиком. С подобными графиками часто приходится иметь дело при нахождении [площадей фигур](http://mathprofi.ru/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala.html), построении областей интегрирования [двойных интегралов](http://mathprofi.ru/dvoinye_integraly_dlya_chainikov.html) и в некоторых других задачах.

При умножении функции на отрицательное число http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image206_0002.gif, http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image270.gif, построение графика следует выполнить в два этапа: сжатие (или растяжение) вдоль оси ординат, а потом – симметричное отображение относительно оси абсцисс. Конкретные примеры увидим в следующем топике.

## ****Сдвиг графика вверх/вниз вдоль оси ординат****

Настала пора дать передышку ногам и сесть в лифт.

Если к ФУНКЦИИ  добавляется константа, то происходит сдвиг (параллельный перенос) её графика вдоль оси http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image002_0002.gif. Рассмотрим функцию http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image004_0002.gif и положительное число http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image006_0001.gif:

**Правила**:   
 1) чтобы построить график функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image008_0000.gif, нужно график http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image004_0003.gif сдвинуть **ВДОЛЬ** оси http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image002_0003.gif на http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image006_0002.gif единиц **вверх**;

2) чтобы построить график функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image012_0003.gif, нужно график http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image004_0004.gif сдвинуть **ВДОЛЬ** оси http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image002_0004.gif на http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image006_0003.gif единиц **вниз**.

**Пример:**

Построить графики функций http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image015.gif.

В комментариях, думаю, нет особой необходимости:

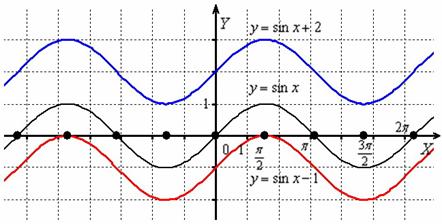


Рисунок 35

Комбинационное построение графика http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image019_0000.gif в общем случае осуществляется очевидным образом:

1) График функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image004_0005.gif растягиваем (сжимаем) вдоль оси http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image002_0005.gif. Если множитель отрицателен, дополнительно осуществляем симметричное отображение относительно оси http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0012.gif.

2) Полученный на первом шаге график http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0018.gif сдвигаем вверх или вниз в соответствии со значением константы http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image006_0004.gif.

**Пример:**

Построить график функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image028.gif

График косинуса http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image030.gif :

1) Растягиваем вдоль оси http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image002_0006.gif в 1,5  раза: http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image033.gif (синий цвет);  
 2) Сдвигаем вдоль оси http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image002_0007.gif на 2 единицы вниз: http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image028_0000.gif:

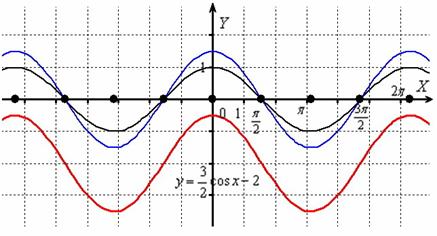


Рисунок 36.

**Пример:**

Построить график функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image038_0000.gif

Параболу http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image040.gif:

1. отобразим симметрично относительно оси абсцисс: http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image042_0003.gif;
2. сдвинем вдоль оси http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image002_0008.gif на 4 единицы вверх: http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image038_0001.gif:

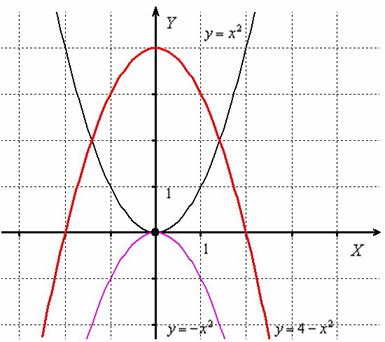


Рисунок 37.

Да, конечно, данную кривую легко построить и поточечно, но такие параболы очень часто встречаются в практических заданиях, поэтому весьма полезно сразу представлять, как они расположены.

Аналогичный трехходовой пример с растяжением и симметричным отображением графика относительно оси http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0013.gif:

**Пример:**

Построить график функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image048_0001.gif

График экспоненциальной функции http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image050_0002.gif:

1. растянем вдоль оси http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image002_0009.gif в 2  раза: http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image052.gif;
2. отобразим симметрично относительно оси абсцисс: http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image054.gif;
3. сдвинем вдоль оси http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image002_0010.gif на 1 единицу вверх: http://mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image048_0002.gif:

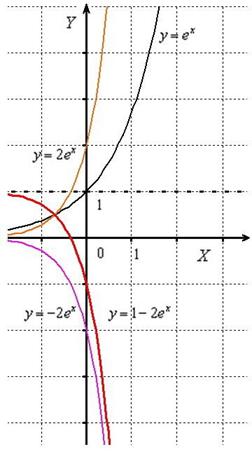


Рисунок 38.

Заметьте, что в результате последнего преобразования [горизонтальная асимптота](http://mathprofi.ru/asimptoty_grafika_funkcii.html) графика тоже «уехала» вверх на 1 единицу. Аналогичный факт мы уже наблюдали при сдвиге гиперболы.

## Степенная функция, ее свойства и графики

## Степенная функция с натуральным показателем. Функ­ция у = хn, где n — натуральное число, называется степен­ной функцией с натуральным показателем. При n = 1 получаем функцию у = х, ее свойства:

## Прямая пропорциональность. Прямой пропорциональ­ностью называется функция, заданная формулой у = kxn, где число k называется коэффициентом пропорциональ­ности.

## Перечислим свойства функции у = kx.

## Область определения функции — множество всех действительных чисел.

## y = kx — нечетная функция (f( — х) = k ( — х)= — kx = -k(х)).

## 3) При k > 0 функция возрастает, а при k < 0 убывает на всей числовой прямой.

## Гра­фик (прямая) изображен на рисунке 39.

## Рисунок 39.

## При n=2 получаем функцию y = х2, ее свойства:

## Функция у —х2. Перечислим свойства функции у = х2.

## Область определения функции — вся числовая прямая.

## у = х2— четная функция (f( — х) = ( — x)2 = x2 = f (х)).

## На промежутке [0; + οο) функция возрастает.

## В самом деле, если , то , а это и означает возрастание функции.

## 4) На промежутке (- ; 0] функция убывает.

## В самом доле, если ,то — х1 > — х2 > 0, а потому

## (-х1)2> (- х2)2, т. е. , а это и означает убывание функции.

## Графиком функции y=х2 является парабола. Этот график изображен на рисунке 40.

## Рисунок 40.

## При n = 3 полу­чаем функцию у = х3, ее свойства:

## Область определения функции — вся числовая прямая.

## y = х3 — нечетная функция (f (- х) = (- x)2 = - х3 = - f (x)).

## 3) Функция y = x3 возрастает на всей числовой прямой. График функции y = x3 изображен на рисунке. Он на­зывается кубической параболой.

## График (кубическая парабола) изображен на рисунке 41.

## Рисунок 41.

## Пусть n— произвольное четное натуральное число, большее двух:

## n = 4, 6, 8,... . В этом случае функция у = хn обладает теми же свойствами, что и функция у = х2. График такой функ­ции напоминает параболу у = х2, только ветви графика при |n| >1 тем круче идут вверх, чем больше n, а при тем «теснее прижимаются» к оси х, чем больше n.

## Пусть n — произвольное нечетное число, большее трех: n = = 5, 7, 9, ... . В этом случае функция у = хn обладает теми же свойствами, что и функция у = х3. График такой функции на­поминает кубическую параболу (только ветви графика тем круче идут вверх, вниз, чем больше n. Отметим также, что на промежутке (0; 1) график степенной функции у = хn тем медленнее отдаляется от оси х с ростом х, чем больше n.

**Степенная функция с целым отрицательным показа­телем.**

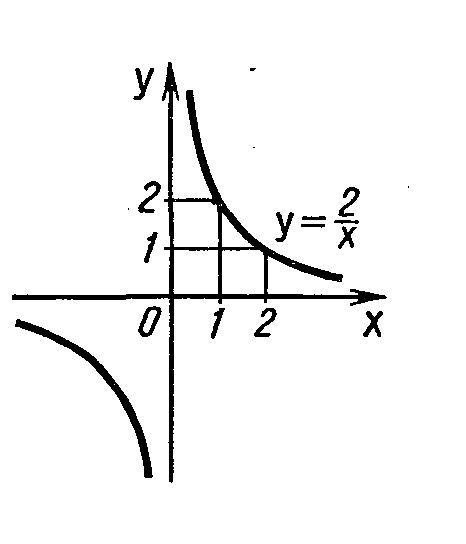


Рисунок 42.

## Рассмотрим функцию у = х-n, где n — натуральное чис­ло. При n = 1 получаем у = х-n или у = Свойства этой функции: График (гипербола) изоб­ражен на рисунке 42.

## Пусть n — нечетное число, большее единицы, n = 3, 5, 7, ... . В этом случае функция у = х-n обладает в основном теми же свойствами, что и функция у = График функции у = х-n (n = 3, 5, 7, ...) напоминает график функции у =. Пусть n — четное число, например п = 2. Перечислим не­которые свойства функции у = х-2, т. е. функции y = .

## Функция определена при всех х0.

## y = четная функция.

## y = убывает на (0; +оо) и возрастает на (—оо; 0).

## Теми же свойствами обладают любые функции вида y = х-n при четном n, большем двух.

## График функции у = изображен на рисунке. Ана­логичный вид имеет график функции , если n = 4, 6, ... .

## Функции вида , , обладают теми же свойствами, как и функция .

## Степенная функция с положительным дробным показа­телем.

## Рассмотрим функцию у = хr, где r — положительная несократимая дробь. Перечислим некоторые свойства этой функции.

## Область определения — луч [0; + оо).

## Функция ни четная, ни нечетная.

## Функция у = хr возрастает на [0; +оо).

## 

## Рисунок 43.

## На рисунке 43 изображен график функции Он заключен между графиками функций у = х2 и у = х3, заданных на промежутке [0; + оо).

## Подобный вид имеет график любой функции вида у = хr, где .

## На том же рисунке изображен график функции . Подоб­ный вид имеет график любой степенной функции у = хr, где .

## Степенная функция с отрицательным дробным пока­зателем.

## Рассмотрим функцию у = х-r, где r — положительная несократимая дробь. Перечислим свойства этой функции:

## Область определения — промежуток (0; + оо).

## Функция ни четная, ни нечетная.

## Функция у = х-r убывает на (0; +оо).

## Построим для примера график функции у — х таблицу значений функции:

## 

## Нанесем полученные точки на координатную плоскость и соединим их плавной кривой (См. рис. 44).

## Подобный вид имеет график любой функции

## у = хr, где r — отрицательная дробь.

## 

## Рисунок 44.

## Домашнее задание:

## 1. [3, стр. 231-266]; [4, №1067 б), г); №1068 б), г); №1069 б), г); №1070 б), г); №1071 б), г); №1072 б), г); №1073 б), г); №1257 б), г)].

## 2. Разработать реферат на тему «Степенная функция, ее свойства и графики».

**Показательная функция, ее свойства и график**

**Функцию вида y=ax**, где а>0, a≠1, х – любое число, называют **показательной функцией**.

*Свойства функции:*

1. **Область определения** показательной функции: D (y) = **R** –**множество всех действительных чисел**.
2. **Область значений** показательной функции: E (y) = **R+** - **множество всех положительных чисел**.
3. Показательная функция  **y=ax возрастает при a>1**.

Показательная функция **y=ax убывает при 0<a<1**.

**Примеры.**

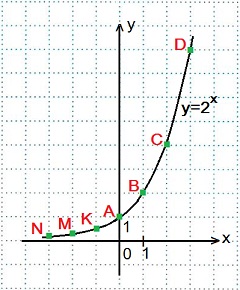
**[](http://www.mathematics-repetition.com/wp-content/uploads/2012/06/pokaz-f1.jpg)**

Рисунок 45.

**1) Построить график функции y=2x.**Найдем значения функции

при х=0, х=±1, х=±2, х=±3.

**x**=0, **y**=20=1;                   Точка **А.**

**x**=1, **y**=21=2;                   Точка **В.**

**x**=2, **y**=22=4;                   Точка **С.**

**x**=3,**y**=23=8;                   Точка **D.**

**x**=-1,**y**=2-1=1/2=0,5;       Точка **K.**

**x**=-2,**y**=2-2=1/4=0,25;     Точка **M.**

**x**=-3, **y**=2-3=1/8=0,125;   Точка **N.**

Большему  значению аргумента **х** соответствует и большее значение функции**у**. Функция **y=2x возрастает** на всей области определения **D (y)=R**, так как основание функции**2>1.**

**2) Построить график функции y=(1/2)x**. Найдем значения функции

при х=0, х=±1, х=±2, х=±3.

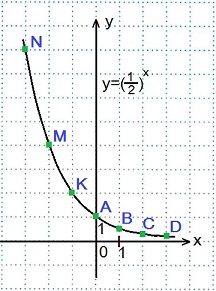
[](http://www.mathematics-repetition.com/wp-content/uploads/2012/06/pokaz-f11.jpg)

Рисунок 46.

x=0, y=(½)0=1;                  Точка **A.**

x=1, y=(½)1=½=0,5;          Точка **B.**

x=2, y=(½)2=¼=0,25;        Точка **C**.

x=3, y=(½)3=1/8=0,125;    Точка **D.**

x=-1, y=(½)-1=21=2;          Точка **K.**

x=-2, y=(½)-2=22=4;          Точка **M.**

x=-3, y=(½)-3=23=8;          Точка**N.**

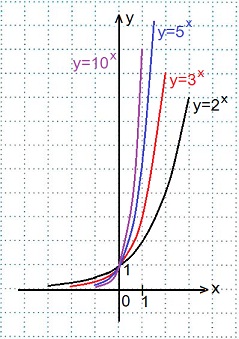
[](http://www.mathematics-repetition.com/wp-content/uploads/2012/06/pokaz-f2.jpg)

Рисунок 47.

Большему значению аргумента **х** соответствует меньшее значение функции **y**. Функция**y=(1/2)x**убывает на всей своей области определения: **D (y)=R**, так как основание функции **0<(1/2)<1**.

**3) В одной координатной плоскости построить графики функций:**

**y=2x**, **y=3x**,**y=5x**,**y=10x**.

Сделать выводы.

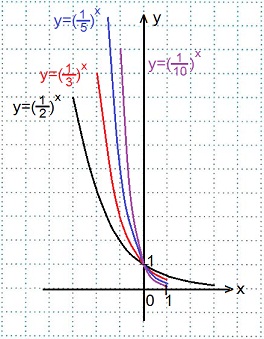
График функции **у=2х** мы уже строили, графики остальных функций строим аналогично, причем, достаточно будет найти значения функций при**х=0** и при **х=±1**.

Переменная **х** может принимать любое значение (**D (y)=R**), при этом значение **у** всегда будет больше нуля  (**E (y)=R+**).

Графики всех данных функций пересекают ось Оу в точке (0; 1), так как любое число в нулевой степени равно единице; с осью Ох графики не пересекаются, так как положительное число в любой степени не может быть равным нулю. Чем больше основание **а**(если a>1) показательной функции у=ах, тем ближе расположена кривая к оси Оу.

Все  данные функции являются возрастающими, так как большему значению аргумента соответствует и большее значение функции.

**4) В одной координатной плоскости построить графики функций:**

**[](http://www.mathematics-repetition.com/wp-content/uploads/2012/06/pokaz-f3.jpg)y=(1/2)x**, **y=(1/3)x**, **y=(1/5)x**, y=(1/10)x. Сделать выводы

.

Рисунок 48.

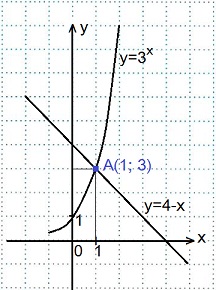
Смотрите построение графика функции **y=(1/2)x** выше, графики остальных функций строим аналогично, вычислив их значения при **х=0** и при **х=±1**.

Переменная **х** может принимать любое значение: **D (y)=R**, при этом область значений функции**:** **E (y)=R+**.

Графики всех данных функций пересекают ось Оу в точке (0; 1), так как любое число в нулевой степени равно единице; с осью Ох графики не пересекаются, так как положительное число в любой степени не может быть равным нулю.

Чем меньше основание **а** (при 0<a<1) показательной функции у=ах, тем ближе расположена кривая к оси Оу.

Все  эти функции являются убывающими, так как большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

**[](http://www.mathematics-repetition.com/wp-content/uploads/2012/06/pokaz-f4.jpg)Решить графически уравнения:**

**1) 3x = 4 - x.**

В одной координатной плоскости построим графики функций: у = 3х и у = 4 - х.

Графики пересеклись в точке А(1; 3).

 Ответ: 1.

**2) 0,5х = х + 3.**

В одной координатной плоскости строим графики функций: у=0,5х (y=(1/2)x ) и у=х+3.

Рисунок 49. Графики пересеклись в точке В(-1; 2).

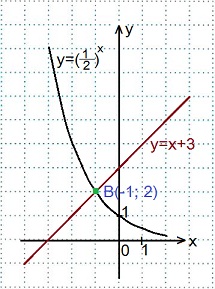
[](http://www.mathematics-repetition.com/wp-content/uploads/2012/06/pokaz-f5.jpg) Ответ: -1.

Рисунок 50.

**Найти область значений функции: 1) y=-2x; 2) y=(1/3)x+1; 3) y=3x+1-5.**

**Решение:**

**1) y=-2x**

Область значений показательной функции y=2x – все положительные числа, т.е.

0<2x<+∞. Значит, умножая каждую часть двойного неравенства на (-1), получаем:

— ∞<-2x<0.

Ответ: Е(у)=(-∞; 0).

**2) y=(1/3)x+1;**

0<(1/3)x<+∞, тогда, прибавляя ко всем частям двойного неравенства число **1**, получаем:

0+**1**<(1/3)x+**1**<+∞+**1**;

1<(1/3)x+1<+∞.

Ответ: Е(у)=(1; +∞).

**3) y=3x+1-5.**

Запишем функцию в виде: у=3х∙3-5.

0<3x<+∞;   умножаем все части двойного неравенства на **3**:

0∙**3**<3x∙**3**<(+∞)∙**3**;

0<3x∙3<+∞;  из всех частей двойного неравенства вычитаем **5:**

0**-5**<3x∙3**-5**<+∞**-5**;

— 5<3x∙3-5<+∞.

Ответ: Е(у)=(-5; +∞).

**Показательные уравнения**

***Показательными уравнениями*** называются такие уравнения, в которых неизвестное входит в показатель степени.

Решение показательных уравнений часто сводится к решению уравнения , где

Показательные уравнения решаются несколькими способами:

1. Сначала рассмотрим простейшие показательные уравнения, левую и правую части которых сразу можно привести к одному основанию. Степени с одинаковыми основаниями равны тогда и только тогда, когда равны их показатели.

**Примеры с подробными решениями:**

**Решить уравнения:**

1). 5х = 625

***Решение:***  Записав 625 в виде 54, получим 5х = 54, откуда х = 4.

2). 16х = 

***Решение:*** 24х = 2-2 4х = - 2 х =  ;

3). 

***Решение:***  .

4). (0,25)2 – х = 

***Решение:*** Приведем все степени к основанию 2:0,25 =  = 2- 2;

256 = 28. Значит (2- 2)2 – х = . Применяя правило деления степеней, имеем 2- х + 2х = 28 – х – 3 ; 2- 4 + 2х = 25 – х ; - 4 + 2х = 5 – х;

2х + х = 5 + 4

3х = 9

х = 3.

2. Следующий тип показательных уравнений решается вынесением множителя с наименьшим показателем степени за скобки:

**Примеры с подробными решениями:**

**Решить уравнения:**

1). 2 х + 2 х – 1 – 2 х – 3 = 44

***Решение:*** так как наименьшим показателем степени является х – 3, то вынесем 2 х – 3 за скобки:

2 х – 3 (23 + 22 – 1) = 44

2 х – 3 (8 + 4 – 1) = 44

2 х – 3 ∙ 11 = 44

Разделив обе части уравнения на 11, получим

2 х – 3 = 4

2 х – 3 = 22

х – 3 = 2

х = 5.

2). 7 х – 3 ∙ 7 х – 1 + 7 х + 1 = 371

***Решение:*** Наименьшим показателем степени является х – 1; поэтому вынесем за скобки 7 х – 1 :

7 х – 1 (71 – 3 ∙ 1 + 72) = 371

7 х – 1 (7 – 3 + 49) = 371

7 х – 1  ∙ 53 = 371

7 х – 1 = 7

х – 1 = 1

х = 2

3). Еще один тип показательных уравнений. Это – уравнение, которое с помощью подстановки ***а х = у*** сводится к квадратному уравнению.

**Примеры с подробными решениями:**

**Решить уравнения:**

1). 7 2х – 48 ∙ 7 х = 49

***Решение:*** Полагая 7 2х = у, получим квадратное уравнение:

у 2 – 48у – 49 = 0

Решим его.



так как 7 х = у, то 7 х = -1. Это равенство невозможно, поскольку показательная функция может принимать только положительные значения;

7 х = 49 7 х = 72 , т.е. х = 2. Итак, получаем ответ: х = 2.

2). 5 ∙ 5 2х  - 6 ∙ 5 х + 1 = 0

***Решение:***  Положим 5 2х = у; тогда получим

5у2 – 6у + 1 = 0



Поскольку у1 = , у2 = 1, имеем

5х = , 5х = 1;

5х = 5- 1  5х = 50

х = - 1 х = 0

**Задания для самостоятельного решения:**

Решить уравнения:

1. 3х = 243; Ответ: 5;

2. 2- х  = 16; Ответ: - 4;

3. 9 ∙ 5 х + 1 – 5 х = 5500; Ответ: 3;

4. 3 3х + 1 – 2 ∙ 3 3х = 27; Ответ: 1;

5. 3 ∙ 2 х – 2 х – 1 + 5 ∙ 2 х – 2 = 120; Ответ: 5;

6. 3 2х – 1 + 3 2х – 2 – 3 2х – 4 = 315; Ответ: 3;

7. 5 ∙ 5 2х + 43 ∙ 5 х + 24 = 0; Ответ: нет решений;

8. 8 2х + 6 ∙ 8 х - 7 = 0; Ответ: 0;

9. 3 2х - 4 ∙ 3 х  = 45; Ответ: 2;

10. 3 2х + 1 – 18 = 25 ∙ 3 х ; Ответ: 2;

11. 4 ∙ 2 2х – 33 ∙ 2 х + 8 = 0; Ответ: 3; - 2;

12. 7 2х - 8 ∙ 7 х + 7 = 0; Ответ: 1; 0.

**Решение показательных уравнений**

* + 1. **Способ уравнивания оснований**.

Решение: 

* + 1. **Вынесение общего множителя с наименьшим показателем степени за скобку**:

2x + 2x - 1-2x – 3 = 44

Решение: т.к. наименьшим показателем степени является x - 3, то вынесем

2х - 3 за скобки:

2x - 3 ( 23 + 22 – 1 ) = 44

2x-3 ( 8 + 4 -1 ) = 44

2x-3 \* 11 = 44

Разделив обе части уравнения на 11, получим:

2x - 3 = 4

2x - 3 = 22

х-3 = 2

х = 5

* + 1. **Преобразовать к квадратному уравнению**.

72x - 48⋅7x = 49.

Решение: Полагая 7x=у, получим у2- 48у – 49 = 0. Решим его.

у1 = - 1 у2 = 49

Так как 7x = у, то 7x = -1 (это равенство не возможно, т.к. показательная функция может принимать только положительные значения);

7x = 49

7x = 72

х = 2. Ответ: х = 2.

**Задания для самостоятельного решения**

1. 
2. 
3. 7x – 3 ⋅ 7x - 1 + 7x + 1 = 371
4. 9 ⋅ 5x + 1 - 5x = 5500
5. 33x + 1 – 2 ⋅ 33x = 27
6. 32x – 1 + 32x – 2 - 32х – 4 = 315
7. 5 ⋅ 52x – 6 ⋅5x + 1 = 0
8. 4 ⋅ 22x – 33 ⋅ 2x + 8 = 0
9. 72x – 8 ⋅ 7 + 7 = 0
10. 32x – 44 ⋅ 3x = 45
11. 5x + 1 + 5Х + 5x – 1 = 155

**Понятие логарифма**

**Определение логарифма**

***Логарифмом*** числа по данному основанию называется показатель степени, в которую надо возвести основание, чтобы получить заданное (логарифмируемое) число.

Логарифм обозначается так: **log a N = x**,

где **а** – основание логарифма

N – заданное (логарифмируемое) число.

Из определения логарифма можно записать показательное уравнение:

**а х = N.**

**Свойства логарифма**

1. Отрицательные числа и нуль не имеют логарифмов.

2. При любом основании а (a > 0, a ≠ 1) логарифм единицы равен нулю.

1. Логарифм числа, равного основанию, всегда равен единице.

Логарифмы чисел по основанию 10 обозначают – **lg x**;

Логарифмы чисел по основанию е, где е = 2,7182… - **ln x**;

**log 10 x = lg x, log e x = ln x.**

**Теоремы о логарифмах произведения, частного, степени и корня**

***Теорема 1.*** Логарифм произведения двух чисел равен сумме логарифмов сомножителей по тому же основанию:

loga (N1N2) = loga N1 + loga N2

***Теорема 2.*** Логарифм частного двух чисел равен разности логарифмов делимого и делителя по тому же основанию:



***Теорема 3.*** Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания:

log a (N m) = m log a N

***Теорема 4.*** Логарифм корня равен логарифму подкоренного выражения, деленному на показатель степени корня:

.

Формула перехода от одного основания к другому. **=  ;**

Основное логарифмическое тождество = b.

**Логарифмирование и потенцирование**

Прологарифмировать некоторое выражение, заданное в виде произведения, частного, степени или корня, - это значит выразить логарифм этого выражения через логарифмы составляющих его чисел. Такое действие называется ***логарифмированием***.

Действие, обратное логарифмированию называется ***потенцированием***.

**Примеры с подробными решениями:**

1. Записать с помощью знака логарифма следующие равенства:

а) 52 = 25

***Решение:*** log5 25 = 2;

b) 10 – 2 = 0.01

***Решение:*** lg 0.01 = - 2;

2. Найти логарифмы данных чисел по известным основаниям:

a) log2 16

***Решение:*** 2x = 16, 2x = 24, x = 4 , откуда log2 16 = 4

b) 

***Решение:***  

3. Определить **х** по заданным условиям:

а) log4 x = - 3

***Решение:***  По определению логарифма, запишем 4- 3 = х, откуда х = .

b) 

***Решение:*** Согласно определению логарифма получаем уравнение т.к.  и , то оно примет вид . Возведем обе части в квадрат:



4. Прологарифмировать следующие выражения:

а) 

***Решение:***

Применив сначала теорему 2, а затем теоремы 1 и 3, получим:



Здесь и в следующих примерах основание логарифма мы не пишем, так как полученные равенства справедливы при любом основании.

b) 

***Решение:*** Применим последовательно теоремы 2, 1 и 3. находим:



5. По известному логарифму числа **х** найти это число:

а) 

***Решение:*** ; откуда 

b) log x = 

***Решение:***



**Задания для самостоятельного решения:**

1. Записать с помощью знака логарифма следующие равенства:

а) 73 = 343; Ответ: log7 343 = 3;

b) 8- 3 = ; Ответ: log 8  = - 3;

c) 100=1. Ответ: lg 1 = 0;

2. Найти логарифмы данных чисел по известным основаниям:

а) log5 125; Ответ: х = 3;

b) log1/3 27; Ответ: х = - 3;

* 1. ; Ответ: х = ;
  2. log0.04 5 Ответ: х = .

3. Определить **х** по заданным условиям:

а) log х 0,125 =2; Ответ: х = ;

b) ; Ответ: х = ;

c) ; Ответ: х = ;

d) logx 9 = - 4; Ответ: х = .

4. Прологарифмировать следующие выражения:

а) х = ; Ответ: ;

b) x = ; Ответ: ;

* 1. x = ;

Ответ: ;

d) x = ; Ответ: ;

e) x = ; Ответ: .

5. По известному логарифму числа **х** найти это число:

а) ; Ответ: ;

b)  Ответ: ;

c)  Ответ: 

d) log x = ; Ответ: .

**Логарифмические уравнения**

***Логарифмическим уравнением*** называется уравнение, в котором неизвестное находится под знаком логарифма.

При решении логарифмических уравнений могут появиться посторонние корни, поэтому их надо проверять.

Решаются логарифмические уравнения несколькими способами:

***1) способ по определению логарифма:***

log2 (x + 1) = - 1

Решение: х + 1 = 2- 1

х + 1 = 

х = 

х = 

Проверка: log2 () = - 1

log2 = - 1 или 2- 1 =  Ответ: х = 

***2) способ потенцирования:***

lg (x + 6) - lg (2x – 3) = 2 – lg 25

Решение:

lg (x + 6) - lg (2x – 3) = lg100 – lg 25

lg









x2 +12x + 36 = 16 (2x – 3)

x2 + 12x + 36 = 32x - 48

x2 + 12x + 36 - 32x + 48 = 0

x2 – 20x + 84 = 0

x1 = 14 x2 = 6.

Проверка: при х1 = 14:

lg (14 + 6) - lg (2∙14 – 3) = lg 20 - lg25 = lg



при х2 = 6



lg 4 = lg 4

Ответ: x1 = 14 x2 = 6.

***3) Способ введения новой переменной:***



Решение: lg x = z, lg2 x = z2



a) lg x = 1 b) lg x = - 4

x1 = 101 = 10;

Ответ: x1 = 10; x2 = 0.0004

1. ***Способ логарифмирования:***

x lg x + 2 = 1000

Решение:

Используем формулу

lg (Nn) = n lg N

n = lg x + 2 x = n

(lg x + 2) lg x = lg 1000 = 3

lg2 x + 2 lg x – 3 = 0 lg x = z

z2 + 2z – 3 = 0

z1 = - 3 z2 = 1

a) lg x = - 3 b) lg x = 1

x1 = 10- 3; x2 = 101

Ответ: x1 = 10- 3  x2 = 101

**Задания для самостоятельного решения:**

Решить уравнения:

 Ответ: x1 = 2, x2 = 3;

log5 (x2 – 4x + 4) = 0 Ответ: x1 = 1, x2 = 3;

lg x + lg 3 = lg 27 – lg 9 Ответ: x = 1;

log3 x + log3 (x – 2) = 2 Ответ:  ;

log2 log3 log4 x = 0 Ответ: 64

xlg x = 10 Ответ: x1 = 10, x2 = 0,1;

 Ответ: x1 = 103, x2 = 102.

**Тригонометрические функции, их свойства и графики**

**Функция синус**

http://osiktakan.ru/spravka/sin01.gif

|  |
| --- |
| синусоида |

Рисунок 51.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **1. Область определения функции** — множество **R** всех действительных чисел.  **2. Множество значений функции** — отрезок [-1; 1], т.е. синус функция — **ограниченная**.  **3. Функция нечетная:** sin(−x)=−sin x для всех х ∈ **R**.  График функции симметричен относительно начала координат.  **4. Функция периодическая** с наименьшим положительным периодом 2π:  sin(x+2π·k) = sin x, где k ∈ **Z** для всех х ∈ **R**.  **sin x = 0** при x = π·k, k ∈ **Z**.  **sin x > 0** (положительная) для всех x ∈ (2π·k, π+2π·k), k ∈ **Z**.  **sin x < 0** (отрицательная) для всех x ∈ (π+2π·k, 2π+2π·k), k ∈ **Z**.   |  |  | | --- | --- | | **5. Функция возрастает** от −1 до 1 на промежутках: | http://osiktakan.ru/spravka/sin02.gif | | **6. Функция убывает** от −1 до 1 на промежутках: | http://osiktakan.ru/spravka/sin03.gif | | **7. Наибольшее значение функции sin x = 1** в точках: | http://osiktakan.ru/spravka/sin04.gif | | **8. Наименьшее значение функции sin x = −1** в точках: | http://osiktakan.ru/spravka/sin05.gif | |

### Функция косинус

http://osiktakan.ru/spravka/cos01.gif

|  |
| --- |
| косинусоида |
|  |
| Рисунок 52.  **1. Область определения функции** — множество **R** всех действительных чисел.  **2. Множество значений функции** — отрезок [-1; 1], т.е. косинус функция — **ограниченная**.  **3. Функция четная:** cos(−x)=cos x для всех х ∈ **R**.  График функции симметричен относительно оси OY.  **4. Функция периодическая** с наименьшим положительным периодом 2π:  cos(x+2π·k) = cos x, где k ∈ **Z** для всех х ∈ **R**.   |  |  | | --- | --- | | **cos x = 0** при | http://osiktakan.ru/spravka/cos02.gif | | **cos x > 0** для всех | http://osiktakan.ru/spravka/cos03.gif | | **cos x < 0** для всех | http://osiktakan.ru/spravka/cos04.gif | | **5. Функция возрастает** от −1 до 1 на промежутках: | http://osiktakan.ru/spravka/cos06.gif | | **6. Функция убывает** от −1 до 1 на промежутках: | http://osiktakan.ru/spravka/cos07.gif | | **7. Наибольшее значение функции sin x = 1** в точках: | http://osiktakan.ru/spravka/cos08.gif | | **8. Наименьшее значение функции sin x = −1** в точках: | http://osiktakan.ru/spravka/cos09.gif | |

### ****Функция тангенс****

http://osiktakan.ru/spravka/tg01.gif

|  |
| --- |
| тангенсоида  Рисунок 53. |
| |  |  | | --- | --- | | **1. Область определения функции** — множествовсех действительных чисел, кроме | http://osiktakan.ru/spravka/tg02.gif |   **2. Множество значений функции** — вся числовая прямая, т.е. тангенс — функция **неограниченная**.  **3. Функция нечетная:** tg(−x)=−tg x для всех х из области определения.  График функции симметричен относительно оси OY.  **4. Функция периодическая** с наименьшим положительным периодом π, т.е. tg(x+π·k) = tg x, k ∈ **Z** для всех х из области определения.   |  |  | | --- | --- | | **tg x = 0** при | http://osiktakan.ru/spravka/tg03.gif | | **tg x > 0** для всех | http://osiktakan.ru/spravka/tg04.gif | | **tg x < 0** для всех | http://osiktakan.ru/spravka/tg05.gif | | **5. Функция возрастает** на промежутках: | http://osiktakan.ru/spravka/tg06.gif | |

### Функция котангенс

http://osiktakan.ru/spravka/ctg01.gif

|  |
| --- |
| котангенсоида |
| Рисунок 54.   |  |  | | --- | --- | | **1. Область определения функции** — множествовсех действительных чисел, кроме чисел | http://osiktakan.ru/spravka/ctg02.gif |   **2. Множество значений функции** — вся числовая прямая, т.е. котангенс — функция **неограниченная**.  **3. Функция нечетная:** ctg(−x)=−ctg x для всех х из области определения.  График функции симметричен относительно оси OY.  **4. Функция периодическая** с наименьшим положительным периодом π, т.е. ctg(x+π·k)=ctg x, k ∈ **Z** для всех х из области определения.   |  |  | | --- | --- | | **ctg x = 0** при | http://osiktakan.ru/spravka/ctg03.gif | | **ctg x > 0** для всех | http://osiktakan.ru/spravka/ctg04.gif | | **ctg x < 0** для всех | http://osiktakan.ru/spravka/ctg05.gif | | **5. Функция убывает** на каждом из промежутков | http://osiktakan.ru/spravka/ctg06.gif | |

**Графики обратных тригонометрических функций**

Построим график арксинуса http://mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image233.gif

  
Рисунок 55.

Перечислим основные свойства функции http://mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image233_0000.gif:

[**Область определения**](http://mathprofi.ru/oblast_opredeleniya.html): http://mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image238.gif, не существует значений вроде http://mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image240.gif или http://mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image242.gif

Область значений: http://mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image244.gif, то есть,  функция http://mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image233_0001.gif **ограничена**.

**Арксинус – функция нечетная**, здесь минус опять же выносится: http://mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image246.gif.

В практических вычислениях полезно помнить следующие значения арксинуса: http://mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image248.gif, http://mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image250.gif, http://mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image252.gif. Другие распространенные значения арксинуса (а также других «арков») можно найти с помощью [таблицы значений обратных тригонометрических функций](http://mathprofi.ru/trigonometricheskie_tablicy.pdf).

Построим график арккосинуса http://mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image258.gif

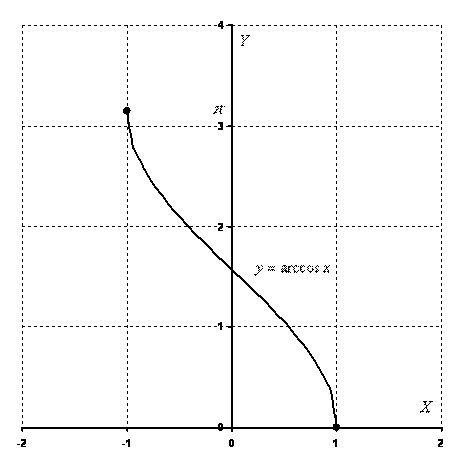


Рисунок 56.

Очень похоже на арксинус, свойства функции сформулируйте самостоятельно. Остановлюсь на единственном моменте. В данной статье очень много разговоров шло о четности  и нечетности функций, и, возможно, у некоторых сложилось впечатление, что функция обязательно должна быть четной или нечетной. В общем случае, это, конечно, не так. Чаще всего, функция, которая вам встретится на практике – «никакая». В частности, **арккосинус не является четной или нечетной функцией**, он как раз «никакой».

Построим график арктангенса

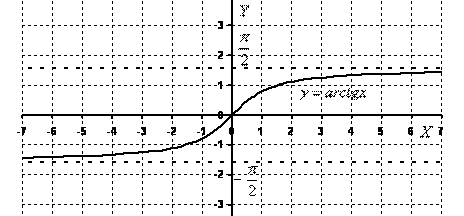


Рисунок 57.

Всего лишь перевернутая ветка тангенса.   
Перечислим основные свойства функции :

[**Область определения**](http://mathprofi.ru/oblast_opredeleniya.html): http://mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image063_0001.gif

Область значений: http://mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image244_0000.gif, то есть,  функция http://mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image262_0001.gif **ограничена**.  
У рассматриваемой функции есть две асимптоты: http://mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image267.gif, http://mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image269.gif.

**Арктангенс – функция нечетная**: http://mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image271.gif.

Самые «популярные» значения арктангенса, которые встречаются на практике, следующие: http://mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image273.gif, http://mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image275.gif.

К графику арккотангенса http://mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image277.gif приходится обращаться значительно реже, но, тем не менее, вот его чертеж:

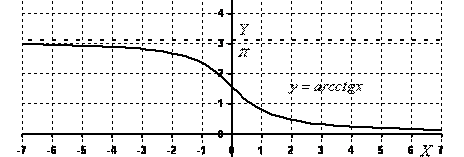


Рисунок 58.

Свойства арккотангенса вы вполне сможете сформулировать самостоятельно. Отмечу,  что арккотангенс, как и арккосинус, не является четной или нечетной функцией.

**Синус, косинус, тангенс, котангенс числа. Радианная мера угла**

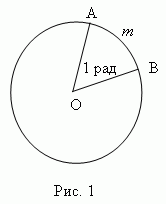
Из курса геометрии известно, что углы можно измерять в градусах. Например, развернутый угол равен 180˚, прямой угол равен 90˚. Кроме градусной меры применяются и другие единицы измерения углов. В математике и физике обычно используется ***радианная*** мера угла. Рассмотрим окружность с радиусом R и с центром в точке О. Найдем градусную меру центрального угла АОВ, опирающегося на дугу АВ, длина которой равна радиусу R. Т.к. дуга длиной πR (полуокружность) равна углу 180˚, то дуга длиной R равна углу, в π раз меньше, т.е. угол, равный . Мера угла АОВ считается равной 1 радиану.

Рисунок 59.

Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу, называется ***углом в 1 радиан (рад).***

Таким образом,

**** (1)

Т.к. π ≈ 3,14, то 1 рад приближенно равен 57,3˚ или 57˚18`.

Из этой формулы (1)следует, что угол в α рад имеет градусную меру  градусов, т.е.  (2)

Например: подставляя в эту формулу , получаем: 

Т.е развернутый угол содержит π рад. Прямой угол содержит  рад.

**Задание:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № задания | Какова градусная мера угла, равного: | Ответ: |
| 1 |  | , |
| 2 |  |  |
| 3 |  |  |

Из формулы (2) следует, что 

**Задание:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № задания | Какова градусная мера угла, равного: | Ответ: |
| 1 |  |  |
| 2 |  |  |
| 3 |  |  |

**Задание:** Определить градусную и радианную меру углов:

а) равностороннего треугольника;

б) равнобедренного прямоугольного треугольника;

в) квадрата;

г) правильного шестиугольника.

**Определение тригонометрических функций**

Введем понятия синуса, косинуса, тангенса, котангенса действительного числа.

**Синусом числа α** называется ордината точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол α радиан.

**Косинусом числа α** называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол α радиан.

**Тангенсом числа α** называется отношение синуса числа α к его косинусу.

**Котангенсом числа α** называется отношение косинуса числа α к его синусу.

Таким образом:



**Знаки тригонометрических функций**

Знаки синуса в различных Знаки косинуса в различных Знаки тангенса и котангенса

четвертях четвертях в различных четвертях

Рисунок 60.

**Задание:** Найти 

**Решение:** Пусть М – точка, полученная поворотом точки (1; 0) на угол .

Пусть точки А и В – проекции точки М на оси координат. Угол АОМ равен , поэтому прямоугольный треугольник АОМ равнобедренный. Длины его катетов равны , т.к. ОМ = 1. Следовательно, точка М имеет координаты

 Таким образом,

у

0 х

М

Рисунок 61.



Функции у = sin x, y = cos x, y = tg x, y = ctg x называются ***тригонометрическими функциями.***

Приведем таблицу часто встречающихся значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | sin A | cos A | tg A | ctg A |
|  | 0 | 1 | 0 |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  | 1 | 1 |
|  |  |  |  |  |
|  | 1 | 0 |  | 0 |

**Задание:**

Вычислить:

1) ; 2) .

**Решение:**

1)  = ;

2)  = .

**Задания для самостоятельного решения:**

1. Найти радианную меру угла, выраженного в градусах:
   1. 105˚; 150˚; 75˚; 32˚; 100˚; 140˚.
2. Найти градусную меру угла, выраженного в радианах:
   1. .
3. На единичной окружности построить точку, полученную поворотом точки (1; 0) на угол (k – целое число)
   1. .
4. Вычислить:
   1. 
   2. 
   3. ;
   4. 
   5. .
5. Найти значение выражения:
   1. ;
   2. 
   3. ;
   4. .

**Поворот точки вокруг начала координат**

**Единичная окружность**

Рассмотрим на координатной плоскости окружность радиусом равным 1 с центром в начале координат. Ее называют **единичной окружностью**. Введем понятие поворота точки единичной окружности вокруг начала координат на угол радиан, где - любое действительное число.

1. Пусть 0. Точка, двигаясь по единичной окружности от точки Р против часовой стрелки, прошла путь, длиной . Конечную точку пути обозначим точкой М.

В этом случае т. М получена из точки Р поворотом вокруг начала координат на угол рад. Заметим, что если 0, то угол РОМ равен рад как центральный угол единичной окружности. (рис. 62)

У у у у

1 М 1 1 1

-1 1 х -1 1 х -1 1 х -1 1 х

-1 -1 -1 N -1 K

Рис. 62 Рис. 63 Рис. 64 Рис. 65

1. Пусть 0. В этом случае поворот на угол рад означает, что движение совершалось по часовой стрелке и точка прошла путь длиной ||. Поворот на 0 рад означает, что точка остается на месте. (Рис. 63)

**Примеры:**

1. При повороте точки Р (0; 1) на угол рад получается точка М с координатами (0; 1); так как длина дуги единичной окружности , равная , равна ¼ длины всей единичной окружности: (Рис. 64)
2. При повороте точки Р (1; 0) на угол - рад получается точка N (0; -1) (Рис. 64)
3. При повороте точки Р (1; 0) на угол рад получается точка К (0; -1) (Рис. 65)
4. При повороте точки Р (1; 0) на угол рад получается точка L (-1; 0) (Рис. 65)

При повороте точки на рад говорят также, что поворот этой точки выполнен на градусов;

**например**, поворот на рад – это поворот на 90,

на - рад – поворот на - 90,

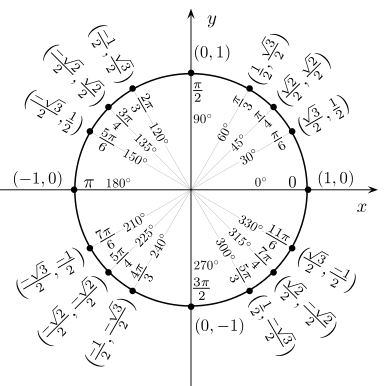
поворот на рад – это поворот на 270.

Приведем таблицу поворотов на некоторые углы, выраженные в радианной и градусной мерах.

Отметим, что при повороте на , т.е. на 360, точка точка возвращается в первоначальное положение. При повороте на - , т.е. на - 360, также получается та же самая точка.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| у  х |  | 30 |
| у  х |  | 45 |
| у  х |  | 60 |
| у  х |  |  |
| у  х |  | 180 |
| у  х | I | 270 |
| у  х |  | 360 |
| у  х |  | - 90 |
| у  х | - | -180 |

Рисунок 66.

[](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Unit_circle_angles.svg?uselang=ru)Рисунок 67.

**Значение косинуса и синуса на окружности.**

**Например**: При повороте на угол точка совершает два полных оборота и еще пройдет путь , так, как Таким образом, при повороте на угол получается та же самая точка единичной окружности, что и при повороте на угол .

Итак, каждому действительному числу соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки (1; 0) на угол рад.

Однако одной и той же точке М единичной окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел , где k – целое число, задающих поворот точки (1; 0) в точку М. (См. рис.68)

у у

М М

Р (1; 0) Р (1; 0)

0 х х

Рисунок 68.

**Задача**: Найти координаты точки, полученной поворотом точки Р (1; 0) на угол :

1. 7 ; 2) - .
2. 7 = , При повороте получается та же самая точка, что и при повороте на , т.е. точка с координатами (-1; 0);
3. при повороте получается та же самая точка, что при повороте на , т.е. получается точка с координатами (0; -1).

**Задания**:

1. Найти координаты точки единичной окружности, полученной поворотом точки (1; 0) на угол:
2. 4; 2) 3,5; 4) ; 5) 225;
3. На единичной окружности построить точку, полученную поворотом точки (1; 0) на угол:
4. ; 2) ; 4) ; 5)

**Основные тригонометрические тождества**

Пусть точка М (х; у) единичной окружности получена поворотом точки (1; 0) на угол радиан. Тогда по определению синуса и косинуса

# x = cos , y = sin . Точка М принадлежит единичной окружности, поэтому ее координаты (х; у) удовлетворяют уравнению х2 + у2 = 1. Следовательно

# sin2 + cos2 = 1 (1)

# y

x (1; 0) x M (cos ; sin )

y

Рисунок 69.

Равенство (1) выполняется при любых значениях , и называется основным тригонометрическим тождеством. Из равенства (1) можно выразить sin через cos и наоборот:

**sin = (2)**

**cos = (3)**

Задача 1. Вычислить sin , если cos = и

Воспользуемся формулой (2). Так как , то sin < 0, поэтому в формуле (2) перед корнем нужно оставить знак «минус»:

Вообще знак перед корнем в формулах (2) и (3) определяется знаком тригонометрической функции, стоящей в левой части этих формул.

Задача 2 Вычислить cos , если sin = .

Так как , то cos > 0, и поэтому в формуле (3) перед корнем нужно оставить знак «плюс».

cos = = .

1. **Зависимость между тангенсом и котангенсом:**

По определению тангенса и котангенса tg , ctg . Перемножая эти равенства получаем:

**tg .**  (4)

Из равенства (4) можно выразить tg через ctg и наоборот:

Равенства (4) - (6) справедливы при .

Задача 3.

Вычислить ctg , если **tg** = 13

По формуле (6) находим ctg = .

Задача 4.

Найти tg , если sin = 0.8 и

По формуле (3) находим cos. Так как то cos < 0. Поэтому

cos = = .

Следовательно, tg =

1. Зависимость между тангенсом и косинусом, котангенсом и синусом

Разделим обе части равенства **sin2 + cos2 = 1** на cos2предполагая, чтоcos

Отсюда  **1 + tg2 = , (7)**  где

Аналогично, разделив обе части равенства sin2 + cos2 = 1 на sin2 (при sin), получаем**: 1 +с tg2 =**

Задача 5. Вычислить cos , если tg = 3 и .

Из формулы (7) находим:

cos2 = . Так как , то cos < 0, и поэтому cos = - /

Задача 6. Найти sin и cos , если ctg = - 2, и .

Из формулы (8) находим: sin2= Так как , то sin < 0, и поэтому sin =

Для вычисления cos можно использовать формулы (1), (3), (7), а так же определение котангенса. Например, из формулы ctg находим:

**Задания для самостоятельного решения:**

1. Вычислить sin , tg , ctg , если cos = и .
2. Вычислить cos , tg , ctg , если sin = и .
3. Вычислить значения каждой из тригонометрических функций, если:
   1. cos = и ;
   2. sin = 0,8 и
   3. tg = и ;
   4. ctg = - 3 и ;
   5. cos = 0,8 и ;
   6. sin = 0,8 и
   7. tg =- 2,4 и
   8. ctg = и
4. Упростить выражения:
   1. ;
   2. ;
   3. ;
   4. ;
   5. 1+;

**Формулы приведения**

Значения тригонометрических функций острых углов вычисляют по таблицам. Значения функций любых углов можно вычислить с помощью формул приведения к острому углу.

**Правило написания формул приведения**

1. Знак тригонометрической функции определяется по первоначально заданному углу.
2. Если аргумент можно представить как сумму или разность и острого угла, то название функции не изменяют.

Другими словами можно сказать, что если угол начинается со 180 или 360 градусов, то функция остается без изменений.

1. *Если аргумент можно представить как сумм*у или разность и острого угла, то название функции изменяют на сходную ей..

Т.е. если угол начинается с 90 или 270 градусов, то тригонометрическая функция меняется на сходную ей, т.е на кофункцию.

Например: sin на cos, tg на ctg и наоборот.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ф-я | Аргумент | | | | | | | |
|  |  |  |  |  |  | 2 |  |
| Sin |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Cos |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Tg | ctg | -ctg | -tg | tg | ctg | -ctg | -tg | tg |
| Ctg | tg | -tg | -ctg | ctg | tg | -tg | -ctg | ctg |

**Примеры:**

I. Найти:

1. ;
2. ctg 150;
3. ;
4. tg 320;
5. ;
6. tg 210;
7. ;
8. tg 315
9. ;
10. ;
11. ctg140;

II. Следующие функции привести к функциям положительных углов меньших 45 градусов:

1. ;
2. ctg 45;
3. tg159;
4. tg70;
5. ctg 188
6. .

III. Вычислить значения тригонометрических функций:

1. ;
2. ;
3. ;
4. tg

IV. Вычислить: =

= .

V. Вычислть:

;

.

**Формулы сложения аргументов**

Формулами сложения называют **формулы, выражающие cos**  через косинусы и синусы **tg** через тангенсы и котангенсы .

Формулы сложения аргументов имеют следующий вид:

1. =

=

=

=

5.

6.

7.

8.

Рассмотрим на примерах:

**Пример:** Вычислить: sin (если

**Решение:**

.

**Пример:** Вычислить: cos (если

**Решение:**  Из формулы 1 + получим: cos

cos =

cos =

cos (===

**Пример:**

Sin 20

Cos47

**Пример:** Доказать тождество:

==

**Пример:**

**Решение:** Упростим правую часть тождества

=

**Пример:**

1. и , если ,

;

1. и , если

**Пример:** Упростить:

1. 2

==

= 2

= 2

**Пример:** Доказать тождество:

*=*

**Тригонометрические функции двойного угла**

Формулы для тригонометрических функций двойных углов позволяют выразить функции аргумента 2 через функции аргумента .

Воспользуемся формулой . Полагая, что , получаем:

**(1)**

Аналогично из формулы

**(2)**

Используя основное тригонометрическое тождество из равенства (2) получаем следующие формулы:

Из формулы при получаем:

(4)

Формулы (1) - (4) называют формулами синуса, косинуса, и тангенса двойного аргумента.

**Пример:** Вычислить , если = 0,3.

**Решение:**

**Пример:** Вычислить , если

**Решение:** По формуле (1) .

Так как , то

Следовательно: .

**Пример:** Упростить выражение

**Решение:** Применяя формулы (1) и (3) , получаем: .

**Пример:** Вычислить tg 4

**Решение:** tg

tg 4

**Задания для самостоятельного решения:**

Выразить функции данного аргумента через функции половины этого аргумента:

1. Tg 92

Вычислить:

1. 2
2. 2
3. = 1

*.,* если

и

2. .

**Тригонометрические функции половинного аргумента**

По известным значениям тригонометрических функций аргумента можно найти значения тригонометрических функций аргумента , если указано, в какой четверти лежит угол . Из формулы  при х = получаем:

(1)

Запишем основное тригонометрическое тождество в виде

**1 =**  (2)

Складывая почленно равенства (2) и (1) и вычитая почленно из равенства (2) равенство (1), получаем:

, (3)

(4)

Формулы (3) и (4) можно записать так:

Формулы (5) и (6) называют формулами синуса и косинуса половинного аргумента. Эти формулы также называют формулами понижения степени.

Если известен , то из формул (5) и (6) можно найти и  с точностью до знака. Знак может быть определен, если известно, в какой четверти лежит угол .

Пример: Вычислить , если и .

Решение: По формуле (5) Так как , то , и поэтому . Следовательно,

Пример: Вычислить если .

Решение: Разделив почленно равенство (6) на (5), получим:

. По условию , поэтому и Следовательно .

**Задания для самостоятельного решения:**

Пусть . Вычислить: .

Пусть Вычислить:

**Формулы суммы и разности синусов и косинусов**

Запишем формулы суммы и разности синусов и косинусов. Как Вы понимаете, их четыре штуки: две для синусов и две для косинусов.

Теперь дадим их формулировки. При формулировании формул суммы и разности синусов и косинусов угол называют полусуммой углов http://www.cleverstudents.ru/trigonometry/images/sum_of_sin_and_cos/alpha.pngи http://www.cleverstudents.ru/trigonometry/images/sum_of_sin_and_cos/beta.png, а угол - полуразностью. Итак,

Формула суммы синусов : сумма синусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности.

Формула разности синусов : разность синусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полуразности этих углов на косинус их полусуммы.

Сумма косинусов : сумма косинусов двух углов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы на косинус полуразности этих углов.

Формула разности косинусов : разность косинусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы на синус полуразности этих углов, взятому со знаком минус.

Стоит отметить, что формулы суммы и разности синусов и косинусов справедливы для любых углов http://www.cleverstudents.ru/trigonometry/images/sum_of_sin_and_cos/alpha.pngи http://www.cleverstudents.ru/trigonometry/images/sum_of_sin_and_cos/beta.png.

Разберем несколько примеров использования формул суммы синусов и косинусов, а также разности синусов и косинусов.

Для примера проверим справедливость формулы суммы синусов вида

взяв и . Чтобы это сделать, вычислим значения левой и правой частей формулы для данных углов. Так как (при необходимости смотрите [таблицу основных значений синусов и косинусов](http://www.cleverstudents.ru/trigonometry/tables_of_sin_cos_tg_ctg.html#table)), то . При имеем и , тогда . Таким образом, значения левой и правой частей формулы суммы синусов для и совпадают, что подтверждает справедливость этой формулы.

В некоторых случаях использование формул суммы и разности синусов и косинусов позволяет вычислять значения тригонометрических выражений, когда углы отличны от основных углов. Приведем решение примера, подтверждающего эту мысль.

**Пример.**

Вычислите точное значение разности синусов *165* и *75* градусов.

**Решение.**

Точных значений синусов *165* и *75* градусов мы не знаем, поэтому непосредственно вычислить значение заданной разности мы не можем. Но ответить на вопрос задачи нам позволяет формула разности синусов

.

Действительно, полусумма углов *165* и *75* градусов равна *120*, а полуразность равна *45*, а точные значения синуса *45* градусов и косинуса *120* градусов известны.

Таким образом, имеем

Ответ:

Несомненно, главная ценность формул суммы и разности синусов и косинусов заключается в том, что они позволяют перейти от суммы и разности к произведению тригонометрических функций (по этой причине эти формулы часто называют формулами перехода от суммы к произведению тригонометрических функций).

В преобразованиях тригонометрических выражений, а также при решении некоторых уравнений используются формулы преобразования произведения в сумму или разность:

.

**Задания для самостоятельного решения:**

Вычислить:

1. ; 2.

4.

Преобразовать в произведение:



**Простейшие тригонометрические уравнения.**

**Решение тригонометрических уравнений**

**Простейшими тригонометрическими уравнениями** называются уравнения sin x = m, cos x = m, tg x = m, ctg x = m, где **m** данное число.

**Решить простейшее тригонометрическое уравнение** – значит найти множество всех значений аргумента (дуг или углов), при которых данная тригонометрическая функция принимает заданное значение **m.**

y

Решение простейших тригонометрических уравнений мы рассмотрим на примере

N(0; ) уравнения **sin x = .**

 Arcsin  Главным решением является дуга

A(1; 0) x АМ1 =  из промежутка

Рисунок 70. , синус которой .

Т.е. множеством значений функции y = sin x является отрезок [-1; 1]. Дуга АМ1 – называется главным решением уравнения **sin x = .** Этому уравнению удовлетворяют следующие значения:  Общая формула по которой находятся все корни уравнения sin x = **,** где |m| ≤ 1**,** такова:

**Х = .** Здесь **n** может принимать любые целые значения, каждому из них соответствует определенный корень уравнения; здесь n называют параметром. Записывают обычно , подчеркивая тем самым, что параметр n может принимать любые целые значения.

При решении простейших тригонометрических уравнений полезно помнить формулы таблицы и сразу пользоваться ими.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Уравнение | Формула решения | Примечание |
| sin x = m |  | arcsin (-m) = - arcsin m, |m|≤ 1,  n € Z |
| cos x = m | x = ± arccos m + 2πn, n € Z | arccos (-m) = π – arcos m,  |m|≤ 1, n € Z |
| tg x = m | x = arctg m + πn | arctg (- m) = - arctg m,  m € R, n € Z |
| ctg x = m | x = arcctg m + πn | arcctg (- m) = π - arcctg m,  m € R, n € Z |

Примечание: Если n – четное число, т.е. n = 2k, то из формулы получаем

arcsin m + 2πk, а если n – нечетное, т.е. n = 2πk + 1, то из формулы имеем – arcsin m + (2k + 1)π = π - arcsin m + 2πk

**Решить простейшие тригонометрические уравнения:**

**Пример 1**. 

По формуле находим: 

**Пример 2.**  Воспользовавшись формулой, получим:

, т.к 

Тогда: 

**Пример 3.**  **Пример 4**. 

**Пример 5**. 

**Пример 6.**  **Пример 7**. 

**Пример 8**.  **Пример 9**. 

**Пример 10.** 

**Пример 11.** 

**Задания для самостоятельного решения:**

1. 2. 3. 4. 5.

6. 7. 8. 9.

10. 11. ;

12. 13. 14. 15.

16. ; 17. ;

18. 19. 20. ; 21. ; 22. ;

23. ; 24. ; 25. c.

**Решение тригонометрических уравнений**

Тригонометрические уравнения решаются несколькими методами.

1. ***Уравнения, сводящиеся к квадратным.***

Рассмотрим тригонометрические уравнения, которые сводятся к квадратным относительно синуса, косинуса или тангенса.

**Пример:** Решить уравнение

**Решение:** Это уравнение является квадратным относительно Пусть , тогда уравнение принимает вид:

t1 = 1 и t2 = - 2.

- уравнение не имеет

корней.

Ответ: .

**Пример:** Решить уравнение

**Решение:** Заменяя на из основного тригонометрического тождества) получаем:

Откуда

не имеет корней, а уравнение имеет следующие корни

Ответ.

**Пример:** Решить уравнение .

**Решение:** Это уравнение является квадратным относительно его корни

. Уравнение имеет следующие корни:

. А уравнение не имеет корней.

Ответ. .

**Пример:** Решить уравнение

**Решение:** Используя формулу получаем:

Откуда

Ответ.

1. ***Уравнения, однородные относительно***

Рассмотрим уравнение вида (1)

которое называют однородным относительно Разделив обе части уравнения (1) на , получим: , (2)

откуда

**Пример:** Решить уравнение

**Решение:** Данное уравнение равносильно уравнению

Откуда

Ответ.

Уравнение вида  (3)

также называют однородным относительно Если , то разделив обе части уравнения (3) на , получим равносильное уравнение , которое является квадратным, относительно .

**Пример:** Решить уравнение

**Решение:** Данное уравнение равносильно уравнению Решая это квадратное уравнение относительно , находим:

Ответ.

К уравнению вида (3) сводится уравнение

Для этого достаточно воспользоваться основным тригонометрическим тождеством, заменив

на .

**Пример:** Решить уравнение *.*   
**Решение:** Заменив 2 на , запишем уравнение в следующем виде:

, откуда

. Разделив обе части этого уравнения на , получим уравнение , равносильное исходному. Отсюда находим

Ответ.

1. ***Уравнения, решаемые разложением левой части на множители.***

Многие тригонометрические уравнения, правая часть которых равна нулю, решаются разложением их левой части на множители.

**Решить уравнение: sin 2x – sin x = 0.**

Используя формулу для синуса двойного аргумента, запишем уравнение в виде

2sin x cos x – sin x = 0

sin x (2 cos x – 1) = 0

sin x = 0 cos x = 

x = πn x = ±

**Ответ:** x = πn x = ±

**Задания для самостоятельного решения:**

**Решить тригонометрические уравнения**

1. 2sin2 x + sin x – 1 = 0 5. 3 cos2 x - 5 cos x – 12 = 0

2. 2 sin2 x + sin x – 6 = 0 6. 2 cos2 x – sin x + 1 = 0

3. 2 cos2 x - cos x – 1 = 0 7. 4 sin2 x – 5 sin x cos x – 6 cos2 x = 0

4. 6 cos2 x + 7 cos x – 3 = 0 8. 3 sin2 x – 7 sin x cos x + 2 cos2 x = 0

9. 3 sin2 x – 4 sin x cos x + 5 cos2 x = 2

10. 4 sin2 x – 8 sin x cos x + 10 cos2 x = 3

11. 2 sin x cos x + 5 cos2 x = 4

12. 1 – 4 sin x cos x + 4 cos2 x = 0

**Комплексные числа**

**Понятие мнимой единицы**

Допустим, что существует такое число, квадрат которого равен -1. Обозначим это число буквой . Тогда можно записать . Число будем называть ***мнимой единицей***. А предыдущее равенство будем считать определением мнимой единицы.

Из этого равенства находим .

Введение мнимой единицы позволяет извлекать корни квадратные из отрицательных чисел. Например: = 6i.

.

**Степени мнимой единицы**

Рассмотрим степени мнимой единицы:

;

;

;

;

;

;

.

Если выписать все значения степеней числа , то мы получим такую последовательность: ;; ;;;; 1 и т.д. Значения степеней числа повторяются с периодом, равным 4.

Таким образом, если показатель степени делится на 4, то значение степени равно 1.

Если при делении показателя степени на 4 в остатке получается 1, то значение степени равно . Если при делении показателя степени на 4 в остатке получается 2, то значение степени равно -1. Если при делении показателя степени на 4 в остатке получается 3, то значение степени равно .

Пользуясь этим , можно вычислять любую степень числа .

**Найти:**

**Решение:**

**Задания для самостоятельного решения**

Числить:

1.

2.

3.

4.

**Определение комплексного числа**

Числа вида , где и - действительные числа, - мнимая единица, называются комплексными.

Числа - *действительная часть* комплексного числа, - *мнимая часть* комплексного числа, - коэффициент при мнимой части.

Возможны случаи, когда действительные числа и могут быть равными нулю.

Если , то комплексное число называют *чисто мнимым*. Если , то комплексное число называют *действительным*. Если и одновременно, то комплексное число 0+0 равно нулю.

Запись комплексного числа в виде называется ***алгебраической формой комплексного числа.***  
Два комплексных числа называются равными тогда и только тогда, когда в отдельности равны их действительные части и коэффициенты при мнимой единице, т.е. , если .

**Действия над комплексными числами в алгебраической форме**

Сложение, вычитание, умножение комплексных чисел в алгебраической форме производят по правилам соответствующих действий над многочленами. Рассмотрим на примерах:

1. Даны комплексные числа Найти: ; , .

Решение:

1. , ()

**Задания для самостоятельного решения:**

1. Произвести сложение и вычитание комплексных чисел:
2. ; 2;

. ; 4. ;

5. ; 6. ;

7. ; 8. .

1. Произвести умножение комплексных чисел:
2. 5.
3. 6.
4. 7.
5. 8.

При выполнении умножения можно использовать формулы:

1. Выполнить действие:
2. 2. ; 3. ; 4. ; 5. .

При использовании формулы всегда получается частный случай комплексного числа – действительное число, а комплексные числа, которые мы умножаем, являются сопряженными.

Два комплексных числа называются ***сопряженными***, если они отличаются друг от друга только знаками перед мнимой частью.

Произведение двух сопряженных чисел всегда равно действительному числу.

Пример. Выполнить действие:

Решение:

Воспользуемся этим свойством для выполнения деления двух комплексных чисел. Чтобы выполнить деление, произведем дополнительное действие: умножим делимое и делитель на комплексное число, сопряженное делителю.

Пример: Выполнить деление: а) ; b) .

Решение:

b) .

**Задания для самостоятельного решения:**

1. ; 2. ; 3. ; 4. ; 5. ; 6. .

**Квадратные уравнения, дискриминант которых отрицателен**

Рассмотрим решение квадратных уравнений, дискриминант которых отрицателен.

Пример: Решить уравнение:

Решение: ,

**Задания для самостоятельного решения:**

1. ; 2. ;

3. ; 4.

**Геометрическая интерпретация комплексного числа**

Комплексное число z = можно изобразить точкой Z плоскости с координатами . (См. рис. 71 ) Для этого выберем на плоскости декартову прямоугольную систему координат. Действительные числа изображаются точками оси абсцисс, которую называют ***действительной*** (или *вещественной*) ***осью***; чисто мнимые числа – точками оси ординат, которую называют ***мнимой осью***.

Каждой точке плоскости с координатами существует один и только один вектор с началом О (0; 0) и концом Z (). Поэтому комплексное число z = можно изобразить в виде вектора с началом в точке О (0; 0) и концом в точке Z ().

Изобразить на плоскости числа: z1 = 5;

y

2

-3 0 3 z15 x

-3

Рисунок 71

5

**Тригонометрическая форма комплексного числа**

Пусть комплексное число z = изображено в виде вектора c началом О (0; 0) и концом Z (). (Рис. 9).

***Модулем*** комплексного числа z = называется длина вектора , которую можно найти по формуле Обозначив модуль комплексного числа буквой r получим

(1)

Аргументом комплексного числа называется угол , который образует вектор с положительным направлением оси абсцисс. Величину угла можно найти с помощью формул

**;**  (2)

Эта система имеет бесчисленное множество решений вида , где - любое целое число. Таким образом, любое комплексное число имеет бесконечное множество аргументов, отличающихся друг от друга на число, кратное . Если , то мы получим главное значение аргумента , которое и будем называть аргументом комплексного числа.

Из соотношений и следует:

. Если в запись комплексного числа  **вместо**  подставить эти значения, то получим

z =

Мы получили новую запись комплексного числа:

**z =**  (3)

которая называется ***тригонометрической формой*** комплексного числа.

Сформулируем правило перехода от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической.

1. Находят модуль комплексного числа , для чего используют формулу

1. Определяют геометрически, в какой четверти находится точка **z**.
2. Составляют уравнения и и по решению одного из них находят угол **.**
3. Записывают комплексное число **z** в тригонометрической форме.

**Пример.** Записать в тригонометрической форме комплексное число z =

**Решение.** . Изобразим число z геометрически

(См. рис. 72).

у

1 z (1,1)

r

1 х

0

Рисунок 72.

Мы видим, что числу z соответствует точка Z, лежащая в первой четверти, и вектор . Составим отношения и , т.е.

Этим соотношениям соответствует в первой четверти угол или .

Т.к. , или , то тригонометрическая форма заданного комплексного числа имеет вид:

z = или z = .

**Пример.** Записать число z = в тригонометрической форме (См. рис. 73)

**Решение.**

z

-2 x

Рисунок 73.

или

z = или z =

**Действия над комплексными числами в тригонометрической форме**

Пусть заданы два комплексных числа:

Тогда:

1. При умножении двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются:

.

1. При делении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули делятся, а аргументы вычитаются:

*.*

1. При возведении в степень комплексного числа, заданного в тригонометрической форме, модуль числа нужно возвести в n-ю степень, а аргумент умножить на число

n:

= формула Муавра

1. Корень n-й степени из комплексного числа z имеет ровно n значений, которые находятся по формуле:

*=,*

*k* может принимать *n* значений: 0, 1, 2, …, n-1.

**Показательная форма комплексного числа**

Если комплексному числу , модуль которого равен 1, поставить в соответствие показательное выражение , то получим соотношение

. Которое называется ***формулой Эйлера***.

Любое комплексное число можно записать в виде эта форма записи комплексного числа называется ***показательной формой***.

**Действия над комплексными числами в показательной форме**

1. Произведение комплексных чисел в показательной форме находятся по формуле:
2. Частное комплексных чисел в показательной форме находятся по формуле:
3. Возведения в степень комплексное число в показательной форме находится по формуле:
4. Для вычисления корня из комплексного числа используется формула:

.

**Пример.** Даны комплексные числа и

. Найти: a) ; b) ; c) ; d) .

**Решение.**

1. .
2. .
3. , где k принимает значения 0, 1, 2.

Если k = 0, то ;

Если k = 1, то ;

Если k = 2, то .

**Задания для самостоятельного решения:**

1. Даны комплексные числа и
   1. . Найти: a) ; b) ; c) ; d) .
2. Найти произведение комплексных чисел :
   1. ; .
   2. ; .
   3. ; ;
   4. ; .
3. Найти частное комплексных чисел :
   1. .
   2. .
   3. ; ;
   4. ; .
4. Найти , если .
5. Найти , если .
6. Вычислить .
7. На комплексной плоскости построить точки:
   1. 2; 5; -3; -6;
8. ;
9. Построить окружность:
10. Найти модуль комплексного числа :
    1. a)
11. Разложите число на комплексно сопряженные множители (a и b – действительные числа):

a. .

d. .

1. Выполнить действия и записать результат в алгебраической и показательной форме:



   4. ;
   5. .
2. Решить уравнения:
   1. .

Приложение 1

Значения тригонометрических функций некоторых углов

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Функция  Аргумент | Sin α | cos α | tg α | ctg α |
| 0 | 0 | 1 | 0 | ∞ |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  | 1 | 1 |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  | 1 | 0 | ∞ | 0 |
|  |  | - | - | - |
|  | 0 | -1 | 0 | ∞ |
|  | - | - |  |  |
|  | -1 | 0 | ∞ | 0 |

Список используемой литературы

1. Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин: Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл.-М.: Просвещение. 2000.
2. Афанасьева О.Н. и др. Сборник задач по математике для техникумов – М: Наука, 2007.
3. Валуцэ И.И., Дилигул Г.Н. Математика для техникумов (на базе средней школы), - М: Наука, 2009.
4. Болиманов М.И. Математика эксперимент. Учеб. пособие для СПТУ – М: Высш. шк., 2007.
5. Лисичкин В.М., Соловейчик М.Л., Математика. Учеб. пособие для техникумов, - М: Высш. шк., 2005.